

# Szóráscsökkentő mintavételi módszerek alkalmazása lineáris hálózatok Monte Carlo analízisének gyorsítására

ETO 519.245.621.3.011.71

Egy hatékony statisztikus áramköranalízis programrendszer kidolgozása érdekében rendkívül széles fronton indítható kutatás (direkt vagy szimulációs módszerek; statisztikus eszközmodellezés; statisztikus mintavételezés és becslés; ismételt hálózatanalízis; számítástechnikai vonatkozások stb.). A sokféle területen jelentkező lehetőségek közül jelen dolgozatban azokra a speciális statisztikus módszerekre hívom fel a figyelmet — és röviden beszámolok az elért eredményekről — melyekkel a statisztikus áramköranalízis szimulációs módszere (Monte Carlo módszer) csupán mintavételezési és becslési fogások alkalmazásával (apriori információ felhasználásával) gyorsabbá tehető.

A szóráscsökkentő mintavételi módszerek ötletei a matematikai statisztikai irodalmában viszonylag régen ismertek [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Az elektronikus áramkörök Monte Carlo típusú analízisében történő alkalmazásukra több javaslat és kísérlet történt már [7, 8, 9, 10], azonban ezek még vagy csak ötlet formájában ismertek, vagy nem elég hatásosak, vagy alkalmazhatósági területük nagyon szűk.

## Jelölések

$E\{\eta\}$  az  $f_\eta$  sűrűségfüggvényű  $\eta$  valószínűségi változó várható értéke:

$$E\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_\eta(t) dt,$$

$E\{\eta^i\}$  az  $\eta$  valószínűségi változó  $i$ -edik momentuma,

$\text{var}\{\eta\}$  az  $\eta$  valószínűségi változó szórásnégyzete:  $\text{var}\{\eta\} = E\{\eta^2\} - E^2\{\eta\}$ ,

$\text{cov}\{\eta, \vartheta\}$  az  $\eta$  és  $\vartheta$  valószínűségi váltók kovariancia együtthatója:

$$\text{cov}\{\eta, \vartheta\} = E\{\eta \cdot \vartheta\} - E\{\eta\} \cdot E\{\vartheta\},$$

$\text{cor}\{\eta, \vartheta\}$  az  $\eta$  és  $\vartheta$  valószínűségi változók korrelációs együtthatója:

$$\text{cor}\{\eta, \vartheta\} = \frac{\text{cov}\{\eta, \vartheta\}}{\sqrt{\text{var}\{\eta\} \cdot \text{var}\{\vartheta\}}},$$

$\bar{\eta}$  mintaelemek átlaga:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i,$$

a felülvonás mindig  $n$  darab azonos eloszlású, független valószínűségi változó számtani közepét jelenti,

$\hat{a}$  a sapka az  $a$  statisztikus jellemzőire a mintaelemekből számított becslést jelenti.

## Általános áttekintés

A statisztikus áramkör analízis feladata a következőképpen fogalmazható meg: Adott az áramkör topológiája, az áramköri elemek  $x_0 = \{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}\}$  névleges értékei és a  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$  áramköri paraméterek, mint valószínűségi változók együttes  $F_\xi$  eloszlása, ill.  $f_\xi$  sűrűség függvénye és ezek ismeretében meghatározandók a  $\psi = h(\xi)$  hálózatjellemezőnek, mint valószínűségi változónak a statisztikus tulajdonságai. Általában a  $h$  hálózatfüggvény az áramköri paraméterek bonyolult nemlineáris függvénye.

A szokásos szimulációs eljárás (Szimpla Monte Carlo, SMC) során az áramköri paraméterekre az eredeti  $F_\xi$  eloszlásuknak megfelelően sorsolunk ki véletlen számokat, majd gyors analízissel meghatározzuk a  $\psi$  hálózatjellemező értékét. A  $\psi$  hálózatjellemezőre kapott  $n$  elemű mintától számítjuk a statisztikus jellemzők (várható érték, szórásnégyzet, selejtarány, sűrűségfüggvény, regressziós együtthatók stb.) becslésül szolgáló statisztikákat.

A mintaelemek és a belőlük számított statisztikák, azaz becslések valószínűségi változók. Egy  $a$  statisztikus jellemzőre adott  $\hat{a}$  becslés pontosságát a leggyorsabban és a legpontosabban a becslés var  $\{\hat{a}\}$  szórásnégyzetével jellemezhetjük. (Mivel az alkalmazott becslések általában közel normális eloszlásúak, így a becslések pontosságának szemléletes mértékéül szolgáló konfidencia intervallumokat var  $\{\hat{a}\}$  ismeretében könnyen számíthatjuk [10]). Az alkalmazott becslések szórásnégyzete aszimptotikusan ( $n \rightarrow \infty$ ) mindig fordítva arányos az  $n$  mintanagysággal. Ezt figyelembe véve eredeti feladatunk, mely szerint az adott pontosság (var  $\{\hat{a}\}$ ) eléréséhez szükséges  $n$  mintanagyságot akarjuk csökkenteni (ezzel gyorsítva a Monte Carlo analízist), ekvivalens azzal, hogy adott  $n$  mintanagyság esetén olyan becsléseket konstruáljunk, melyeknek szórásnégyzete lehetőleg minimális.

Három szóráscsökkentő mintavételi és becslési eljárás — módosított eloszlás szerinti mintavételezés MEM, kontrol változó alkalmazása KVA, összerendelt mintapárok alkalmazása ÖMA — elvét, lehetőségeit tekintjük át. Egy becslés HN hatásosságán azt

értjük, hogy hányszor kevesebb mintaelemből ad az SMC módszerrel azonos pontosságú becslést. A speciális módszerek hatékonyságának szisztematikus feltárásakor mind a négy eljárásra (SMC, MEM, KVA, ÖMA) az  $m = E\{\psi\}$  várható értéket, a  $\sigma^2 = \text{var}\{\psi\}$  szórásnégyzetet, a  $\mu^2 = E\{(\psi - y_0)^2\}$  névleges értékre vonatkozó másodrendű momentumot és az  $SA = 1 - P\{y_- \leq \psi \leq y_+\}$  ( $y_-, y_+$  a hálózatjellemzőre adott toleranciahatárok) selejtarányt illetően a következő számításokat és statisztikák előállítását kell elvégezni ( $a = m, \sigma^2, \mu^2, SA$ ):

- $a$  definiáljuk a becsülendő jellemzőt,
- $\hat{a}$  becslésére egy olyan statisztikát állítunk elő, mely legalább  $n \rightarrow \infty$  aszimptotikusan torzítatlan,  $\text{var}\{\hat{a}\} \rightarrow \min$  szórásnégyzete lehetőleg minimális,
- $\text{vár}\{\hat{a}\}$  a becslés szórásnégyzetének becslése aszimptotikusan torzítatlan legyen
- $HN = \frac{\text{var}\{\hat{a}_{SMC}\}}{\text{var}\{\hat{a}\}} \Big|_{n = n_{SMC}}$  az SMC-hez viszonyított határosság növekedés kifejezése (elméleti értéke)
- $\widehat{HN}$  és becslése, mely szintén aszimptotikusan torzítatlan legyen.

'Az  $\hat{a}$ , vár  $\{\hat{a}\}$  és  $\widehat{HN}$  becsléseket az ún. momentumok módszerét alkalmazva [5] konstruálhatjuk meg.

Ha a becsülendő mennyiséget, pl. vár  $\{\hat{a}\}$ -t előállítjuk olyan valószínűségi változók momentumainak függvényeként, melyekre mintát gyűjtünk, a momentumokat pedig a mintából számított átlagokkal becsüljük, akkor olyan, pl. vár  $\{\hat{a}\}$  becsléseket kapunk, melyek torzítatlanok és konzisztensek, azaz vár  $\{\hat{a}\}$  sztochasztikusan konvergál vár  $\{\hat{a}\}$  elméleti értékhez.

A mintavételi módszerek elvének összefoglalása az 1. táblázatban található. A táblázat első oszlopában a módszert jelöltük meg. A második oszlopban a tolerált áramkörü elemekre sorolt valószínűségi változót ( $\xi$  vagy  $\xi^*$ ) és sűrűségfüggvényüket ( $f_\xi$ , ill.  $f_{\xi^*}$ ) — mely szerint sorsolásuk történik — tüntettük fel.  $\xi$ -vel jelöltük az áramkörü paramétereket, melyek az eredeti, az analízis elején megadott statisztikus tulajdonságokkal (általában  $f_\xi$  sűrűségfüggvénnyel) rendelkező valószínűségi változók. A módosított eloszlás szerinti mintavételezésnél és esetleg az össze-rendelt mintapárok alkalmazásánál is a szimuláció során nem (ill. nem csak) az eredetileg adott  $f_\xi$  eloszlás szerint sorsolunk, hanem egy, az alkalmazott módszer által adódó  $f_{\xi^*}$  sűrűségfüggvény szerint is.

A harmadik oszlopban azokat a valószínűségi változókat tüntettük fel (a sorsolt értékek valamilyen függvényeit), melyekre, ill. melyek vegyes és maga-

1. táblázat

Módszer	Sorsolás	Mintagyűjtés	Becslés
SMC	$\xi \quad f_\xi(x)$	$\psi = h(\xi)$	$\hat{E}\{\psi\} = \hat{m} = \bar{\psi}$ $\hat{E}\{(\psi - y_0)^2\} = \hat{\mu}^2 = \overline{(\psi - y_0)^2} = \bar{\psi}^2 - 2y_0\bar{\psi} + y_0^2$ $\text{vár}\{\psi\} = \hat{\sigma}^2 = \overline{(\psi - \bar{\psi})^2} = \bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^2$ $\widehat{SA} = \overline{SI(\psi)}$
MEM	$\xi^* \quad f_{\xi^*}(x)$	$\psi^* = h(\xi^*)$ $w = \frac{f_\xi(\xi^*)}{f_{\xi^*}(\xi^*)}$	$\hat{E}\{\psi\} = \hat{m} = \overline{\psi^* w}$ $\hat{E}\{(\psi - y_0)^2\} = \hat{\mu}^2 = \overline{(\psi^* - y_0)^2 \cdot w} = \overline{\psi^{*2} \cdot w} - 2y_0\overline{\psi^* w} + y_0^2 \bar{w}$ $\text{vár}\{\psi\} = \hat{\sigma}^2 = \overline{(\psi^* - \overline{\psi^* w})^2 w} = \overline{\psi^{*2} \cdot w} - 2\overline{\psi^* w}^2 + \overline{\psi^* w}^2 \cdot \bar{w}$ $\widehat{SA} = \overline{SI\{\psi^*\} \cdot w}$
KVA	$\xi \quad f_\xi(x)$	$\psi = h(\xi)$ $\psi^* = h(\xi^*)$	$\hat{E}\{\psi\} = \hat{m} = \alpha \cdot E\{\psi^*\} + \bar{\psi} - \alpha \cdot \bar{\psi}^*$ $\hat{E}\{(\psi - y_0)^2\} = \hat{\mu}^2 = E\{\psi^{*2}\} - y_0^2 + \bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^{*2} - 2y_0(\bar{\psi} - \bar{\psi}^*)$ $\text{vár}\{\psi\} = \hat{\sigma}^2 = \alpha_1 \cdot E\{\psi^{*2}\} - \alpha_2 y_0^2 + \bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^2 - \alpha_1 \bar{\psi}^* + \alpha_2 \bar{\psi}^{*2}$ $\widehat{SA} = \alpha \cdot E\{SI(\psi^*)\} + \overline{SI(\psi)} - \alpha \cdot \overline{SI(\psi^*)}$
ÖMA	$\xi \quad f_\xi(x)$ $\xi^* \quad f_{\xi^*}(x)$ $\xi^* = P(\xi)$	$\psi = h(\xi)$ $\xi^* = h(\xi^*)$ $w = \frac{f_\xi(\xi^*)}{f_{\xi^*}(\xi^*)}$	$\hat{E}\{\psi\} = \hat{m} = 0,5 \cdot (\bar{\psi} + \bar{\psi}^*)$ $\hat{E}\{(\psi - y_0)^2\} = \hat{\mu}^2 = 0,5 \cdot (\bar{\psi}^2 + \bar{\psi}^{*2} - 2y_0(\bar{\psi} + \bar{\psi}^*) + 2 \cdot y_0^2)$ $\text{vár}\{\psi\} = \hat{\sigma}^2 = 0,5(\bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^2 + \bar{\psi}^{*2} - \bar{\psi}^{*2})$ $\widehat{SA} = 0,5 \cdot (\overline{SI(\psi)} + \overline{SI(\psi^*)})$

sabbrendű momentumaira az adott módszernél mintát gyűjtünk.  $\psi$ -vel jelöltük az eredeti feltételekhez ( $f_{\xi}$  sűrűségfüggvényű áramköri paraméterekhez) tartozó hálózatjellemzőt. Minden egyes módszernél végül is ennek a valószínűségi változónak a statisztikus jellemzőit akarjuk becsülni.

A táblázat negyedik oszlopában a módszerre jellemző, az esetek többségében az eddigi tapasztalatok szerint is határos becslést adó statisztikákat tüntetük fel. Ezen (és ehhez hasonló) becslések pontosságát jellemző szórásnégyzetek algebrai kifejezéseit — melyek kiszámítása tulajdonságaik analitikus és szimulációs (számszerű futtatási eredmények alapján való) vizsgálata [11] egyébként jelen munka alapvető célja — terjedelmi okok miatt nem soroljuk fel, csupán a következtetéseket ismertetjük és futtatási eredményeket értékelünk.

A továbbiakban az egyes szóráscsökkentő eljárások elvét tekintjük át. Az alapötletekből adódó technika illusztrálása céljából néhány egyszerűbb becslés konstruálásának lépéseit is megmutatjuk, természetesen a részletszámítások mellőzésével.

### Módosított eloszlás szerinti mintavételezés MEM

Ennél a módszernél az áramköri paraméterekre az eredeti  $f_{\xi}$  sűrűségfüggvényük helyett egy másik, célszerűen megválasztott  $f_{\xi^*}$  sűrűség szerint sorsolunk ki értékeket. A  $\psi = h(\xi)$  hálózatjellemző statisztikus tulajdonságairól az így kapott mintából a szokásos statisztikákkal természetesen semmit sem mondhatunk, de a becslésekben használt megfelelő  $f_{\xi}$  és  $f_{\xi^*}$ -től függő  $w$  súlyokat alkalmazva, a sorsolásnál elkövetett adott esetben igen lényeges torzítás kompenzálható.

Az 1. táblázatban található statisztikák a sorsolásnál alkalmazott  $f_{\xi^*}$  sűrűségfüggvénytől függetlenül torzítatlan (ill. aszimptotikusan torzítatlan) becslések. Ezen becslések szórásnégyzete azonban az  $f_{\xi^*}$  többváltozós függvény megválasztásától már nagy mértékben függ. Ez ad lehetőséget torzítatlan, minimális (vagy legalább csökkentett) szórásnégyzetű becslések alkalmazására. A feladat tehát a becslések szórásnégyzetét minimalizáló  $f_{\xi^*}$  többdimenziós sűrűségfüggvény meghatározása, mely függ az áramköri paramétereknek az eredeti  $F_{\xi}$  eloszlásától, a  $h(x)$  hálózat függvényétől, továbbá a hatásosabbá teendő statisztika szerkezetétől. Ez utóbbi tulajdonságban rejlik egyébként a módszer egyik hátránya: nem lehet szimultán csökkenteni a különböző becslések szórásnégyzetét.

Az áramköri paraméterek valamilyen  $\mathcal{H}(h(\xi))$  függvényének, (mely függvény tartalmazza a  $h$  hálózatfüggvényt)  $a = E\{\mathcal{H}(h(\xi))\}$  várható értékéként definiálható statisztikus jellemzők ( $a = m, \mu^2, SA$ ) esetén könnyen belátható, hogy

$$E\{\mathcal{H}(h(\xi))\} = E\left\{\mathcal{H}(h(\xi^*)) \cdot \frac{f_{\xi}(\xi^*)}{f_{\xi^*}(\xi^*)}\right\} = E\{\mathcal{H}(h(\xi^*)) \cdot w(\xi^*)\}$$

amiből következik, hogy az egyszerű mintavételezésnél alkalmazott

$$d_{SMC} = \overline{\mathcal{H}(h(\xi))}$$

becsléshez hasonlóan az

$$d_{MEM} = \overline{\mathcal{H}(h(\xi^*)) \cdot w(\xi^*)}$$

becslés is torzítatlan, azonban a  $\text{var}\{d_{SMC}\}$  és a  $\text{var}\{d_{MEM}\}$  szórásnégyzetek már nagymértékben különbözhetnek. Kimutatható, hogy  $\text{var}\{d_{MEM}\}$  elméletileg elérhető minimumához az

$$f_{\xi^*}(x) = \frac{|\mathcal{H}(h(x))| \cdot f_{\xi}(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{H}(h(x))| \cdot f_{\xi}(x) \cdot dx}$$

sűrűség szerint kell sorsolni [11].

Mivel a  $h$  hálózatfüggvényt explicit formában nem ismerjük, így ez az elméleti optimumot biztosító  $f_{\xi^*}$  sűrűségfüggvény sem áll rendelkezésünkre. Viszont az  $y_0$  névleges érték és az

$$S_i = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x_0}$$

differenciális érzékenységek ismeretében a hálózatfüggvényre a

$$\tilde{h}(x) = y_0 + \sum_{i=1}^k S_i(x_i - x_{i0})$$

közelítést felhasználva,  $f_{\xi^*}$  kifejezésében  $h(x)$  helyére helyettesítve, már explicit ismerjük azt az  $\tilde{f}_{\xi^*}$  sűrűségfüggvényt, melyet alkalmazva közel optimális becsléseket kaphatunk. További feladat ezek után az adott  $\tilde{f}_{\xi^*}$  együttes sűrűségfüggvényének megfelelő, jellemzően nem független (az együttes sűrűségfüggvény nem egyváltozós sűrűségek szorzata) véletlen számok előállítására algoritmust adni.

Egy  $f_{\xi}(t_1, t_2, \dots, t_k)$  sűrűségfüggvénnyel rendelkező  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$  vektor valószínűségi változóra véletlen számokat a következő elv szerint állíthatunk elő [11]:

Jelöljük  $f_i(t_1, t_2, \dots, t_i)$ -vel az első  $i$  darab  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ezt  $f_{\xi}(t)$ -ből a következőképpen kapjuk:

$$f_i(t_1, t_2, \dots, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_k) dt_{i+1}, \dots, dt_k$$

Az  $f_i(t_1, t_2, \dots, t_i)$  függvények ismeretében előállíthatjuk a következő feltételes sűrűségfüggvényeket:

$$f_{i|\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}}(t_i) = \frac{f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, t_i)}{f_{i-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1})}$$

Ezek után az  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$  független, (0,1)-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változóknak megfelelő véletlen számok ismeretében, az alábbi

$$\int_{-\infty}^{\xi_1} f_1(t_1) dt_1 = \eta_1$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\xi_i} f_i/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}(t_i) dt_i = \eta_i$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\xi_k} f_k/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}(t_k) dt_k = \eta_k$$

egyenletrendszert  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ -ra megoldva az  $f_\xi(t)$  sűrűségfüggvényű  $\xi$  vektor valószínűségi változóra kapunk véletlen számokat.

A fontosság szerinti mintavételezés technikájának illusztrációjaként röviden tekintsük át a  $\mu^2 =$

$$\text{var} \{\hat{\mu}_{\text{SMC}}^2\} = \frac{1}{n} \cdot (E\{\psi^4\} - E^2\{\psi^2\} + 4y_0^2(E\{\psi^2\} - E^2\{\psi\}) - 4y_0(E\{\psi^3\} - E\{\psi^2\} \cdot E\{\psi\}))$$

$$\text{var} \{\hat{\mu}_{\text{MEM}}^2\} = \frac{1}{n} \cdot (E\{\psi^{*4}w^2\} - E^2\{\psi^{*2}w\} + 4y_0^2(E\{\psi^{*2}w^2\} - E^2\{\psi^*w\}) + y_0^4(E\{w^2\} - E^2\{w\}) - 4y_0(E\{\psi^{*3}w^2\} - E\{\psi^{*2}w\} \cdot E\{\psi^*w\}) + 2y_0^2(E\{\psi^{*2}w^2\} - E\{\psi^{*2}w\} \cdot E\{w\}) - 4y_0^2(E\{\psi^*w^2\} - E\{\psi^*w\} \cdot E\{w\}))$$

Ezen összefüggések alapján a momentumok módszerét használva kapjuk meg a  $\hat{\mu}^2$  becslések var  $\{\hat{\mu}^2\}$  szórásnégyzetének vár  $\{\hat{\mu}^2\}$  becsléseit.

Tételezzük fel, hogy a  $\xi_1$  áramköri paraméterek eredetileg független, az  $(x_{i0} - \delta_i, x_{i0} + \delta_i)$  intervallumon egyenletes eloszlásúak. Az áramköri paraméterek optimális  $f_{\xi^*}$  sűrűségfüggvényének — a sorsolásnál ezt a sűrűséget használva lesz var  $\{\hat{\mu}_{\text{MEM}}^2\}$  minimális — az  $S_i$  differenciális érzékenységek felhasználásával approximált  $\tilde{f}_{\xi^*}$  alakja:

$$\tilde{f}_{\xi^*}(x) = \frac{(\tilde{h}(x) - y_0)^2 f_\xi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{h}(x) - y_0)^2 \cdot f_\xi(x) dx}$$

$$= \frac{3 \cdot \left( \sum_{i=1}^k S_i (x_i - x_{i0}) \right)^2}{2^k \cdot \prod_{i=1}^k \delta_i \cdot \sum_{j=1}^k S_j \delta_j^2}$$

ha  $|x_i - x_{i0}| \leq \delta_i$  minden  $i$ -re, különben nulla.

A véletlen szám generátor, mely az áramköri paraméterekre ezen  $\tilde{f}_{\xi^*}(x)$  együttes sűrűségfüggvény szerint állít elő  $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_k^*$  véletlen számokat a következő algoritmus szerint működik:

1. lépés:

$$A_1 = S_1^2$$

$$B_1 = 0$$

$$E_1 = \sum_{j=2}^k S_j \delta_j^2$$

$$D_1 = \delta_1 \cdot (E_1 + A_1 \cdot \delta_1^2) - 2 \cdot \eta_1 \cdot \delta_1 \cdot (E_1 + S_1^2 \cdot \delta_1^2)$$

$= E\{(\psi - y_0)^2\}$  névleges értékre vonatkozó másodrendű momentum becslésének az esetét.

Az egyszerű mintavételezésnél alkalmazott

$$\hat{\mu}_{\text{SMC}}^2 = \overline{(\psi - y_0)^2} = \overline{\psi^2} - 2y_0 \cdot \overline{\psi} + y_0^2$$

becslés és a módosított eloszlás szerinti mintavételezésnél alkalmazott

$$\hat{\mu}_{\text{MEM}}^2 = \overline{(\psi^* - y_0)^2 w} = \overline{\psi^{*2} \cdot w} - 2y_0 \overline{\psi^* w} + y_0^2 \cdot \overline{w}$$

ahol

$$w = \frac{f_\xi(\xi^*)}{f_{\xi^*}(\xi^*)}$$

becslés egyaránt torzítatlan, azaz

$$E\{\hat{\mu}_{\text{SMC}}^2\} = E\{\hat{\mu}_{\text{MEM}}^2\} = \mu^2$$

A becslések szórásnégyzete azonban már különbözik. A szórásnégyzeteket  $\psi$  ill.  $\psi^*$  és  $w$  momentumaival kifejezve a következőket kapjuk:

$$\Delta \xi_1^* = \text{CARD}(A_1, B_1, E_1, D_1)$$

$$\xi_1^* = x_{10} + \Delta \xi_1^*$$

2. lépés,

$$i = 2, 3, \dots, k:$$

$$A_i = S_i^2$$

$$B_i = \left( \frac{B_{i-1}}{S_{i-1}} + 3 \cdot S_{i-1} \Delta \xi_{i-1}^* \right) \cdot S_i$$

$$E_i = E_{i-1} - S_i^2 \cdot \delta_i^2$$

$$C_i = E_i + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{B_i}{S_i} \right)^2$$

$$D_i = \delta_i (C_i - \delta_i (B_i - \delta_i A_i)) - 2 \eta_i (C_i + S_i^2 \delta_i^2)$$

$$\Delta \xi_i^* = \text{CARD}(A_i, B_i, C_i, D_i)$$

$$\xi_i^* = x_{i0} + \Delta \xi_i^*,$$

ahol  $\text{CARD}(A, B, C, D)$  az  $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$  egyenlet valós gyökét előállító függvényeljárás, továbbá  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$  független, a  $(0,1)$  intervallum egyenletes eloszlású véletlen szám.

Kontroll változó alkalmazása KVA

Ennél a módszernél a becslések szórásnégyzetének csökkentését végső soron a  $h$  hálózatfüggvényre vonatkozó apriori információ felhasználásával érjük el. Ezt az információt a  $h(x)$  hálózatfüggvény  $y_0 = h(x_0)$  névleges értéke és parciális deriváltjai ( $S_i$  differenciális érzékenységek) hordozzák.

Az eljárás során az áramköri paraméterekre az

eredeti eloszlás szerint sorsolunk értékeket. Az egzaktul számított  $\psi = h(\xi)$  mellett mintát gyűjtünk a

$$\psi^* = y_0 + \sum_{i=1}^k S_i(\xi - x_{i0})$$

valószínűségi változóra is (kontroll változó), mely várhatóan erős korrelációban van  $\psi$ -vel, ha az elsőfokú Taylor sor elég jó közelítést ad a tolerancia tartományon belül. Ez a pozitív korreláció használható fel az SMC-hez viszonyított hatásosabb statisztikák készítéséhez.

A csökkentett szórásnégyzetű becslések konstruálásának szisztematikus módja: a keresett  $a$  mennyiség becslésére a  $\xi$ ,  $\psi$  és  $\psi^*$  valószínűségi változókból a vegeyes és magasabb rendű momentumokat is felhasználó, egy vagy több  $\alpha$  paramétert tartalmazó  $\hat{a}(\alpha)$  statisztikát, készítünk, mely az  $\alpha$  paraméter(ek) értékétől függetlenül legalább aszimptotikusan torzítatlan becslés lesz. Azonban  $\text{var}\{\hat{a}(\alpha)\}$  már függ  $\alpha$ -tól. Meghatározzuk azt az elméleti  $\alpha = \alpha_0$  értéket, ahol  $\text{var}\{\hat{a}(\alpha)\}$  minimális. Mivel ezt az értéket pontosan nem ismerjük – hiszen ez függ a hálózatjellemző keresett statisztikus tulajdonságaitól is – két lehetőségünk van. Az egyik, hogy  $\alpha_0$  becslésére további  $\hat{\alpha}_0$  statisztikát készítünk, de az így kapott  $\hat{a}(\hat{\alpha}_0)$  becslés már olyan bonyolulttá válik, hogy pontossága  $\text{var}\{\hat{a}(\hat{\alpha}_0)\}$  kiértékelhetetlen. A másik (általunk előnyben részesített) lehetőség, hogy az  $\alpha_0$ -ra kapott elvi formális megoldás alapján plauzibilis feltevésekkel élve, apriori (azaz a szimuláció előtt, annak kimenetelelől függetlenül) választunk egy kedvezőnek látszó  $\hat{\alpha}_0$  értéket és az  $a$  becslésére az  $\hat{a}(\hat{\alpha}_0)$  statisztikát használjuk, ahol  $\hat{\alpha}_0$  nem statisztika, tehát nem valószínűségi változó, hanem előre rögzített, célszerűen választott állandó. Így  $\text{var}\{\hat{a}(\hat{\alpha}_0)\}$  még zárt alakban megadható, kézben tartható mennyiség, az elért eredmény ellenőrizhető, de nagyobb, mint az elvileg elérhető minimum.

A módszer technikájának illusztrálásaképpen először nézzük meg a szórásnégyzet becslésének esetét.

Tekintsük a következő aszimptotikusan torzítatlan becslést:

$$\hat{\sigma}_{KVA}^2 = \alpha_1 E\{\psi^{*2}\} - \alpha_2 E\{\psi^*\} + \overline{\psi^2} - \bar{\psi}^2 - \alpha_1 \overline{\psi^{*2}} + \alpha_2 \bar{\psi}^2.$$

A felhasznált apriori információk:

$E\{\psi^*\} = y_0$  továbbá az  $S_i$  érzékenységek felhasználásával:

$$E\{\psi^{*2}\} = y_0^2 + \sum_{i=1}^k S_i \sigma_{\xi_i}^2,$$

ahol:  $\sigma_{\xi_i}^2$  az  $i$ -edik áramköri paraméter szórásnégyzete.

Becslésünk szórásnégyzete:

$$\text{var}\{\hat{\sigma}_{KVA}^2\} = A\alpha_1^2 + B\alpha_2^2 + C\alpha_1\alpha_2 + D\alpha_1 + E\alpha_2 + F,$$

ahol:  $A = \text{var}\{\overline{\psi^{*2}}\}$

$$B = \text{var}\{\bar{\psi}^2\}$$

$$C = -2 \text{cov}\{\overline{\psi^{*2}}, \bar{\psi}^2\}$$

$$D = -2 \text{cov}\{\overline{\psi^2} - \bar{\psi}^2, \overline{\psi^{*2}}\}$$

$$E = 2 \text{cov}\{\overline{\psi^2} - \bar{\psi}^2, \overline{\psi^{*2}}\}$$

$$F = \text{var}\{\overline{\psi^2} - \bar{\psi}^2\}$$

$\text{var}\{\hat{\sigma}_{KVA}^2\}$ -nak  $\psi$  és  $\psi^*$  momentumai szerint kifejtett alakját (mely egyébként a vár  $\{\hat{\sigma}_{KVA}^2\}$  becslés kulcsa) hely hiányában nem közöljük. Tájékoztatás céljából megemlítjük, hogy az eredmény két gépelt oldal hosszúságú.  $\text{var}\{\hat{\sigma}_{KVA}^2\}$   $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  megfelelő megválasztásával minimalizálható. Az elméletileg elérhető minimumot biztosító  $\alpha_{10}$ ,  $\alpha_{20}$  együtthatókra kapható analitikus formulák alapján nemigen olvasható ki útmutatás arra vonatkozóan, hogy hogyan érdemes  $\hat{\sigma}_{KVA}^2$  becslés használatakor az adott esetben meglévő apriori információt a kedvező  $\hat{\alpha}_{10}$  és  $\hat{\alpha}_{20}$  paraméterek felvételére használni. Az eddigi tapasztalatok szerint az optimális becslést  $\hat{\alpha}_{10} = \hat{\alpha}_{20} = \hat{\alpha}_0$  közelében találjuk. Ha  $\psi$  és  $\psi^*$  elég erősen korrelál (pl. kis mértékű megváltozások esetén), akkor  $\hat{\alpha}_0 = 1$  egyébként pedig 1-nél valamivel kisebb értékre célszerű megválasztani  $\hat{\alpha}_{10}$ ,  $\hat{\alpha}_{20}$  paramétereket.

A szórásnégyzet becslése után nézzük meg a selejtarány esetét!

Az SA selejtarányt az  $SI(\psi)$  selejtindikátor várható értékeként definiáljuk, ahol

$$SI(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \psi < y_- \text{ vagy } \psi > y_+ \\ 0 & \text{ha } y_- \leq \psi \leq y_+ \end{cases}$$

$y_-$  és  $y_+$  a hálózatjellemzőre adott alsó és felső toleranciahatár. Tehát az  $SA = E\{SI(\psi)\}$  selejtarányra az egyszerű mintavételezésnél használt torzítatlan,

konzisztens becslés  $\widehat{SA}_{SMC} = \overline{SI(\psi)}$ , melynek szórásnégyzete:

$$\text{var}\{\widehat{SA}_{SMC}\} = \frac{1}{n} \cdot \text{var}\{SI(\psi)\} = \frac{1}{n} \cdot SA(1-SA)$$

A kontroll változó alkalmazása során az  $E\{SI(\psi^*)\}$  – a kontroll változó selejtaránya – előzetes ismeretében lehetőségünk van az

$$\widehat{SA}_{KVA} = E\{SI(\psi^*)\} + \overline{SI(\psi)} - \overline{SI(\psi^*)}$$

becslésre, melynek szórásnégyzete

$$\text{var}\{\widehat{SA}_{KVA}\} = \frac{1}{n} \cdot (\text{var}\{SI(\psi)\} +$$

$$+ \text{var}\{SI(\psi^*)\} - 2 \text{cov}\{SI(\psi), SI(\psi^*)\})$$

$\psi$  és  $\psi^*$  pozitív korrelációja esetén jóval kisebb lehet  $\text{var}\{\widehat{SA}_{SMC}\}$ -nél

A fenti becslés akkor alkalmazható, ha direkt úton (a statisztikus szimuláció előtt, illetve annak eredményétől függetlenül) elég pontosan meg tudják határozni  $E\{SI(\psi^*)\}$  értékét.

Ha az áramköri elemek értékei például egyenletes eloszlásúak, akkor  $E\{SI(\psi^*)\}$  direkt meghatározása a következő feladattal ekvivalens:

Egy  $k$  dimenziós téglatest egy általános helyzetű  $k-1$  dimenziós hipersíkkal elmettszve, mekkora a létrejött csonka téglatest térfogata? Ennek a problémának algoritmikus megoldása igen nehézkes.

$E\{SI(\psi^*)\}$  egzakt meghatározása helyett más lehetőséggel is élhetünk. Egy előzetes, a további vizsgálódásoktól független Monte Carlo ciklussal adhatunk egy, a majdani eredményeknél lényegesen pontosabb (pl. 100-szor kisebb szórásnégyzetű)  $E\{SI(\psi^*)\}$  becslést. (Ebben az esetben az egyszerű mintavételezéshez viszonyított hatásosság növekedésének az előzetes becslés pontossága felső határt szab, továbbá megnő a futási idő (pl. 100  $n$  elemi előzetes Monte Carlo ciklus esetén kb. kétszeresére). Ennek ellenére még így is elérhető 10–50-szeres eredő hatásosság növekedés.

### Összerendelt mintapárok alkalmazása (ÖMA)

Ennél a módszernél a mintavételi eljárást a következőképpen végezzük. Először az eredeti  $F_\xi$  eloszlás szerint sorsolt  $\xi$  áramkörü paraméter értékeknél meghatározzuk a  $\psi = h(\xi)$  hálózatjellemzőt, majd egy cél-szerűen megválasztott  $\xi^* = P(\xi)$  transzformációval új értékeket adunk az áramkörü paramétereknek és itt is elvégezzük a hálózatanalízist, azaz meghatározzuk a  $\psi^* = h(\xi^*) = h(P(\xi))$  hálózatjellemzőt. Ha a  $\psi^*$  valószínűségi változó eloszlása eltér  $\psi$  eloszlásától, akkor ki kell számolnunk a  $w(\xi^*)$  súlyozó tényezőt is. Ezt ez eljárást ismételjük meg  $n$ -szer. Ezek után a hálózat jellemzőjére kapott kétváltozós  $\{\psi, \psi^*\}$  mintából számítjuk a becsléseket. A  $\xi^* = P(\xi)$  transzformációt úgy választjuk meg, hogy a  $\psi = h(\xi)$  és a  $\psi^* = h(\xi^*)$  valószínűségi változók között olyan statisztikus függőség lépjen fel, amely a megfelelő — egyébként torzítatlan — statisztikák szórásnégyzetét csökkentik az SMC-nél alkalmazott statisztikákhoz képest.

Illusztrációként nézzük meg az  $m = E\{\psi\}$  várható érték becslését. Az egyszerű mintavételezésnél (SMC) az  $\hat{m}_{SMC} = \psi$  becslést használjuk, melynek szórásnégyzete

$$\text{var}\{\hat{m}_{SMC}\} = \frac{1}{n} \cdot (E\{\psi^2\} - E^2\{\psi\})$$

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban kössük ki az alábbi két feltételt, melyek azonban még nem zárják ki a gyakorlatban felmerülő esetek döntő többségét:

a) A  $\xi_i$  paraméterek  $f_{\xi_i}$  sűrűségfüggvénye legyen szimmetrikus az  $E\{\xi_i\} = x_{10}$  várható értékre, mely megegyezik a névleges értékkel.

b) A  $\xi^* = P(\xi)$  transzformációra nézve az áramkörü paraméterek sűrűségfüggvénye invariáns legyen, azaz  $f_{\xi} = f_{\xi^*}$ .

Ezen feltételek mellett az

$$\hat{m}_{\text{ÖMA}} = \alpha \cdot \bar{\psi} + (1 - \alpha) \bar{\psi}^*$$

becslés torzítatlan, szórásnégyzete pedig:

$$\text{var}\{\hat{m}_{\text{ÖMA}}\} = \frac{1}{n} (\alpha^2 \cdot \text{var}\{\psi\} + (1 - \alpha)^2 \cdot \text{var}\{\psi^*\} + 2\alpha \cdot (1 - \alpha) \text{cov}\{\psi, \psi^*\})$$

A kikötött feltételek mellett  $\text{var}\{\hat{m}_{\text{ÖMA}}\}$ -nak  $\alpha = \frac{1}{2}$ -nél van minimuma. Ekkor:

$$\text{var}\{\hat{m}_{\text{ÖMA}}\} = \frac{1}{4n} \cdot (E\{\psi^2\} - E^2\{\psi\} + E\{\psi^{*2}\} - E^2\{\psi^*\} + 2 \cdot E\{\psi \cdot \psi^*\} - 2 \cdot E\{\psi\} \cdot E\{\psi^*\})$$

Az elérhető hatásosság növekedés ebben az esetben:

$$HN = \frac{\text{var}\{\hat{m}_{SMC}\}}{\text{var}\{\hat{m}_{\text{ÖMA}}\}} \Big|_{n_{SMC} = 2 \cdot n_{\text{ÖMA}}} = \frac{1}{1 + \text{cor}\{\psi, \psi^*\}}$$

Látható tehát, hogy a szórásnégyzet annál kisebb, ill. a  $HN$  annál nagyobb minél erősebb negatív korrelációban van  $\psi = h(\xi)$  és  $\psi^* = h(\xi^*)$ . Ez a tény adhat eligazítást a célszerű  $\xi^* = P(\xi)$  transzformáció megválasztásához.

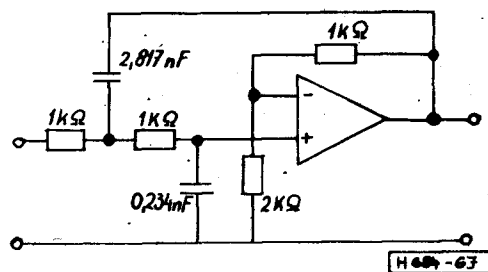
Mivel a minket érdeklő tartományban (tolerancia-tartomány) a hálózatjellemző gyakran monoton függvénye az áramkörü paramétereknek, jó eredményt érhetünk el, ha a  $P$  transzformációt úgy választjuk meg, hogy  $\xi^*$   $\xi$ -nek az  $E(\xi) = x_0$ -ra vonatkozó tükörképe legyen, azaz

$$\xi^* = P(\xi) = x_0 - (\xi - x_0)$$

Az itt leírt módszert alkalmazva, az eddigi tapasztalatok alapján megállapíthatjuk, hogy SMC-hez képest 10–1000-szer kevesebb mintaelemről kaphatunk ugyanolyan pontos becsléseket.

### Számszerű illusztráció és következtetések

A 2. táblázatban egy konkrét példa kapcsán számszerűen illusztrálják, hogy a speciális mintavételezési és becslési eljárásokat alkalmazva az egyszerű mintavételezéshez viszonyítva hányszor kevesebb mintaelemre van szükség a különböző statisztikus jellemzők azonos pontosságú (azonos szórásnégyzetű) becsléséhez. A táblázatban található  $HN$  hatásosság növekedés értékek egy másodfokú aluláteresztő aktív RC szűrő alaptagnak (1. ábra) egy áteresztő és egy zárótartománybeli frekvencián végzett Monte Carlo analízisnél kaptuk. A szűrőt az áramkörü elemek 2, 5 és 10%-os toleranciái mellett vizsgáltuk meg.



1. ábra

A futási eredményekből kapott számok alapján láthatjuk, hogy a speciális módszereket alkalmazva, elért pontosság eléréséhez adott esetben akár több nagyságrenddel kevesebb mintaelemre van szükség, mint a konvencionális Monte Carlo analízis során. Ezen eredményhez képest elhanyagolható az a körülmény, hogy azonos mintanagyságra vonatkoztatott időigénye ezen bonyolultabb módszereknek 1,2–2-szerese az egyszerű mintavételezés futásidőjének.

Az egyes módszereket összehasonlítva a következőket állapíthatjuk meg:

1. Az összerendelt mintapárok alkalmazásánál (ÖMA) a  $\sigma^2$  szórásnégyzet és az SA selejtarány becslésének hatásosságát biztosító  $\xi^* = P(\xi)$  transzformáció általánosan érvényes, vagyis algoritmikus előállítására még nem ismert.

2. A módosított eloszlás szerinti mintavételezésnél (MEM) a szórásnégyzet nem definiálható olyan függvény várható értékeként, mely nem tartalmaz más ismeretlen statisztikus jellemzőt (pl. várható érték). Éppen ezért kell  $\sigma^2$  becslése helyett beérnünk a  $\mu^2$  névleges értékre vonatkozó másodrendű momentum hatásos becslésével. Ezen módszernél a selejtarány hatásos becslésének az az akadálya, hogy nem áll rendelkezésünkre a selejttartomány kielégítő pontosságú approximációja. (Selejttartomány a  $k$  dimenziós paraméterterben azon pontok halmaza, mely pontokban az áramkör nem teljesíti az előírást.)

3. A kontroll változó alkalmazása az a módszer (az eljárások jelenlegi fejlettségét tekintve), amely egyidejűleg ad a várható értékre, szórásnégyzetre, és a selejtarányra igen hatásos becslést.

A 2. táblázatban levő számokból jól láthatjuk, hogy az áramköri elemek toleranciájának növelésével elég radikálisan csökken a módszerek hatásossága. Ennek természetes oka, hogy a megváltozások növekedésével a rendelkezésünkre álló apriori információ (általában az érzékenységek) használhatósága csökken. Ez mutatja egyébként ezen módszerek alkalmazhatóságának korlátait is. Az eljárások addig alkalmazhatók, amíg az előzetes információk alapján várható, és a ténylegesen bekövetkező „események” között még elég erős a korreláció.

**Elkészült Monte Carlo programok**

Lineáris hálózatok frekvenciatartománybeli statisztikus analizésére öt program készült el [11]. A programok eredetileg ALGOL nyelven íródtak a RAZDAN-3 számítógépre. Jelenleg folyik FORTRAN nyelvű átirásuk IBM 370/115 gépre. A már elkészült programok közvetlen célja nem egy konkrét ipari tervezői gyakorlat segítése, hanem a Monte Carlo tolerancia analízis demonstrálása (oktatás), kutatása, a módszer gyorsítására kínálkozó lehetőségek kipróbálása. Az egyes programok a következőképpen jellemezhetők:

**SMC** Lineáris hálózatok általános célú Monte Carlo analizését végzi. Az áramköranalízis rész: LU dekompozícióval végzett csomóponti analízis. A statisztikai rész: egyszerű mintavételezés és becslés (Szimpla Monte Carlo). Ezen programmal kapott pontosság és időadatok szolgálnak referenciául a további hatékonyabb módszerek vizsgálatához, az összehasonlításhoz.

**LCS** Az ismételt analízis gyorsítása érdekében a hálózatfüggvényt (a hálózatjellemzőt, mint az áramköri paraméterek függvényét) szakaszonként lineáris, többváltozós függvénnyel közelíti meg differenciahányadosok

$$HN = \frac{\text{var}(\hat{d}_{SMC})}{\text{var}(\hat{d})} \Big|_{n=D_{SMC}} \approx \frac{n_{SMC}}{n} \Big|_{\text{var}(\hat{d}) = \text{var}(\hat{d}_{SMC})}$$

	Módszer	A becslt jellemző (a)	Az áramköri elemek toleranciája		
			2%	5%	10%
Áteresztő tartomány	MEM	$m$	3 070	496	95
		$\mu^2$	647	98	21
	KVA	$m$	3 685	584	140
		$\sigma^2$	482	75	18
		SA	100	100	95
ÖMA	$m$	1 476	235	57	
Záró tartomány	MEM	$m$	21 390	3 433	838
		$\mu^2$	1 024	743	187
	KVA	$m$	29 970	4 790	1 170
		$\sigma^2$	508	420	101
		SA	100	100	98
	ÖMA	$m$	17 592	2 804	693

felhasználásával. Lényegesen gyorsabb az SMC-nél különösen a bonyolultabb áramkörök esetén, de természetesen pontatlanabb is. Egy tájékoztató jellegű statisztikus analízisnek lehet a gyors eszköze.

**MEM**  
**KVA**  
**ÖMA**

Ezen programok a speciális statisztikus mintavételi módszerek, módosított eloszlás szerinti mintavételezés, kontroll változó alkalmazása, összerendelt mintapárok alkalmazása) elvei szerint működnek. Elsősorban a szóráscsökkentő módszerekkel elérhető eredmények és a módszerek alkalmazhatósági feltételeinek kísérleti vizsgálatára alkalmasak.

A programoknak közös a „bemeneti nyelve” és hasonló formában adják az eredményeket is. A programok ellenállásból, induktivitásból, kapacitásból és feszültségvezérelt áramgenerátorból (komplex, frekvenciafüggő, egytöréspontos vezérlési tényezővel) álló áramkörök vizsgálatára alkalmasak. Az áramkör leírásakor tetszőleges számú áramköri paraméter deklarálható tolerált, valószínűségi változónak tekintett mennyiségként.

A programok tetszőleges kapupáron definiált feszültségtranszfer függvény vagy transzferimpedancia abszolút értékéről (dB-ben) fázisáról, valós vagy képzetes részéről adnak eredményeket: névleges érték, érzékenység, statisztikus jellemzők (várható érték, szórásnégyzet, névleges értékre vonatkoztatott másodrendű momentum, selejt arány, hisztogram, áramköri elemértékekre vonatkozó regressziós együtthetők), továbbá becslés a statisztikus jellemzők becslésének a szórásnégyzetére.

## Összefoglalás

A cikk célja a Monte Carlo áramköranalízis statisztikus módszerekkel való gyorsítási lehetőségeinek a feltárása volt. A szóráscsökkentő mintavételi és becslési eljárások elvét mutattuk be, alkalmazásuk technikáját a cikk korlátai miatt csupán néhány példával szemléltettük. A speciális módszerekkel elérhető hatásszágnövekedést futtatási eredményeken alapuló, számszerű mintapéldával is illusztráltuk. A matematikai modell keretein belül felmerült lehetőségek kipróbálására, ill. realizálására statisztikus áramköranalízis programrendszer készült el, mellyel a további empirikus kutatás is lehetővé válik.

A gyorsítási módszerekkel a Monte Carlo analízis ideje bizonyos esetekben akár nagyságrendekkel is csökkenthető. Azonban még kérdéses, hogy minden gyakorlati esetben felmerülő áramkör és becslendő statisztikus jellemző esetében is ilyen haszonnal alkalmazhatók-e ezek a módszerek. Ha esetleg univerzális gyorsító módszer nem is létezik, az eddigi eredmények alapján mégis joggal remélhetjük, hogy konkrét esetekben a specialitásokat kihasználó célprogrammal a feladat a szokásosan kínálkozó megoldásnál sokkal gazdaságosabban, lényegesen kisebb gépidő felhasználásával oldható meg.

Végezetül köszönetemet fejezem ki tanáromnak, Dr. Géher Károly egyetemi tanárnak, hosszú időn át nyújtott értékes segítségéért és Dr. Solymosi János

docensnek, jelen cikk kéziratának gondos átnézéséért, hasznos tanácsaiért.

## IRODALOM

- [1] *Hammerstley, J. M.—Handscomb, D. C.*: Monte Carlo Methods, Wiley, New York, 1964.
- [2] *Kahn, M.*: Use of different Monte Carlo sampling techniques, Symposium on Monte Carlo Methods, Florida, 1954. Edited by H.Meyer, Wiley, New York, 1956.
- [3] *Marshall, A. W.*: The use of multi-stage sampling schemes in Monte Carlo computations, —
- [4] *Ewans, D. H.*: Statistical tolerancing: The state of the art, Part I. II. III. Journal of Quality Technology, vol. 6. No. 4. 1974. Oct. 1974.
- [5] *Korn, G. A.—Korn, T. M.*: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
- [6] *Srejgyer, Ju. A.*: Monte Carlo módszerek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [7] *Neill, T. B. M.*: Techniques for circuit analysis (Part 3.) Computer Aided Design, vol 2., No. 4., Summer 1970.
- [8] *Neill, T. B. M.*: Variance reduction in the Monte Carlo analysis, IEE International Conference on Computer Aided Design, april 1972.
- [9] *Scott, T. R.—Walker, T. P.*: Regionalistaion: A Method for Generating Joint Density Estimates, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol CAS—23., No. 4., april 1976.
- [10] *Styblinski, M. A.*: Efficiency of Yield Estimation by the Monte Carlo Methods, IEE International Conference on computer Aided Design and Manufacture of Electronic Components, Circuits and Systems, july, 1979.
- [11] *Gaál József*: Szóráscsökkentő mintavételi módszerek alkalmazása lineáris hálózatok statisztikus analízisére. Szakmérnöki Diplomaterv BME—HEI, Budapest, 1978.