HÍRADÁSTECHNIKA

A HÍRADÁSTECHNIKAI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET LAPJA

KULCSÁR GÁBOR
Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet

Algoritmus poligonok lefedésére téglalapokkal

ETO 514.174.3:681.3.06

(Számítógépes adatelőkészítés pattern generátor vezérléséhez)

Az LSI-technika fokozott követelményeket támaszt az integrált áramköri maszkok minőségével szemben. Az elemsűrűség növekedésével az egyes maszkokon található alakzatok száma nő, míg azok méretei és a közöttük levő távolságok csökkennek. Lényeges tehát, hogy az alakzatok leképzése pontos és lehetőleg torzításmentes legyen. A követelmények kielégítésére világszerte ún. pattern generátorokat alkalmaznak. Ezeknek több fajtája létezik.

A leggyakrabban alkalmazott berendezés ún. mechanikus — optikai pattern generátor. A képlemez, amely egy mozgatható asztalon helyezkedik el, egy változtatható méretű, téglalap alakú blendén keresztül megvilágítható. A blende az asztalhoz képest forgatható is. A berendezés tehát gyakorlatilag tetszőleges méretű és közel tetszőleges állású téglalap alakzatok leképzésére alkalmas a képlemez bármely részén. A gép lyukszalaggal vezérelhető. A vezérlés utasításszavak segítségével történik. Egy-egy utasításszó egy-egy téglalap leképzését teszi lehetővé a helykoordináták, méretek és az esetleges elforgatás megadásával [1]. Az adatelőkészítés végső célja tehát a vezérlő lyukszalag előállítása.

Az integrált áramköri maszkok növekvő bonyolultsága, valamint az adatelőkészítés során felmerülő számos optimalizálási és egyéb feladat természete szükségessé teszi számítógép alkalmazását. A tervrajz formájában adott áramköri alakzatokat a számítógép által feldolgozható formára kell hozni. Ez rendszerint digitalizálással, az alakzatok csúcspontjai koordinátáinak egy meghatározott körüljárási irány szerinti felvételével történik. A továbbiakban egy-egy alakzat mint számpárok rendezett halmaza adott a számítógép számára.

A számítógépes adatelőkészítés főbb feladatai a következők.

1. A pattern generátor felépítéséből, illetve működési sajátosságaiból következik, hogy a leképzendő alakzatokat olyan téglalapok halmazára kell bontani, amelyeknek egyesítése pontosan lefedi az egyes alakzatokat, azaz az egyesítések kontúrvonalai az illető alakzatok határvonalaival azonosak.

2. A vezérlő lyukszalag elkészítése előtt célszerű bizonyos optimalizálásokat végezni a pattern generátor gépidejének csökkentése, illetve hatékonyságának növelése érdekében, majd megfelelő formátumban el kell készíteni a vezérlő lyukszalagot. A fenti lépések ellenőrzése szintén számítógéppel lehetséges.

Ez a dolgozat elsősorban alakzatok téglalapokkal való lefedésével foglalkozik. Olyan algoritmus létrehozása volt a cél, amely az alakzat csúcspontjainak digitalizált koordinátáiból kiindulva meghatározza az alakzatot az alábbi értelemben lefedő, lehetőleg minimális számú téglalap csúcspontjait.

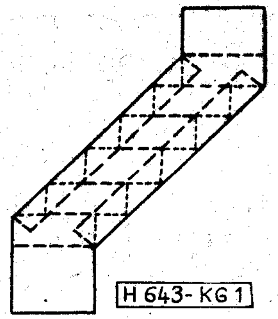
A téglapoknak az alakzat minden pontját le kell fedniük, ugyanakkor nem fedhetnek le alakzathoz nem tartozó pontot.

Alakzatok osztályozása

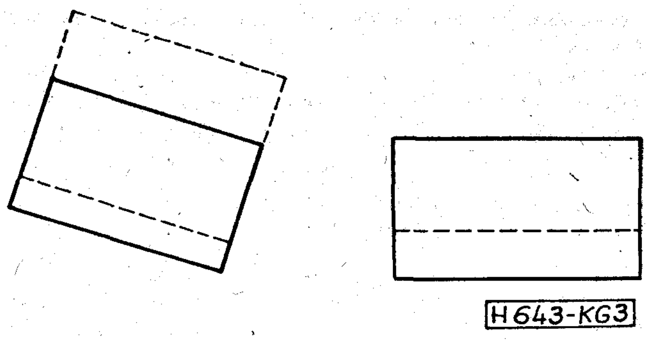
A feladat bonyolultsága szempontjából típusokba sorolhatjuk a maszkokon előforduló alakzatokat. Ortogonális alakzatnak nevezzük az olyan poligont, amelyiknek minden oldala párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel. (Poligonon a továbbiakban olyan összefüggő sokszöget értünk, amelynek minden csúcsában két-két oldal találkozik.) Az ilyen poligonnak csak 90°-os vagy 270°-os (belső) szögei vannak. Ortogonális alakzatok téglalap felbontása viszonylag egyszerűen algoritmizálható [1].

A nem ortogonális alakzatok közül nyilván csak olyanok fedhetők le a fenti értelemben téglalapokkal, amelyeknek belső szögei között nincs hegyesszög. Ezen belül gyakorlati szempontból célszerű lehet külön osztályba sorolni az olyan alakzatokat, amelyek a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalakon kívül csak a tengelyekkel 45°-os szöget bezáró oldalakat tartalmaznak. Az ortogonális és a nem ortogonális alakzatok között egyaránt előfordulhatnak egyszeresen, illetve többszörösen összefüggő alakzatok is. A nem ortogonális alakzatok téglalap lefedése visszavezethető az ortogonális alakzatok lefedésére,

Beérkezett: 1978. X. 28.



1. ábra



3. ábra. Egyesíthető téglalapok

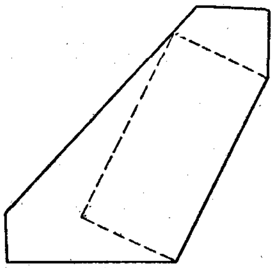
ez a módszer azonban nem optimális a pattern generátor gépidejének szempontjából (1. ábra).

A továbbiakban ismertetésre kerülő algoritmus alkalmas minden olyan (egyszeresen vagy többszörösen összefüggő) poligon téglalap lefedésére (az előbbiekben részletezett értelemben), amely belső szögei között nem tartalmaz hegyesszöget, tehát amely téglalapokkal ily módon egyáltalán lefedhető. Alakzaton a továbbiakban ilyen poligont értünk.

Az algoritmus vázlata

1. eljárás

Az alakzat minden egyes határoló oldalára olyan téglalapot illesztünk (tehát a téglalap egyik oldala és az alakzat szóban forgó oldala egybe esik), amely teljes egészében az alakzat belsejébe esik, és amely maximális abban az értelemben, hogy minden ennél nagyobb (területű) téglalap már túlnyúlna az alakzat határán (2. ábra).



2. ábra. „Maximális" téglalap

2. eljárás

Ha több téglalap egyesítése téglalap (azaz a téglalapok által együttesen lefedett alakzat szintén téglalap), akkor ezek helyett egyesítésüket vesszük. Tehát két téglalapot akkor egyesíthetünk, ha van két közös párhuzamos oldaldarabjuk (ekkor ezek a szakaszok egybevágóak és végpontjaik egy téglalapot határoznak meg), vagy ha az egyik téglalap részhalmaza a másiknak. Az utóbbi esetben egyszerűen elhagyjuk a tartalmazott téglalapot (3. ábra).

A fenti eljárásokból következik, hogy bizonyosan nem fedünk le alakzathoz nem tartozó pontokat. Még kell azonban vizsgálnunk, hogy a kapott téglalapok az alakzat minden pontját tartalmazzák (lefedik)-e?

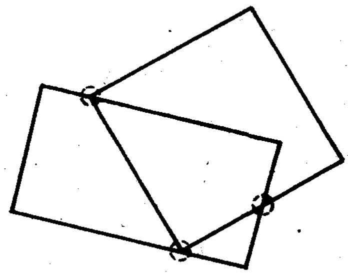
3. eljárás

Kiszámítjuk a fenti eljárások során nyert téglalapok oldalainak a többi téglalap oldalaival alkotott metszéspontjait és a kapott pontokat beillesztjük az egyes téglalapokat leíró rendezett ponthalmazokba. Ha két oldal részben vagy egészben egybeesik, nem veszünk figyelembe metszéspontot (4. ábra).

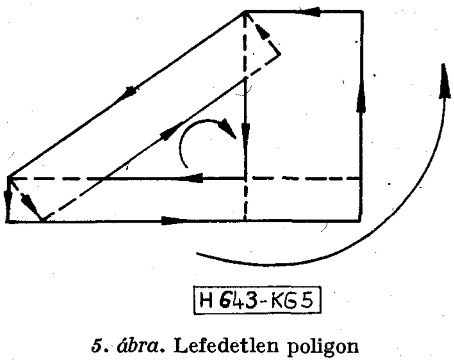
A továbbiakban az egyes pontokat összekötő szakaszokat vizsgáljuk.

Ha a téglalapok nem fedik le az alakzat minden pontját, a fenti szakaszok közül kiválaszthatjuk azokat az egymáshoz csatlakozó szakaszokat, amelyek a le nem fedett részek határoló oldalait alkotják. Ily módon egy vagy több poligonhoz juthatunk. Ha az egyes téglalapok körüljárási irányát az eredeti alakzat körüljárási irányával megegyezően vesszük fel, továbbá, ha a szakaszok képzésénél az adott egyenesdarabok irányítását megtartjuk, az egyes poligonokat fordított körüljárással kapjuk meg (5. ábra).

Az előbbieknek megfelelően csakis olyan metszéspontokat veszünk figyelembe, melyek révén keletkező



4. ábra. Téglalapok metszéspontjai



5. ábra. Lefedetlen poligon

szakaszok le nem fedett poligonok határoldalai lehetnek.

Könnyen belátható, hogy azok és csak azok a szakaszok nem határoldalai egy lefedetlen poligonnak, amelyekre az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

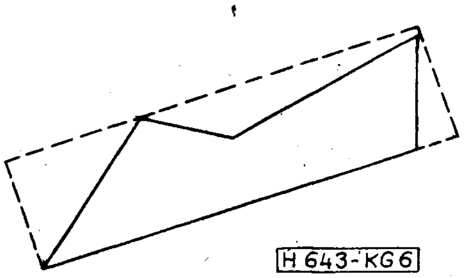
a) az adott szakasz az eredeti alakzat határvonalán fekszik, illetve egyik végpontja valamelyik határszakasz belső pontja,

b) van legalább két olyan téglalap, amely az adott szakaszt (belsejében vagy határvonalán) tartalmazza.

Kiválogatjuk azokat a szakaszokat, amelyekre a fenti feltételek egyike sem teljesül. Ha nem találunk ilyen szakaszt, a téglalapok teljes egészében lefedik az alakzatot. A kapott szakaszokat kezdő- és végpontjaik összehasonlításával, az egyes lefedetlen poligonoknak megfelelő, független ciklusokba rendezzük (5. ábra). Az 1. eljárásból következik, hogy a lefedetlen poligonok mindig egyszeresen összefüggőek.

4. eljárás

A kapott lefedetlen poligonokat külön-külön megpróbáljuk lefedni egyetlen befoglaló téglalappal [2]. A befoglaló téglalap egyik oldala a poligon valamelyik oldalegyenesére esik és minimális azon téglalapok között, amelyek a poligont tartalmazzák (6. ábra). Ha a poligont valamely oldalegyenese felbontja, természetesen nem ültethetünk rá befoglaló téglalapot.



6. ábra. Befoglaló téglalap

Ha a befoglaló téglalap túlnyúlik az eredeti alakzat határán, egy másik befoglaló téglalappal kísérletezünk. Kísérletezhetünk ortogonális állású befoglaló téglalappal is, melynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. Különösen szerencsés esetben a lefedetlen poligon maga egy téglalap.

5. eljárás

Ha nem találunk olyan befoglaló téglalapot, amely teljes egészében az eredeti alakzat belsejébe esik, az 1. eljáráshoz hasonló műveletet hajtunk végre. A művelet előtt a poligon körüljárását megfordítjuk.

A poligon minden egyes oldalára téglalapot illesztünk. A közös oldal irányítását megtartjuk, tehát a téglalap körüljárása megegyezik a poligonéval, ami más szóval azt jelenti, hogy a téglalap a poligonoldal belső partján fekszik. A téglalapok túlfedhetik a poligont, csak arra ügyelünk, hogy az eredeti alakzat határán ne nyúljanak túl.

6. eljárás

Az újonnan kapott téglalapokon végrehajtjuk a 2. eljárást.

7. eljárás

Megvizsgáljuk, hogy a kapott téglalapok lefedik-e a poligont. A 3. eljárást hajtjuk végre a poligonra szorítkozva. Ez azt jelenti, hogy mivel az új lefedetlen alakzatot a poligon belsejében keressük, csakis olyan metszéspontokat (illetve szakaszokat) veszünk figyelembe, amelyek a poligon be*l*sejébe esnek.

8. eljárás

Ha ismét találunk lefedetlen alakzatot, megismételjük a 4—7. eljárásokat.

Mivel a fenti eljárások során az újonnan kapott lefedetlen poligonok valódi részhalmazai a megelőző ciklusban kapott lefedetlen poligonoknak, a lefedetlen részek területe a ciklusok során szigorúan monoton csökken, tehát véges számú ciklus után találunk olyan befoglaló téglalapokat, amelyek teljes egészükben az eredeti alakzat belsejébe esnek. Az eljárásból következik, hogy már a második ciklus után nem kaphatunk olyan lefedetlen poligont, amelynek valamelyik csúcsa az eredeti alakzatnak is csúcsa.

Az algoritmus matematikai leírása

1. eljárás

A továbbiakban feltételezzük, hogy az alakzat csúcspontjainak koordinátái által adott, továbbá, hogy az egyes csúcspontok x és y koordinátái pozitív (az óramutató járásával ellentétes) körüljárási irány szerint követik egymást. Ez azt jelenti, hogy a körüljárási irány mentén haladva az alakzat határvonalán az alakzat belseje mindig a bal oldalra esik. A körüljárási irány megválasztása tetszőleges, de a továbbiakban ragaszkodni kell hozzá.

Az egyes csúcspontokat egy-egy vektor végpontjának tekinthetjük, így az alakzat *i*-edik oldalát a körüljárási irány szerint leíró vektor

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i, \tag{1}$$

ahol: $\mathbf{r}_i$ és $\mathbf{r}_{i+1}$ az alakzat sorrendben egymás után következő csúcspontjaiba mutató vektorok (7. ábra). (Az N csúcspontból álló alakzat $\mathbf{r}_{N+1}$ pontján $\mathbf{r}_1$-et értjük.)

Az *i*-edik oldal pontjait az

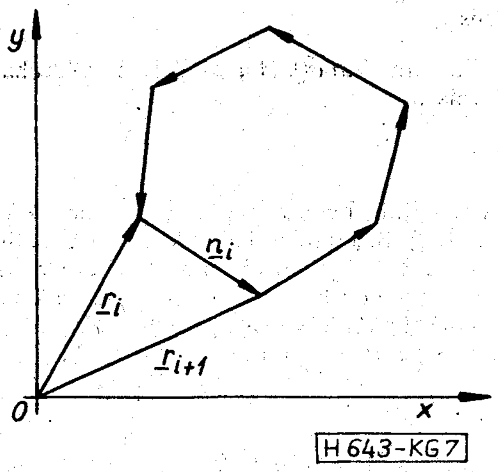
$$\mathbf{r}_i + c\mathbf{n}_i \qquad 0 \leqq c \leqq 1 \tag{1.2}$$

vektorok futják be, ahol c valós szám.

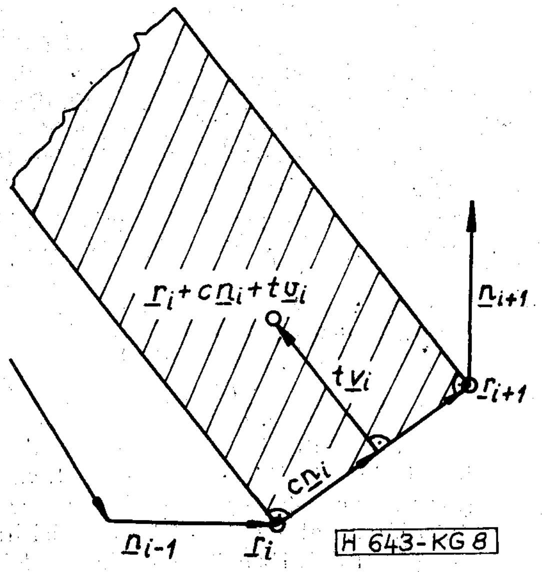
Ha $\mathbf{n}_i$ kooridinátái n_{ix} és n_{iy}, akkor egy az $\mathbf{n}_i$-re merőleges és az alakzat belseje felé mutató $\mathbf{v}_i$ vektor kooridnátái:

$$\begin{aligned} v_{ix} &= -n_{iy} \\ v_{iy} &= n_{ix} \end{aligned} \qquad (|\mathbf{n}_i| = |\mathbf{v}_i|). \tag{i.3}$$

Az $\mathbf{n}_i$ oldal végpontjaiban az oldal belső partjára állított merőleges félegyenesek által meghatározott



7. ábra



8. ábra

sáv pontjait (8. ábra) a következő kifejezés írja le:

$$\mathbf{r}_i+c\mathbf{n}_i+t\mathbf{v}_i \qquad t>0, \tag{1.4}$$

ahol t valós szám.
Az i-edik oldalra illesztendő, az előbbiekben ismertetett értelemben „maximális" téglalap a fenti sávban helyezkedik el, és egyik mérete az t-edik oldal hosszúsága. A téglalap másik méretét az i-edik oldalhoz legközelebb eső, a sávon belül levő határpont és az oldal távolsága adja.

Az alakzat $\mathbf{n}_j$ oldalát az

$$\mathbf{r}_j+k\mathbf{n}_j \quad \text{és} \quad 0\leq k\leq 1, \tag{1.5}$$

vektorok futják be, ahol k valós szám.

Ha az $\mathbf{n}_j$ oldal vagy annak egy része a fenti sávban helyezkedik el, akkor vannak olyan c, t, k számok, amelyekkel fennáll az

$$\mathbf{r}_i+c\mathbf{n}_i+t\mathbf{v}_i=\mathbf{r}_j+k\mathbf{n}_j, \tag{1.6}$$

egyenlőség és amelyekre teljesülnek á kirótt feltételek.
Szorozzuk meg (1.6)-ot skalárisan $\mathbf{n}_i$-vel, majd fejezzük ki c-t!

$$c(k)=\frac{\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{r}_j-\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{r}_i+\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j\cdot k}{\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_i}. \tag{1.7}$$

Szorozzuk meg (1.6)-ot vektorálisan $\mathbf{n}_j$-vel, majd fejezzük ki t-t!

$$t(k)=\frac{\mathbf{n}_i\times\mathbf{r}_j-\mathbf{n}_i\times\mathbf{r}_i+(\mathbf{n}_i\times\mathbf{n}_j)\cdot k}{\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_i}, \tag{1.8}$$

($(\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_i)$ nyilván sohasem zérus).

(1.7)-ből k-t kifejezve kapjuk:

$$k(c)=\frac{\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{r}_i-\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{r}_j+\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_i\cdot c}{\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j}, \tag{1.9}$$

(1.7), (1.8) és (1.9) alapján megvizsgálhatjuk $\mathbf{n}_j$ elhelyezkedését a sávhoz képest.

Ha $(\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j)=0$, tehát $\mathbf{n}_j$ párhuzamos a sávot határoló félegyenesekkel, akkor a számítások egyszerűsítése végett nem vizsgáljuk tovább $\mathbf{n}_j$-t. A szükséges információ megszerzéséhez az $\mathbf{n}_j$-hez csatlakozó oldalak vizsgálata is elegendő.

a) $\mathbf{n}_j$-nek nincs közös pontja a sávval, ha:

$$t(0)\leq 0 \quad \text{és} \quad t(1)\leq 0,$$

vagy

$$c(0)\leq 0 \quad \text{és} \quad c(1)\leq 0,$$

vagy

$$c(0)\geq 1 \quad \text{és} \quad c(1)\geq 1.$$

b) $\mathbf{n}_j$-nek minden pontja közös a sávval, ha:

$$t(0)>0 \quad \text{és} \quad t(1)>0,$$

és

$$0\leq c(0)\leq 1 \quad \text{és} \quad 0\leq c(1)\leq 1.$$

c) $\mathbf{n}_j$ metszi a sáv határát (vagy határait), ha:

$$t(0)>0 \quad \text{vagy} \quad t(1)>0,$$

és

$$0\leq k(0)\leq 1 \quad \text{vagy} \quad 0\leq (1)\leq 1.$$

Ha a *b)* eset teljesül, $t(0)$ és $t(1)$ közül a kisebbiket tároljuk.

Ha a *c)* eset teljesül, akkor a $k=0$, $k=1$, $k=k(0)$ és $k=k(1)$ értékek közül csak kettőnél teljesülnek egyidejűleg a c-re és t-re kirótt feltételek is. A megfelelő két t érték közül a kisebbiket tároljuk.

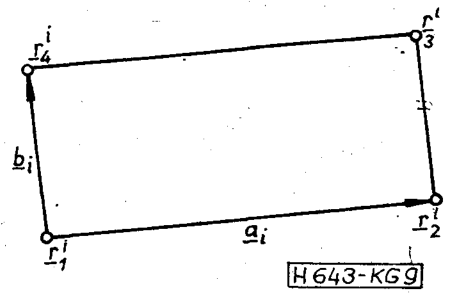
A fenti vizsgálatokat minden j-re elvégezzük (kivéve a $j=i-1$, $j=i$, $j=i+1$ értékeket, hiszen ezeket vizsgálni felesleges) és a kapott t értékek közül csak a legkisebbet tartjuk meg. Az i-edik oldalra illesztendő „maximális" téglalap csúcspontjai a körüljárási sorrendben:

$$\mathbf{r}_i;\ \mathbf{r}_{i+1};\ \mathbf{r}_{i+1}+t\mathbf{v}_i;\ \mathbf{r}_i+t\mathbf{v}_i, \tag{1.10}$$

ahol: t és $\mathbf{v}_i$ a fentiek alapján meghatározott. A fenti eljárást az alakzat minden oldalára végrehajtjuk.

2. eljárás

Páronként megvizsgáljuk az 1. eljárással kiszámított és csúcspontjaik helyvektorai által mégadott téglalapokat.



9. ábra

Legyen az i-edik és j-edik téglalap az

$$\begin{matrix} r^i_1;\ r^i_2;\ r^i_3;\ r^i_4, \\ r^j_1;\ r^j_2;\ r^j_3;\ r^j_4, \end{matrix} \tag{2.1}$$

helyvektorok által adott.

Azt is mondhatjuk, hogy egy-egy téglalapot az

$$a_i = r^i_2 - r^i_1;\quad b_i = r^i_4 - r^i_1, \tag{2.2}$$

vektorok feszítenek ki (9. ábra) (az 1. eljárás alapján $a_i = a_l$ és $b_l = t \cdot v_l$).

A téglalap területe:

$$T_i = a_i \times b_i = a_{ix} \cdot b_{iy} - a_{iy} \cdot b_{ix}. \tag{2.3}$$

Kiszámítjuk az i-edik és a j-edik téglalap területét és megvizsgáljuk, hogy a nagyobb területű téglalap tartalmazza-e a kisebb területűt. Ha igen, a kisebb területű téglalapot elhagyjuk.

Tegyük fel, hogy $T_i \geqq T_j$!

Az i-edik téglalap akkor és csak akkor tartalmazza a j-ediket, ha annak minden r_l csúcspontját tartalmazza ($l = 1, 2, 3, 4$).

Ez azt jelenti, hogy vannak olyan c és k valós számok, melyekre

$$c \cdot a_i + k \cdot b_i = r^j_l - r^i_1;\quad 0 \leqq c,\ k \leqq 1. \tag{2.4}$$

Szorozzuk meg (2.4)-et skalárisan a_i-vel és fejezzük ki c-t!

$$c = \frac{a_i \cdot r^j_l - a_i \cdot r^i_1}{a_i \cdot a_i}. \tag{2.5}$$

Szorozzuk meg (2.4)-et skalárisan b_i-vel és fejezzük ki k-t!

$$k = \frac{b_i \cdot r_l - b_i \cdot r^i_1}{b_i \cdot b_i}. \tag{2.6}$$

Ha valamelyik c_l-re vagy k_l-re nem teljesül a kirótt feltétel a j-edik téglalapot az i-edik nem tartalmazza.

Az i-edik és a j-edik téglalap egy téglalappá egyesíthető, ha a c_l-ek (vagy a k_l-ek) között nem fordul elő 0-tól vagy 1-től különböző szám, és a k_l-ek (vagy a c_l-ek) közül kettőre teljesül a kikötés. Ekkor a két téglalapot egyesítjük.

A csúcspontok meghatározása a következőképpen történik.

Ha az a két c_l (vagy k_l), amelyekre a kikötés nem teljesül negatív, a csúcspontok a körüljárási irány szerint:

$$r^j_{l_1};\ r^j_{l_2};\ r^i_2;\ r^i_3, \tag{2.7}$$

$$(\text{vagy}\quad r^j_{l_2};\ r^j_{l_1};\ r^i_3;\ r^i_4), \tag{2.8}$$

ahol: $l_1 < l_2$ azokhoz a pontokhoz tartozó indexek, amelyeknél a kikötés nem teljesült. (Kivétel: $l_1 = 4$; $l_2 = 1$.) Ha ez a két c_l (vagy k_l), amelyekre a kikötés nem teljesül pozitív, a csúcspontok a körüljárási irány szerint:

$$r^i_4;\ r^i_1;\ r^j_{l_1};\ r^j_{l_2}, \tag{2.9}$$

$$(\text{vagy}\quad r^i_1;\ r^i_2;\ r^j_{l_1};\ r^j_{l_2}), \tag{2.10}$$

ahol: $l_1 < l_2$ azokhoz a pontokhoz tartozó indexek, amelyeknél a kikötés nem teljesült. (Kivétel: $l_1 = 4$; $l_2 = 1$.) A fenti eljárást minden i-re, illetve egy-egy rögzített i-nél minden $j > i$-re el kell végezni.

3. eljárás

Legyenek az i-edik téglap csúcspontjai a körüljárási irány szerint az

$$r^i_1;\ r^i_2;\ r^i_3;\ r^i_4, \tag{3.1}$$

vektorok által adottak. Ekkor a téglalap l-edik oldalát leíró vektor

$$n^i_l = r^i_{l+1} - r^i_l. \tag{3.2}$$

Ha az i-edig téglap l-edik oldalának és a j-edik téglalap m-edik oldalának van metszéspontja, akkor vannak olyan c és k valós számok, melyekkel

$$r^i_l + c \cdot n^i_l = r^j_m + k \cdot n^j_m;\quad 0 < c,\ k < 1. \tag{3.3}$$

Szorozzuk meg (3.3)-at vektorálisan n^j_m-mel és fejezzük ki c-t!

$$c = \frac{(r^j_m \times n^j_m) - (r^i_l \times n^j_m)}{n^i_l \times n^j_m}. \tag{3.4}$$

Szorozzuk meg (3.3)-at vektorálisan n^i_l-lel és fejezzük ki k-t!

$$k = \frac{(r^j_m \times n^i_l) - (r^i_l \times n^i_l)}{n^i_l \times n^j_m}. \tag{3.5}$$

(3.4) és (3.5) nevezőjében álló $(n^i_l \times n^j_m)$ formálisan egy vektor, valójában az $(n^i_{lx} \cdot n^j_{my} - n^i_{ly} \cdot n^j_{mx})$ kifejezés rövidített írásmódja. Hasonló vonatkozik a számlálóra is. Ha $n^i_l \times n^j_m = 0$ ez azt jelenti, hogy a két oldal párhuzamos vagy egy egyenesbe esik; ekkor nem veszünk figyelembe metszéspontot. Kiszámítjuk c és k értékét, majd megvizsgáljuk, hogy mindkettő 0 és 1 közé esik-e. Ha igen, kiszámítjuk a metszéspontot pl. (3.3) bal oldala alapján. Ha $c = 1$ és $0 < k < 1$, vagy $k = 1$ és $0 < c < 1$), akkor csak $(n^i_l \times n^j_m) < 0$ (vagy $(n^i_l \times n^j_m) > 0$) esetén veszünk figyelembe metszéspontot. Hasonlóan ha $c = 0$ és $0 < k < 1$ (vagy $k = 0$ és $0 < c < 1$), akkor csak $(n^i_l \times n^j_m) > 0$ (vagy $(n^i_l \times n^j_m) < 0$) esetén veszünk figyelembe metszéspontot.

A továbbiakban a téglalapok egyes oldalait különálló szakaszoknak tekintjük, amelyek kezdő- és végpontjaik által adottak. A kezdő- és végpontok megkülönböztetésével a szakaszok irányítását is rögzítettük. Ha két szakasz metszi egymást, a metszéspontot beszúrjuk a kezdő- és végpontok közé, ezáltal új szakaszok jönnek létre. A fenti műveleteket minden szakaszpárra el kell végezni, beleértve az eljárás során létrejövő új szakaszokat is! A kapott szakaszok közül kizárjuk azokat, amelyek nem lehetnek le nem fedett poligonok határoldalai.

a) Legyenek az eredeti alakzat *i*-edik oldalának végpontjai r_i és r_{i+1} továbbá a vizsgált szakasz végpontjai r_1 és r_2. A vizsgált szakaszt kizárjuk, ha a következő feltételek teljesülnek:

$$(r_{i+1}-r_i)\times(r_2-r_1)=0, \tag{3.6}$$

és

$$(r_{i+1}-r_i)\times(r_{i+1}-r_2)=0, \tag{3.7}$$

és

$$(r_{i+1}-r_2)\cdot(r_i-r_2)\leqq 0, \tag{3.8}$$

és

$$(r_{i+1}-r_1)\cdot(r_i-r_1)\leqq 0, \tag{3.9}$$

tehát ha a szakasz az alakzat határvonalán fekszik, továbbá ha:

$$(r_{i+1}-r_i)\times(r_{i+1}-r_2)=0; \quad (r_2\neq r_{i+1}), \tag{3.10}$$

vagy

$$(r_{i+1}-r_i)\times(r_{i+1}-r_i)=0; \quad (r_1\neq r_{i+1}), \tag{3.11}$$

vagyis ha a szakasz valamelyik végpontja az alakzat határvonalára esik. A vizsgálatot az eredeti alakzat minden oldalára el kell végezni.

b) Egy téglalap tartalmaz egy szakaszt, ha annak mindkét végpontját tartalmazza. Az *a)* vizsgálat végrehajtása után megmaradó szakaszok közül kizárjuk azokat, amelyeket legalább két téglalap tartalmaz. A 2. eljárásban leírt módszer segítségével megvizsgáljuk, hogy egy adott szakasz végpontjait egy-egy téglalap tartalmazza-e. Ha már két ilyen téglalapot találtunk, a vizsgálatot az adott szakaszra nem kell folytatni.

Az *a)* és *b)* viszgálatok után megmaradó szakaszok közül ki kell válogatni azokat a szakaszokat, amelyek ugyanannak a lefedetlen poligonnak a határoldalai és ezeket a körüljárási irány szerint sorba kell rendezni. Az eljárás a következő:

Kiválasztunk egy szakaszt és a többi közül kikeressük azt a másik szakaszt, amelyiknek a kezdőpontja megegyezik a kiválasztott szakasz végpontjával. A műveletet addig folytatjuk, amíg az egyik kikeresett szakasz végpontja meg nem egyezik a kiválasztott szakasz kezdőpontjával. Végül a kapott poligon körüljárási irányát megfordítjuk. A fenti eljárást addig ismételjük, amíg az összes szakaszt fel nem használtuk, azaz az összes lefedetlen poligont meg nem kaptuk.

Ha az előzőek során egy szakaszt többször is megkaptunk, a poligonok képzésénél csak egyszer veszszük figyelembe.

4. eljárás

Legyen a lefedetlen poligon *i*-edik oldalának két végpontja r_i és r_{i+1}.

A poligon *i*-edik oldalára csak akkor fektethetünk befoglaló téglalapot, ha a poligon minden csúcsa az oldalegyenesnek ugyanarra a partjára esik (6. ábra). Teljesülnie kell tehát a következő feltételnek:

$$(r_{i+1}-r_i)\times(r_j-r_i)\geqq 0, \tag{4.1}$$

minden *j*-re.

Legyen

$$n_i=r_{i+1}-r_i. \tag{4.2}$$

Ha valamelyik oldalra teljesül a (4.1) feltétel minden *j*-re kiszámítjuk az

$$m_j=n_i\times(r_j-r_i), \tag{4.3}$$

mennyiséget és ezek közül a legnagyobbat tároljuk, majd minden *j*-re kiszámítjuk az

$$s_j=n_i\cdot(r_j-r_i), \tag{4.4}$$

mennyiséget és ezek közül a legnagyobbat és a legkisebbet tároljuk.

A befoglaló téglalap csúcspontjainak helyvektorai (körüljárási irány szerint):

$$r_i+\frac{s_{j\,min}}{n_i\cdot n_i}\cdot n_i; \quad r_i+\frac{s_{j\,max}}{n_i\cdot n_i}\cdot n_i,$$

$$r_i+\frac{s_{j\,min}}{n_i\cdot n_i}\cdot n_i+\frac{m_j}{n_i\cdot n_i}\cdot n_i^*; \quad r_i+\frac{s_{j\,max}}{n_i\cdot n_i}\cdot n_i+\frac{m_j}{n_i\cdot n_i}\cdot n_i^*, \tag{4.5}$$

ahol:

$$n_i^*=(-n_{iy};\ n_{ix}),$$

(n_{ix} és n_{iy} az n_i vektor koordinátái).

Miután kiszámítottuk a befoglaló téglalapot meg kell vizsgálnunk, hogy a kapott téglalap nem nyúlik-e túl az eredeti alakzat határán. Ha a befoglaló téglalap egyik oldala metszi az eredeti alakzat valamelyik oldalát, a téglalap túlnyúlik az alakzat határán. Ezt a vizsgálatot a 3. eljárásban leírt módszerrel végezzük.

Ha a befoglaló téglalap túlnyúlik az alakzaton, akkor a lefedetlen poligon másik oldalára próbálunk befoglaló téglalapot illeszteni.

Az ortogonális állású befoglaló téglalap csúcspontjainak koordinátái (körüljárási irány szerint):

$$(x_{min};\ y_{min});\ (x_{max};\ y_{min});\ (x_{max};\ y_{max});\ (x_{min};\ y_{max}), \tag{4.7}$$

ahol: x_{min}, y_{max} stb. a lefedetlen poligon csúcspontjai koordinátáinak minimális, illetve maximális értékei.

5. eljárás

Az 5. eljárás az 1. eljárástól mindössze abban különbözik, hogy itt n_i helyébe a lefedetlen poligon egyes oldalait, n_j helyébe pedig az eredeti alakzat összes oldalát helyettesítjük.

6. eljárás

A 6. eljárás a 2. változtatás nélküli végrehajtása az újonnan kapott téglalapokra.

7. eljárás

A 7. eljárás során a 3. eljárásban megadott módszerrel felderítjük a metszéspontokat, illetve a szakaszokat. A továbbiakban eltekintünk azoktól a szakaszoktól, amelyekre a 3. eljárás *a)* vagy *b)* feltétele teljesül, valamint azoktól, amelyekre az alábbi c) feltétel teljesül:

c) a szakasz egyik (vagy mindkét) végpontja a lefedetlen poligonon kívül esik.

Azt, hogy egy p-pont a (pozitív körüljárású) r_1, $r_2, \ldots, r_N$ poligonhoz képest külső pont-e vagy sem, a következőképpen döntjük el. Kiválasztjuk a poligonnak a ponthoz legközelebb eső oldalát. Ha a pont az oldal (körüljárási irány szerinti) külső partján fekszik, akkor külső, egyébként belső vagy határpont.

Legyen

$$n_i = r_{i+1} - r_i \tag{7.1}$$

a poligon *i*-edik oldala.

Ha teljesül az

$$n_i \cdot (p - r_i) \geqq 0, \tag{7.2}$$

és

$$n_i \cdot (p - r_{i+1}) \leqq 0, \tag{7.3}$$

feltétel, tehát a pontból az oldalegyenesre bocsátott merőleges talppontja az oldal belső pontja, akkor kiszámítjuk és tároljuk a

$$t_i = \left| \frac{n_i \times (p - r_i)}{n_i \cdot n_i} \cdot n_i \right|, \tag{7.4}$$

mennyiséget. Ez a p pont távolsága az *i*-edik oldaltól.

Jelöljük n_j-vel a minimális t_j-hez tartozó oldalt! Ekkor

$$n_j \times (p - r_j) < 0, \tag{7.5}$$

$$n_j \times (p - r_j) > 0, \tag{7.6}$$

$$n_j \times (p - r_j) = 0, \tag{7.7}$$

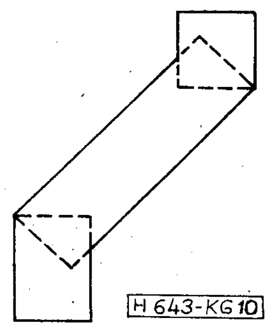
esetén a p pont rendre külső, belső, illetve határpont.

8. eljárás

A 4—7. eljárásokat minden lefedetlen poligonra végrehajtjuk (beleértve az esetleg újonnan keletkezőket is) addig, míg végül nem keletkezik új lefedetlen poligon, illetve az egyetlen befoglaló téglalappal lefedhető.

Összefoglalás

Az ismertetett algoritmus egyedül azt tételezi fel a lefedendő alakzatokról (közönséges poligon), hogy azok teljesítik a bevezetőben a szögekre kirótt korlátozó feltételt. Ezek szerint tehát többszörösen összefüggő alakzatok előfordulását is megengedtük, ami azt jelenti, hogy az alakzatokat és azok ún. „kifordított képét" egyaránt kezelni tudjuk. Egy alakzat „kifordításánál" mindössze az eredeti körüljárási irányokat kell megfordítani; ezáltal az alakzat „belsejéből" az alakzat „külseje" lesz és viszont.



10. ábra. Az 1. ábrán látható alakzat lefedése a dolgozatban ismertetett eljárással

Mivel az algoritmus alapján működő számítógépi program egy nagyobb adatelőkészítő programrendszer részét képezi, szükséges, hogy a számítógép automatikusan ellenőrizze a szögkritérium teljesülését. Erre alkalmas a következő egyszerű vizsgálat.

Ha az $r_1, r_2, \ldots, r_N$ csúcspontokkal rendelkező poligon *i*-edik csúcspontjában találkozó $n_{i-1} = r_i - r_{i-1}$ és $n_i = r_{i+1} - r_i$ oldalvektorokra

$$n_i \cdot n_{i+1} < 0,$$

és

$$n_i \times n_{i-1} < 0,$$

akkor az *i*-edik csúcspontnál levő szög hegyesszög. A vizsgálatot minden *i*-re el kell végezni. További egyszerű vizsgálatokkal (pl. az alakzat határvonala zártságának vizsgálata) elvégezhetjük a digitalizálás számítógépi ellenőrzését is. A téglalapfelbontás ellenőrzése történhet a kapott téglalapok egyesítése kontúrvonalának kiszámításával (esetleg felrajzolásával) és összehasonlításával az eredeti alakzat határvonalával (10. ábra).

Összehasonlítva az 1. és a 10. ábrát láthatjuk, hogy az ismertetett algoritmus a gyakorlatban legsűrűbben előforduló esetekben optimális (minimális számú téglalap) megoldást nyújt.

Az integrált áramköri maszkokon időnként előfordulnak olyan alakzatok is, amelyek tartalmaznak hegyesszögeket is vagy görbeszakaszokat. Az ilyen alakzatok leképzése csak közelítőleg lehetséges. Tekintettel arra, hogy ezek az alakzátok rendszerint speciális célokat szolgálnak (tesztábrák stb.), közelítő lefedésükre nem érdemes általános algoritmust kidolgozni, inkább az a célszerű, ha ezeket az alakzatokat egyedileg kezeljük az általuk elérni kívánt későbbi hatás vagy eredmény szempontjait figyelembe véve.

IRODALOM

[1] *Feketéné Losonczi Sarolta:* Számítógéppel segített integrált áramköri maszk felbontó programrendszer pattern generátor vezérlésére. Átminősítő dolgozat. HIKI 1977.

[2] *Michael Adamowicz—Antonio Albano:* Nesting two dimensional shapes in rectangular modules. Computer Aided Design, *8.* k. 1. sz. 1976. pp. 27—33.