

# Távvezeték-hálózatok topológiai analízise

ETO 621.311.1.015.516:1

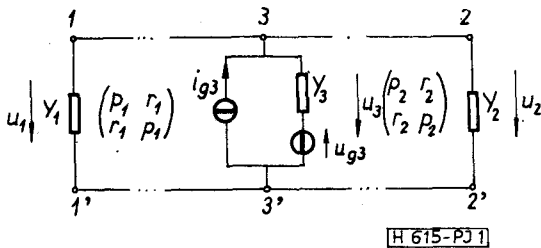
Tekintsünk egy távvezeték-szakaszokból és koncentrált elemű kétpólusokból összekapcsolt távvezeték-hálózatot [4]. Tartalmazzon a hálózat  $b$  számú távvezeték-szakaszt, amelyek  $n$  számú csúcsban csatlakoznak egymáshoz. Legyen az  $i$ -edik távvezeték-szakasz admittancia paraméter mátrixa:

$$\begin{pmatrix} p_i & r_i \\ r_i & p_i \end{pmatrix},$$

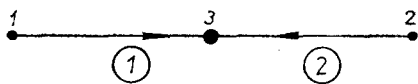
amelynek elemeire érvényes:

$$p_i = y_{oi} \operatorname{cth} \gamma_i l_i, \text{ és} \\ r_i = -y_{oi} \frac{1}{\operatorname{sh}_i \gamma_i l_i},$$

ahol  $y_{oi}$  az  $i$ -edik szakasz hullámadmittanciája,  $\gamma_i$  a terjedési együtthatója,  $l_i$  pedig a hosszúsága. A távvezeték-hálózat csúcsában két csomópont közé csatlakozó kétpólust a szokásos helyettesítő képpel vegyük fel, mégpedig a  $j$ -edik csúcsához kapcsolódó kétpólus admittanciája legyen  $Y_j$ , a vele sorosan kapcsolt forrásfeszültsége  $u_{gj}$ , párhuzamosan kapcsolt forrásárama  $i_{gj}$ . Az 1. ábrán látható egy konkrét távvezeték-hálózat képe  $b=2$  és  $n=3$  esetben, a megfelelő jelölésekkel együtt, a 2. ábra pedig szemlélteti a konkrét távvezeték-hálózat szokásos, tetszőlegesen irányított hálózatgráfját.



1. ábra



2. ábra

Tegyük fel, hogy a távvezeték-hálózat egyetlen csúcsa sincs rövidre zárva; jelöljük a hálózat  $j$ -edik csúcsának csomópontjai között fellépő feszültséget  $u_j$ -vel (az 1. ábrán látható irányítás megállapodás mellett), továbbá legyen  $U$  a csúcsfeszültségek  $n$  méretű oszlopvektora. Amennyiben  $\det(Y_c + Y_g) \neq 0$ , úgy érvényes [4]:

$$U = (Y_c + Y_g)^{-1} (Y_g U_g + I_g), \quad (1)$$

ahol  $Y_g$  a csúcsokhoz csatlakozó koncentrált passzív kétpólusok admittanciájából alkotott ( $n$  méretű) diagonál mátrix,  $U_g$  és  $I_g$  a forrásfeszültségek és forrásáramok  $n$  méretű oszlopvektora,  $Y_c$  pedig a távvezeték-hálózat csúcsadmittancia mátrixa.

Legyen  $P = \langle p_1, \dots, p_b \rangle$  és  $R = \langle r_1, \dots, r_b \rangle$  a távvezeték-szakaszok admittancia paramétereiből alkotott diagonálmátrix,  $A_i$  az irányított,  $A_{i0}$  pedig az irányítatlan távvezeték (nem redukált) hálózatgráf csúcsadmittancia mátrixa, akkor fennáll [4]:

$$Y_c = \frac{1}{2} A_{i0} (P + R) A_{i0}^* + \frac{1}{2} A_i (P - R) A_i^*, \quad (2)$$

ahol a felső pozícióba írt „+” a transzponálás jele. Amennyiben ismert a hálózat topológiája (gráfja), a csúcsokhoz csatolt kétpólus admittanciák a meghajtó generátorokkal együtt, valamint a távvezeték-szakaszok admittancia paramétereit, úgy (2) felhasználásával (1)-ből meghatározható a hálózat minden egyes csúcsának feszültsége. (1) formula alkalmazása számítástechnikailag mátrix invertálást kíván, azaz determinánsok és adjungált al-determinánsok értékének meghatározását.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a távvezeték-hálózat csúcsfeszültségeinek számítása másképpen is lehetséges. Nevezetesen minden, a szóban forgó távvezeték-hálózatához megadható egy olyan, tisztán passzív elemekből és meghajtó generátorokból felépíthető kapcsolás, másképpen helyettesítő modell, amelyben az eredeti kapcsolás csúcsfeszültségei az új kapcsolás csomóponti potenciáljaival rendre megegyeznek. A helyettesítő modell csomóponti potenciáljainak meghatározására topológiai formula írható fel, így lehetségessé válik a távvezeték-hálózat csomóponti feszültségeinek topológiai módszerrel történő meghatározása.

## A távvezeték-hálózat koncentrált elemű modellje

Jelöljük a távvezeték-hálózat csúcsait az  $1, \dots, n$  természetes számokkal. Rendeljük hozzá a hálózat-hoz azt a koncentrált elemű modellt, amelyet az eredeti hálózatból úgy nyerünk, hogy az  $i$ -edik távvezeték-szakaszt olyan  $\pi$ -taggal cseréljük fel, amelynek hosszági admittanciája  $-r_i$ , a keresztági admittanciák pedig  $p_i + r_i$  értékűek. E helyettesítő  $\pi$ -tagnak paraméter admittancia mátrixa triviálisan megegyezik az  $i$ -edik szakasz paraméter admittancia mátrixával [1]. A helyettesítéskor ügyeljünk arra, hogy az ugyanabban a csúcsban csatlakozó távvezeték-szakaszok helyettesítő  $\pi$ -tagjai átmenő földje közös ponthoz csatlakozzék.

A hálózatmodellre teljesülnek a következők:

1. A modell  $n+1$  pontú, gyakran létrakapcsolás.

2. A  $j$ -edik csúcspont-hoz csatlakozó keresztági admittanciák összevonhatók egy

$$s_j = \sum_k (p_k + r_k) \quad (3)$$

admittanciájú kétpóhússá, ahol az összegezés mindazon  $k$  indexekre kiterjesztendő, amely indexű távvezetékszakaszok az eredeti hálózat  $j$ -edik pontjára csatlakoznak.

Állapodjunk meg abban, hogy a hálózatmodell 1, ...,  $n$  pontjai rendre feleljenek meg a távvezeték-hálózat azonos számozású pontjainak; a közös átmenő földvezetékek csatlakozási pontja számozása legyen  $n+1$ , és tekintsük  $e$  pontot a modell referencia pontjának.

A távvezeték-hálózat-hoz rendelt passzív hálózatmodell konstrukcióját a 3. ábrán szemléltetjük. E modell éppen az 1. ábrán látható távvezeték-hálózat-hoz rendelt modell. Az ábrán  $v_i$ -vel jelöltük a modell  $i$ -edik pontjához tartozó, a referencia pontra vonatkoztatott csomóponti potenciálját ( $i=1, 2, 3$ ). Ugyancsak az ábrán látható a hálózatmodell gráfja is.

Most megmutatjuk, hogy a hálózatmodell csomóponti feszültségei a távvezeték-hálózat csúcspont-feszültségeivel rendre megegyeznek.

A távvezeték-hálózat-modell csomóponti egyenlet-rendszere [3]:

$$V = Y^{-1}A(Y_g U_g + I_g), \quad (4)$$

ahol  $V$  a csomóponti potenciálok vektora,  $Y$  a hálózatmodell csúcspont admittancia mátrixa,  $A$  a (redukált) incidencia mátrixa,  $Y_g$  a passzív elemek admittancia diagonál mátrixa,  $U_g$  és  $I_g$  pedig a passzív ágak forrásfeszültségeiből, ill. forrásáramaiból alkotott oszlopvektorok. Megjegyezzük, hogy a hálózatmodell passzív elemeinek száma  $(b+2n)$ .

Először tekintsük a modell csúcspont admittancia mátrixát. Ennek kiszámításához a modell hálózatgráfját irányítsuk a következőképpen:

A  $-r_i$  admittanciájú passzív él irányítása egyezzen meg a megfelelő távvezeték-hálózat gráfjéi irányításával. Minden további passzív él irányítása a modellben a referencia pont felé mutasson (3. ábra). Állapodjunk meg továbbá abban, hogy a modell redukált incidencia mátrixának felírásakor a mátrix első  $b$  oszlopába a  $-r_i$  admittanciájú éleket rögzítjük, a további  $n$  számú oszlopban feltüntetjük rendre

az  $s_j$  admittanciájú, végül ismét  $n$  számú oszlopban az  $Y_j$  admittanciájú élek illeszkedését. Akkor egyrészt írható:

$$A = [A_i \ 1 \ 1], \quad (5)$$

másrészt a hálózatmodell passzív él admittancia mátrixa:

$$T = \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & Y_g \end{bmatrix} \quad (6)$$

ahol  $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle, 1$ , ill.  $0$  pedig az  $n$  méretű egység, ill. nullmátrix jelölésére szolgál.

Az irodalomból ismeretes [3]:

$$Y = A T A^+ \quad (7)$$

(7)-ből (5) és (6) figyelembevételével:

$$Y = [A_i \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & Y_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i^+ \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = [-A_i R \ S \ Y_g] \begin{bmatrix} A_i^+ \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -A_i R A^+ + S + Y_g. \quad (8)$$

Egyszerű számítással kapjuk, hogy:

$$S = \frac{1}{2} A_i P A_i^+ + \frac{1}{2} A_{i0} P A_{i0}^+ + \frac{1}{2} A_i R A_i^+ + \frac{1}{2} A_{i0} R A_{i0}^+, \quad (9)$$

így figyelembe véve (2)-t, (8) és (9) felhasználásával némi számolás után adódik:

$$\{Y = Y_c + Y_g \quad (10)$$

A feltétel folytán  $\det(Y) \neq 0$ , így valóban létezik  $Y^{-1}$ .

Másodszor tekintsük (4) jobb oldalából  $Y^{-1}$  szorzóját.

Írhatjuk:

$$A(Y_g U_g + I_g) = [A_i \ 1 \ 1] \left( \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & Y_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_g \end{bmatrix} \right), \quad (11)$$

ahol  $0$  megfelelő  $b$ , ill.  $n$  méretű nullvektor jele.

(11) jobb oldala így is írható:

$$[A_i \ 1 \ 1] \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_g U_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_g \end{bmatrix} \right),$$

majd a szorzás elvégzése után nyerjük:

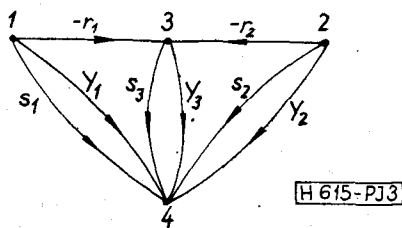
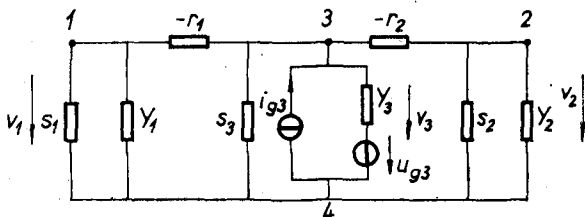
$$A(Y_g U_g + I_g) = Y_g U_g + I_g. \quad (12)$$

(10)-et és (12)-t összevetve (4)-gyel és (1)-gyel az állítást igazoltuk.

A későbbiek során a helyettesítő modellnek most bebizonyított tulajdonságát ebben az alakban fogjuk használni:

$$U = Y^{-1}(Y_g U_g + I_g) \quad (13)$$

(10) lényegében az (1) formula átírt alakja. Benne a helyettesítő modellből csupán a csomóponti admittancia mátrix szerepel.



3. ábra

H 615-PJ3

Topológiai formula a csúcsheszültségek számításához

Írjuk ki (13)-at részletesen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{Y})} \begin{pmatrix} \text{adj } Y_{11} & \dots & \text{adj } Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{adj } Y_{n1} & \dots & \text{adj } Y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 u_{g1} + i_{g1} \\ \vdots \\ Y_n u_{gn} + i_{gn} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

ahol  $\det(\mathbf{Y})$  a csomóponti determináns,  $\text{adj } Y_{kj}$  pedig a csomóponti determináns  $k$ -adik sor és  $j$ -edik oszlop metszésében található eleméhez rendelt adjungált al-determináns értékét jelöli.

(14)-ből adódik a csúcsheszültség számításának következő formulája:

$$u_j = \frac{1}{\det(\mathbf{Y})} \sum_{k=1}^n \text{adj } Y_{kj} (Y_k u_{gk} + i_{gk}) \quad (15)$$

A (3) irodalomból ismeretes, hogy

$$\det(\mathbf{Y}) = \sum F, \text{ és } \text{adj } Y_{kj} = \sum F_{kj,n+1}^2, \quad (16)$$

ahol  $F$  a hálózatmodell egy kifizető fája alapján képzett éladmittancia szorzat,  $F_{kj,n+1}^2$  pedig olyan 2-fa éladmittancia szorzat, amely a hálózatgráf  $k$  és  $j$  pontját elválasztja az  $n+1$  ponttól (azaz külön komponensekben tartalmazza), és az összegzés az összes szóban forgó fákra, ill. 2-fákra értendő. Így nyertük a távvezeték-hálózat csúcsheszültségeinek számítására a következő topológiai formulát:

$$u_j = \frac{1}{\sum F} \sum_{k=1}^n (Y_k u_{gk} + i_{gk}) \sum F_{kj,n+1}^2, \quad j=1, \dots, n. \quad (17)$$

A 4. ábrán látható egy, a (13) formula alapján  $u_j$  feszültségek számítására alkalmas részletes blokk-séma, ami számítógépes program írására is felhasználható. Megjegyezzük, hogy a fák és 2-fák előállítására jól felhasználható a [2] irodalomban említett  $k$ -fa generáló módszer. E módszerrel szerkesztett program triviálisan rendelkezik a számítástechnikai előnyökkel, amelyekkel a fageneráló módszer is rendelkezett.

Alkalmazás

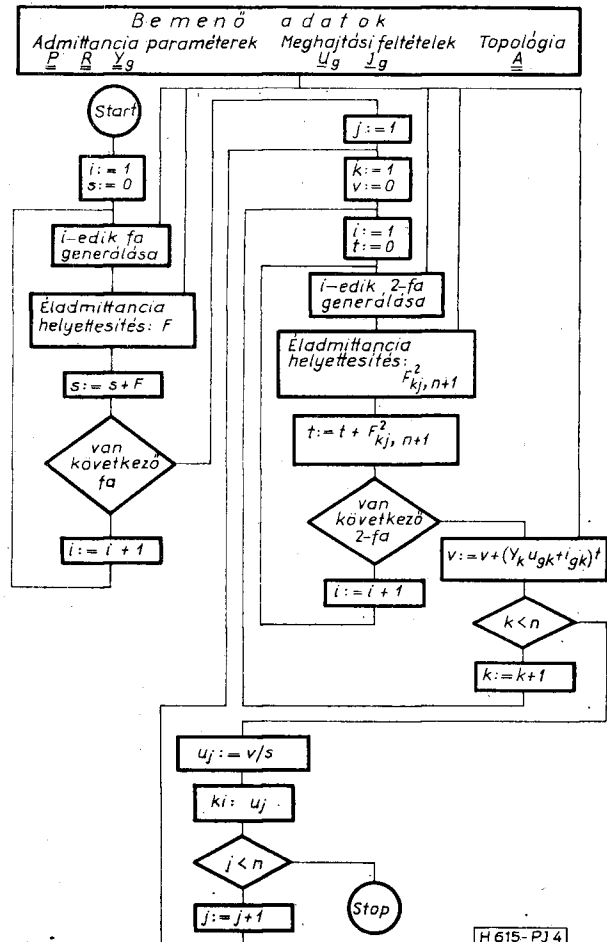
1. Tekintsük az 5. ábrán látható távvezeték-hálózatot, amely egyetlen forrásáram generátor jelét  $n$  különböző paraméterű, passzív kétpólussal lezárt távvezeték szakaszon osztja szét. Feladatunk tűzzük ki a  $j$ -edik távvezeték szakasz lezárásán fellépő  $u_j$  feszültség topológiai formulával történő meghatározását. A távvezeték-hálózat kapcsolási rajza az 5. ábrán látható, mellette található a hálózat szokásos gráfja. A 6. ábra a távvezeték-hálózat modelljét tünteti fel, és megadja annak egy ekvivalens átalakítását. Elemi megfontolással nyerhető, hogy a hálózatmodell ekvivalens képében szereplő  $Y$  admittanciára érvényes:

$$Y = s_0 + Y_0 + \sum_{i \neq j}^n (-r_i) \times (s_i + Y_i), \quad (18)$$

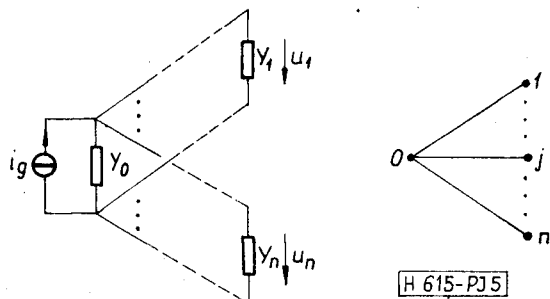
ahol „ $\times$ ” a replusz művelet jele.

A 7. ábrán látható a hálózatmodell ekvivalens képének gráfja. A keresett  $u_j$  nyilván a modell  $j$ -edik pontjának csomóponti potenciálja a  $0'$  referenciapontra vonatkoztatva. (17) topológiai formulát alkalmazva:

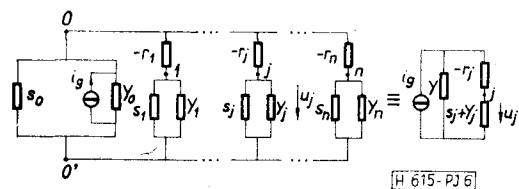
$$u_j = \frac{1}{\sum F} i_g \cdot \sum F_{0j,0'}^2, \quad (19)$$



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Jelen esetben mind  $\sum F$ , mind  $\sum F_{0',0}^2$ , a 7. ábrából közvetlenül felírható:

$$\sum F = (-r_j + s_j + Y_j)Y + (-r_j)(s_j + Y_j), \text{ és} \quad \sum F_{0',0}^2 = -r_j \quad (20)$$

így (19)-ből (20) és (18) figyelembevételével, némi számolás után nyerhető:

$$u_j = \frac{-r_j i_g}{(p_j + Y_j) \left( s_0 + Y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{-r_i(s_i + Y_i)}{p_i + Y_i} \right) - r_j(s_j + Y_j)} \quad (21)$$

(21) formulát egy kissé átalakítjuk.  $(p_j + Y_j)$ -vei való egyszerűsítés után a nevező utolsó tagja beolvasztható az összegzésbe:

$$u_j = - \left( s_0 + Y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{-r_i(s_i + Y_i)}{p_i + Y_i} \right)^{-1} \cdot \frac{r_j i_g}{p_j + Y_j} \quad (22)$$

(22) első tényezője  $j$  választásától független, így a távvezeték-hálózatra jellemző mennyiség.

A kitűzött feladat megoldására nyertünk:

$$u_j = A \cdot \frac{r_j}{p_j + Y_j} \cdot i, \text{ ahol } A = - \left( s_0 + Y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{r_i(s_i + Y_i)}{p_i + Y_i} \right)^{-1} \quad (23)$$

(23) formulát le lehetett volna vezetni hagyományos úton is (1) felhasználásával, de ez az út most sokkal körülményesebb lett volna. A helyettesítő modellből elemi úton is számolhattunk volna, de a topológiai módszer alkalmazása kényelmesebb és könnyebb.

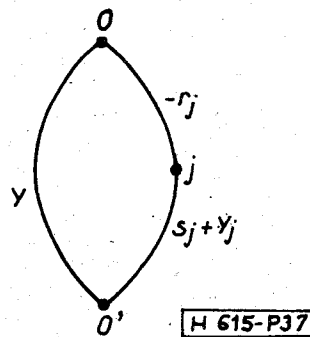
A kapott eredményt felhasználhatjuk annak a felételnek a meghatározására, amelynek ahhoz kell teljesülnie, hogy a távvezeték-hálózat két különböző lezárásán a csúcsfeszültségek megegyeznek.

Tekintsük ugyanis az  $i$  és  $j$  csúcsot ahol,  $i \neq j$ , és tételezzük fel, hogy  $u_i = u_j$ . Ekkor (23) alkalmazásával kapjuk, hogy:

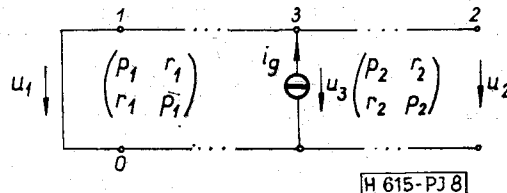
$$\frac{r_i}{r_j} = \frac{p_i + Y_i}{p_j + Y_j}, \quad (24)$$

amely az  $i$  és  $j$  távvezeték szakaszok paramétereire és a lezáró admittanciákra vonatkozó feltétel. Azonos hullámimpedanciájú, terjedési együtthatójú, de különböző hosszúságú távvezeték szakaszok esetén (24) megadja az egyenlő csúcsfeszültségek biztosításának a lezáró admittanciákra vonatkoztatott feltételét.

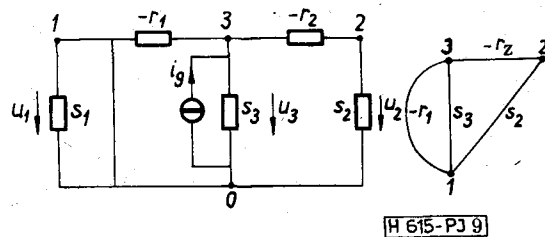
2. Második példaként tekintünk a 8. ábrán látható, rövidzár- és szakadáslezárásokat egyaránt tartalmazó, azaz vegyes extrém lezárású távvezeték-hálózatot, amely lényegében véve az 1. ábrán látható kapcsolat egy speciális esete. Számítsuk ki topológiai módszerrel a hálózat csúcsfeszültségeit. A kapcsolatban szereplő szakadás nem okoz problémát, ugyanis annak admittanciája véges (zérus), de a rövidzár lezárás miatt (17) közvetlenül nem alkalmazható. Alkossuk meg azonban a hálózatmodellét most úgy, hogy vegyük figyelembe az 1 és a 0 pont közötti rövidzárát. Ez azt eredményezi, hogy az 1 és a 0 pont össze van kötve. Ezért egyrészt  $u_1 = 0$ , másrészt a



7. ábra



8. ábra



9. ábra

modellből az  $s_1$  admittancia törölhető. A viszonyokat a 9. ábrán szemléltetjük, és ugyanott látható az így megszerkesztett hálózatmodell gráfja is. Erre a modellre (17) már közvetlenül alkalmazható, és így nyerjük:

$$u_j = \frac{1}{\sum F} i_g \cdot \sum F_{j,0}^2 \quad j=2,3 \quad (25)$$

A 9. ábrából közvetlenül kiolvasható:

$$\sum F = r_1 r_2 + s_3 (s_2 - r_2) - s_2 (r_1 + r_2), \quad \sum F_{32,0}^2 = -r_2, \text{ és} \quad \sum F_{3,0}^2 = s_2 - r_2. \quad (26)$$

Figyelembe véve (26)-ot, némi számolás után az  $s_i = \sum_k (p_k + r_k)$  definíció felhasználásával (25)-ből nyerjük:

$$u_2 = \frac{-r_2}{p_2^2 + p_1 p_2 - r_2^2} i_g, \text{ valamint}$$

$$u_3 = \frac{p_2}{p_2^2 + p_1 p_2 - r_2^2} i_g.$$

Megjegyezzük, hogy a második példában látott eljárás nem követhető, ha a rövidzár lezárás forrásfeszültség generátort is tartalmaz.

IRODALOM

[1] Géher Károly: Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1968.  
 [2] Pávó, I.: Generation of the k-trees of a graph. Acta Cybernetika Tom. 1, Fasc. 2, Szeged, 1971, pp. 57-68.  
 [3] Seshu-Reed: Linear graphs and electrical networks. Addison-Wesley PC, London, 1961.  
 [4] Vágó István: A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számításában. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1977.