

DR. SALLAI GYULA
Posta Kísérleti Intézet

Direkt módszerek véges memóriájú digitális szűrők tervezéséhez

ETO 621.372.54.037.37.001.2

A digitális szűrők osztályozását és tervezésük alapelveit az [1, 2] cikkek tekintik át. Jelen cikkben a véges memóriájú digitális szűrők tervezésére néhány olyan módszert ismertetünk, amelyek a transzfer függvény együtthatóira explicit összefüggéseket eredményeznek. A véges memóriájú szűrők leggyakrabban alkalmazott transzverzális struktúrájú megvalósítása esetén a szűrőegyütthatók az approximáció során nyert együtthatókkal közvetlenül meg egyeznek.

A véges memóriájú (FIR) digitális szűrők approximációjára számos módszer ismeretes, úgymint

1. a frekvenciatartománybeli követelmények Fourier sorfejtése és az együtthatók módosítása különböző ablakfüggvényekkel [3, 4],
2. a transzfer függvény felírása frekvencia szerinti mintavételezéssel és javítása lineáris optimalizálással [5, 6],
3. az alternálási tételre alapuló iteratív Csebisevi közelítés [7–10], valamint
4. speciális trigonometrikus közelítő eljárások [5, 11, 12].

Az ablaktechnikát a legkönnyebb alkalmazni, egyben a legáltalánosabb is. Azonban, ha lineáris vagy minimális fázisú szűrőt kívánunk tervezni, a többi eljárás jobb approximációt eredményez, bár a gépi tervezési idő tekintélyes lehet. Csak néhány esetben ismeretes a szűrőegyütthatókra minden szempontból előnyös zárt alakú kifejezés.

Ezen tanulmányban a FIR szűrő tervezését analóg szűrő tervezésére vezetjük vissza. Az analóg tartományban az approximációs feladat számos esetben könnyebben és zárt alakban megoldható lesz. Az approximációt lineáris fázisú maximálisan lapos és inverz Csebisev szelektív szűrőkre, valamint maximálisan lapos kvadratúra szűrőre végezzük el. A már ismert módszerekkel [5, 11, 12, 14] szemben a javasolt referens szűrős módszerek közvetlenül alkalmazhatók mind páros, mind páratlan fókuszszámú szűrő esetén, és a FIR szűrő együtthatóira egyszerűbb, egy-

seges explicit kifejezéseket eredményeznek. Feloldhatók a maximálisan lapos szűrőknél jelentkező megkötések is, az eredmények explicit formájának megtartása mellett. Minimálfázisú szűrőt a megfelelő lineáris fázisú szűrőből nyerhetünk. A konvertálást a referens tartományban végezve a megoldandó egyenlet fokszáma kisebb (legfeljebb fele). A referens szűrős módszer egy általánosítását, valamint kiterjesztését a mindentáresterztől felépített késleltető láncok esetére [15, 16] ismerteti.

1. A referens szűrők módszere

A végtelen memóriájú (IIR) digitális szűrők legáltalánosabban alkalmazott tervezési módszerei analóg referens szűrők leképzésén, leggyakrabban bilineáris leképzésén alapulnak. Igazolható, hogy bármely frekvenciatartományban megfogalmazott digitális szűrőtervezési feladathoz egy frekvenciatartománybeli analóg approximációs feladat rendelhető, és ha létezik analóg megoldás, akkor azonos értelemben vett digitális megoldás is létezik [17]. Az összerendelés az

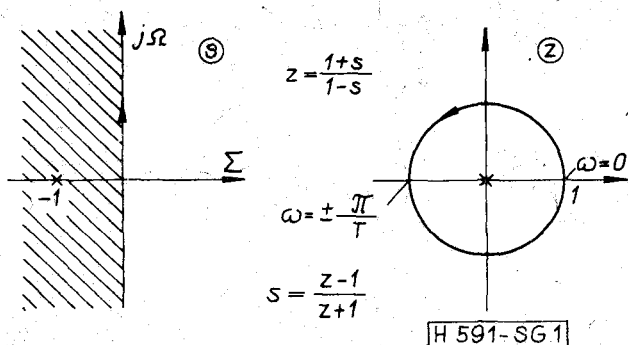
$$s = \alpha \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \alpha \cdot \text{th} \frac{p \cdot T}{2} \quad (1)$$

bilineáris transzformáció, és az annak megfelelő

$$\Omega = \alpha \cdot \text{tg} \frac{\omega \cdot T}{2} \quad (2)$$

frekvencia-transzformáció segítségével teremthető meg (1. ábra). Itt $z = e^{pT}$, T a mintavételi időköz, $p = \sigma + j\omega$ a komplex frekvencia jelölése a digitális szűrők, $s = \Sigma + j\Omega$ a referens analóg szűrők számára. Szimuláció esetén az $\alpha = 2/T$ választás előnyös, hiszen így $\Omega \approx \omega$, ha $\omega \ll \pi/T$. Referens szűrős tervezésnél legegyszerűbb, ha $\alpha = 1$ választással élünk.

Általában tehát a transzfer függvények, átviteli-, fázis- és futási idő karakterisztikák közötti összefüggés:



1. ábra. Az s-sík bilineáris leképezése a z-síkra

$$K(z) = \tilde{K}(s) \Big|_{s=\alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$K(e^{j\omega T}) = \tilde{K}(j\Omega) \Big|_{\Omega=\alpha \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}} \quad (3)$$

$$b(\omega) = \tilde{b}(\Omega) \Big|_{\Omega=\alpha \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}$$

$$\tau(\omega) = \alpha \cdot \frac{T}{2} (1 + \Omega^2) \tilde{\tau}(\Omega) \Big|_{\Omega=\alpha \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}} \quad (4)$$

A referens szűrő karakterisztikáinak megkülönböztésére a \sim jelet alkalmaztuk.

Az analóg szűrők approximációja jól kidolgozott, számos zárt formájú kifejezéseket eredményező analóg tervezési eljárás ismeretes. Ezért igen gyakran, szemben a FIR szűrők tervezésével, a végtelen memóriájú szűrők approximációja könnyen végrehajtható. A bilineáris leképezés különösen akkor hatásos, ha az előírás lépcsős toleranciasémával adott. Ha a kritikus frekvenciákat a (2) szerint transzformáljuk, előtorzítjuk, akkor a digitális szűrő az előírt specifikációt biztosan kielégíti. (Futásidő-előírásokat (4)-nek megfelelően módosítani kell)

A bilineáris leképezés módszerét a FIR szűrők tervezéséhez nem használják, pedig a FIR szűrőket a végtelen memóriájú szűrők speciális esetének tekinthetjük. A FIR szűrő olyan végtelen memóriájú szűrő, amelynek pólusai a z síkon az origóban vannak. Transzfer függvénye:

$$K(z) = \frac{\sum_{l=0}^M d_l z^{M-l}}{z^M} = \sum_{l=0}^M d_l z^{-l} \quad (5)$$

Ilyen transzfer függvények nyilvánvalóan a referens analóg szűrők egy szűkebb osztályának leképezésével hozhatók létre. Ha a megengedett referens transzfer függvényekkel a referens tartományban megfogalmazott előírást kielégítjük, akkor a FIR szűrő bilineáris leképezéssel nyert transzfer függvénye az előírásokat ugyanolyan értelemben teljesíteni fogja.

1.1 Megengedett referens szűrők

Első lépésként a referens függvények megengedett osztályát kell meghatározni. Az

$$s = \alpha \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \alpha \frac{z-1}{z+1}$$

leképezést tekintve, az $s = -\alpha$ a $z = 0$ ponthoz tartozik. Bevezetve az

$$A_R(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_R s^R, \quad R \leq M$$

polinomot, a megengedett referens transzfer függvényekre az alábbi formát kapjuk:

$$\tilde{K}(s) = \frac{A_R(s)}{(s+\alpha)^M} \quad (6)$$

Ugyanis (1)-et (6)-ba helyettesítve:

$$K(z) = \frac{1}{(2\alpha)^M} \sum_{l=0}^R a_l \alpha^l (1+z^{-1})^{M-l} (1-z^{-1})^l =$$

$$= (2\alpha)^{-M} \sum_{l=0}^R a_l \alpha^l \sum_{i=0}^{M-l} \binom{M-l}{i} z^{-i} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k z^{-k} =$$

$$= \sum_{i=0}^M z^{-i} \left\{ (2\alpha)^{-M} \sum_{l=0}^R a_l \alpha^l \sum_{k=0}^i \binom{M-l}{i-k} \binom{l}{k} (-1)^k \right\}.$$

A $K(z)$ M -ed fokú polinom z^{-1} -ben, ha

$$\sum_{l=0}^R (-\alpha)^l a_l \neq 0.$$

A $K(z)$ kifejezését összehasonlítva (5)-tel a FIR szűrő együtthatóit kapjuk. Az $\alpha = 1$ esetet tekintve:

$$d_l = 2^{-M} \sum_{i=0}^R a_i \sum_{k=0}^l \binom{M-l}{i-k} \binom{l}{k} (-1)^k \quad (7)$$

A bilineáris leképezés tulajdonságaiból következik, hogy minimál fázisú FIR szűrőt kapunk, ha az $A(s)$ polinomnak a jobb félsíkon nincsenek zérushelyei.

1.2 A lineáris fázisú FIR szűrők prototípusa

A lineáris fázisú FIR szűrők különösen fontosak. Mint ismeretes, megengedett $K(z)$ transzfer függvényük tükröképpolinom, azaz $d_i = d_{M-i}$ (szimmetrikus eset), vagy $d_i = -d_{M-i}$ (antiszimmetrikus eset). Az átviteli karakterisztika ennek megfelelően:

$$K(e^{j\omega T}) = \begin{cases} e^{-j\frac{M}{2}\omega T} K_0(e^{j\omega T}), & \text{ha } d_i = d_{M-i} \\ e^{-j(\frac{M}{2}\omega T - \frac{\pi}{2})} K_0(e^{j\omega T}) & \text{ha } d_i = -d_{M-i}, \end{cases}$$

ahol $K_0(e^{j\omega T})$ valós, páros illetve páratlan függvénye ω -nak. Nevezük K_0 -t amplitúdó-karakterisztikának, annak ellenére, hogy általában $K_0 \neq |K|$. A szűrő-együtthatók szimmetrikus voltának következményeként $K(z)$ zéruselrendezésének természetesen bizonyos követelményeket ki kell elégítenie [2, 5, 6]. A leglényegesebb, hogy a zérushelyek reciprokok párokat alkotnak, azaz egy z_i zérushely esetén $1/z_i$ is zérushely.

Könnyű belátni, hogy a (6) szerinti referens függvény bilineáris transzformációja akkor és csak akkor eredményez $MT/2$ késleltetésű, lineáris fázisú FIR szűrőt, ha az $A(s)$ számlálópolinom tiszta páros, vagy tiszta páratlan. Ha $A(s) = B(-s^2)$, akkor szimmetrikus, ha $A(s) = sB(-s^2)$ akkor antiszimmetrikus együttható-elrendezésű FIR szűrőt kapunk. A $K(z)$

fokszáma M , ha

$$\sum_{r=0}^{\langle R/2 \rangle} (-\alpha^2)^r b_r \neq 0,$$

ahol $\langle R/2 \rangle$ $R/2$ egész részét jelöli.

Az $s=j\Omega$ helyettesítést elvégezve nyilvánvaló, hogy $B(\Omega^2)$ valós, tehát a fázismenetet a számláló nem módosítja. A realizálhatósághoz szükséges $MT/2$ késleltetést a nevező hozza létre:

$$\frac{1}{(j\Omega + \alpha)^M} = \frac{e^{-Mj \arctg \frac{\Omega}{\alpha}}}{(\Omega^2 + \alpha^2)^{M/2}} = \frac{1}{(\Omega^2 + \alpha^2)^{M/2}} e^{-j \frac{M}{2} \omega T}.$$

Így a $K_0(e^{j\omega T})$ amplitúdókarakterisztikához rendelhető referens amplitúdókarakterisztika, $\alpha=1$ további feltételezésével:

$$\tilde{K}_0(\Omega) = \begin{cases} \frac{B(\Omega^2)}{(1 + \Omega^2)^{M/2}} & \text{ha } d_i = d_{M-i} \\ \frac{\Omega \cdot B(\Omega^2)}{(1 + \Omega^2)^{M/2}} & \text{ha } d_i = -d_{M-i}, \end{cases} \quad (8)$$

ahol a polinomegyütthatók $b_r = (-1)^r a_{2r}$ illetve $b_r = (-1)^r a_{2r+1}$ $r=0, 1 \dots \langle R/2 \rangle$

Mint tudjuk a számláló fokszáma a nevező fokszámánál nagyobb nem lehet, $R \leq M$. Vegyük azonban észre, hogy a szimmetrikus eset páratlan M -nél és az antiszimmetrikus eset páros M -nél $R < M$ megkötést eredményez. Következésképpen $z = -1$ -ben ($\omega = \pi/T$) legalább egyszeres zérushely jön létre. Az ilyen szűrők tehát felülráteresztő jellegű karakterisztikák megvalósítására nem alkalmasak.

Lineáris fázisú FIR szűrők esetén tehát a tervezés a $B(\Omega^2)$ polinom együtthatóinak megfelelő meghatározására irányul. Ezek ismeretében a FIR szűrő együtthatóit (7) alapján kapjuk. A (7)-t közvetlenül a b_r együtthatókkal kifejezve, szimmetrikus esetben:

$$d_i = 2^{-M} \sum_{r=0}^{\langle R/2 \rangle} b_r \sum_{k=0}^i (-1)^{k+r} \binom{M-2r}{i-k} \binom{2r}{k} \quad i=0, 1 \dots M \quad (10)$$

2. Maximálisan lapos szelektív szűrők

Ebben a szakaszban a maximálisan lapos lineáris fázisú FIR digitális szűrők megfelelő analog referens szűrő bilineáris transzformációján alapuló approximációját mutatjuk be. Az ismertetendő módszer egységes kifejezéseket nyújt tetszőleges fokszámú szűrő esetén és egyszerű lehetőséget ad átmeneti monoton karakterisztikájú, valamint minimálfázisú FIR szűrők transzfer függvényének előállítására.

2.1 Lineáris fázisú aluláteresztők

A (8) összefüggésből kiindulva, bevezetve az $N=M/2$ jelölést, a maximálisan lapos aluláteresztő referens szűrő amplitúdókarakterisztikája:

$$\tilde{K}_0(\Omega) = \frac{\sum_{r=0}^m b_r \Omega^{2r}}{(1 + \Omega^2)^N} \quad (11)$$

ahol a végtelenbeli átviteli zérus biztosítása érdekében $0 \leq m < M/2$.

A cél a számláló b_r együtthatóinak olyan megválasztása, hogy $\tilde{K}_0(\Omega)$ maximálisan lapos karakterisztika legyen. Ha a $B(\Omega)^2$ számlálópolinomot úgy választjuk, hogy a nevező origó körüli Taylor sorának m -fokú csonkítása legyen, azaz $x = \Omega^2$ jelöléssel:

$$B_m(x) = \sum_{r=0}^m \frac{\partial^r (1+x)^N}{\partial x^r} \Big|_{x=0} \frac{x^r}{r!} = 1 + \sum_{r=1}^m \frac{x^r}{r!} [N(N-1) \dots (N-r+1)], \quad (12)$$

akkor $\tilde{K}_0(\Omega)$ első $2m+1$ Ω szerinti deriváltja az origóban zérus lesz. A $B(\Omega)^2$ ilyen választása adott $m < M/2$ mellett maximálisan lapos, monoton csökkenő karakterisztikát biztosít.

Nyilvánvaló, hogy ha M páros és így N egész, a nevező Taylor-sora önmaga és $B_m(x)$ egyszerűen az $(1+x)^N$ polinomalakjának csonkítása lesz. Az M párosságától függetlenül a keresett b_r együtthatók (12)-ből nyerhetők. A binomiális együtthatót valós számokra is értelmezve írhatjuk, hogy

$$b_r = \frac{N(N-1) \dots (N-r+1)}{r!} = \binom{M/2}{r}, \quad r=0, 1 \dots m. \quad (13)$$

A b_r értékeit a (10) összefüggésbe helyettesítve a szűrőegyütthatókra egyszerű explicit kifejezéseket nyerünk. Kihasználva, hogy $d_i = d_{M-i}$ és hogy

$$\sum_{i=0}^M d_i = 1,$$

elegendő csupán a d_i , $i=0, 1, \dots, \langle N-1 \rangle$ együtthatókat számítani a (10) összefüggés szerint.

Könnyen belátható, hogy d_i szűrőegyütthatók egy 2^{-L} tényezőtől eltekintve egész számok, ahol

$$L = \begin{cases} M & \text{ha } M \text{ páros} \\ M + \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle \frac{m}{2^i} \right\rangle & \text{ha } M \text{ páratlan.} \end{cases}$$

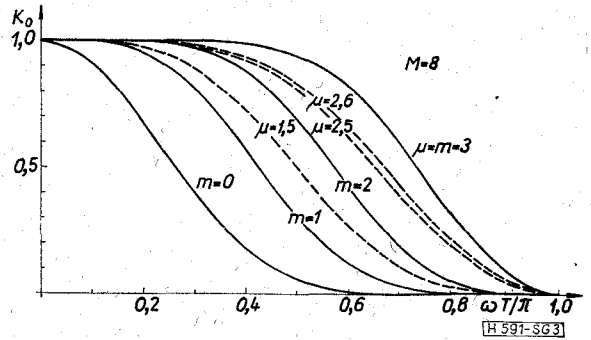
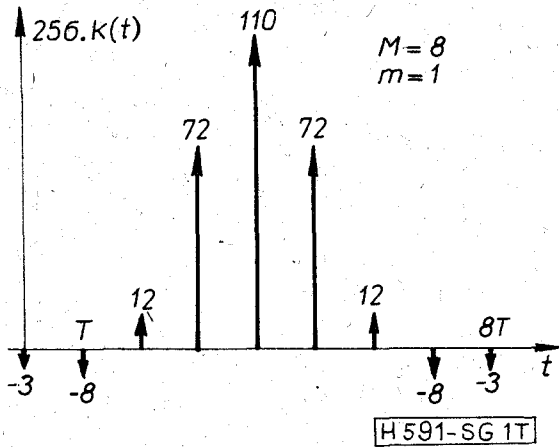
Páratlan fokszám esetén

$$\binom{M/2}{m} = \frac{M(M-2) \dots (M-2m+2)}{2^m m!} = I \cdot 2^{-\left[m + \sum_{i=1}^{\infty} \langle m2^{-i} \rangle \right]},$$

ahol I egy megfelelő egész szám. Sajnos L gyakorlatilag túl nagy ahhoz, hogy a szűrőegyütthatókat kvantálási hiba nélkül valósíthassuk meg.

A szűrőegyütthatók értékét, amelyek a FIR szűrő $k(t)$ súlyfüggvényének mintáival közvetlenül egyenlők, $M=8$ fokszám esetén a lehetséges m paraméterértékek mellett az 1. táblázat tünteti fel. A (10) összefüggésből nyilvánvaló az alábbi m szerinti rekurrens formula:

$$d_i^{(m-1+w)} = d_i^{(m-1)} + 2^{-M} \cdot W \binom{N}{m} \sum_{k=0}^i (-1)^{m+k} \binom{M-2m}{i-k} \binom{2m}{k} \quad (14)$$



3. ábra. 8-ad fokú maximálisan lapos, lineáris fázisú FIR digitálisszűrő-karakterisztikák (Szaggatottan: átmeneti karakterisztikák)

1. táblázat

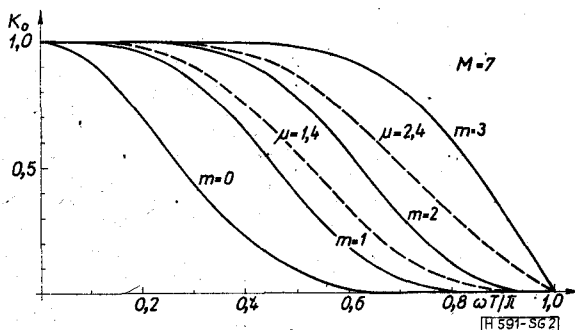
M = 8 fokú lineáris fázisú max. lapos szűrő együtthatói

m	$a_0 = a_8$	$a_1 = a_7$	$a_2 = a_6$	$a_3 = a_5$	a_4	$\omega_0 T / \pi$
0	0,0039	0,03125	0,1094	0,21875	0,27344	0,26
1	-0,0117	-0,03125	0,0469	0,28175	0,42969	0,43
2	0,117	-0,03125	-0,0469	0,28175	0,57031	0,57
3	-0,0039	0,03125	-0,1094	0,21875	0,72656	0,74

(A W súlyszámot a 2.2 pontban értelmezzük, itt W=1). A maximálisan lapos FIR szűrő amplitúdókarakterisztikája (11)-ből:

$$K_0(e^{j\omega T}) = \sum_{r=0}^m \binom{N}{r} \text{tg}^{2r} \frac{\omega T}{2} = \frac{1 + \text{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{2} = \sum_{r=0}^m \binom{M/2}{r} \sin^{2r} \frac{\omega T}{2} \cos^{M-2r} \frac{\omega T}{2} \quad (15)$$

Vegyük észre, hogy K_0 összetevői nem negatívak a $0 \leq \omega \leq \pi/T$ tartományban. Az adott M fokszám esetén az m paraméter megválasztásától függően $(M+1)/2$ -féle különböző maximálisan lapos szűrő-karakterisztikát kapunk. A karakterisztikák lapossága $2m+1$ rendű $\omega=0$ -nál, $M-2m-1$ rendű $\omega=\pi/T$ -nél. Az $z = -1$ -ben levő átviteli zérusok multiplicitása $M-2m$ (2. és 3. ábra).



2. ábra. 7-ed fokú maximálisan lapos, lineáris fázisú FIR digitálisszűrő-karakterisztikák (Szaggatottan: átmeneti karakterisztikák)

Megjegyezzük, hogy Herrmann és Fahmy által javasolt approximációs módszerek [11, 12] csak páros fokszámú lineáris fázisú FIR szűrők tervezésére alkalmasak. Természetesen azonos kényszerfeltételek mellett a karakterisztikák azonosak, mint azt Fahmy módszerének kritikájában Kaiser [13] is leszögezte. A referens szűrők módszerével azonban a szűrőegyütthatókra nyert kifejezések egyszerűbbek és páratlan fokszámra is érvényesek.

Az ugyanolyan fokszámú, de különböző m paraméterű szűrő-karakterisztikák rekurzívan számíthatók. (15)-ből:

$$K_0^{(m)} = K_0^{(m-1)} + \binom{N}{m} \sin^{2m} \frac{\omega T}{2} \cos^{M-2m} \frac{\omega T}{2} \quad (16)$$

Páros M fokszám esetén az amplitúdó-karakterisztikák az alábbi szimmetria-tulajdonsággal rendelkeznek:

$$K_0^{(q)}(e^{j\omega T}) = 1 - K_0^{(m)}(e^{j(\omega T - \pi)}),$$

ahol $q = N - m - 1$. Ugyanis az $(1+x)^N$ nevezőpolinom együtthatóinak szimmetriája miatt írható, hogy

$$B_q(x) = (1+x)^N - x^N B_m(x^{-1}).$$

Képezve a referens transzfer függvényeket, majd azok bilineáris transzformációjával a megfelelő FIR szűrő transzfer függvényeket:

$$K_q(z^{-1}) = z^{-N} - (-1)^N K_m(-z^{-1}),$$

amiből $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel már az állítás következik. Az utóbbi összefüggésből kiolvasható a szűrő-együtthatók kapcsolata is:

$$d_i^{(q)} = (-1)^{N+i+1} d_i^{(m)} \quad i \neq N$$

$$d_N^{(q)} = 1 - d_N^{(m)}.$$

Kiterjedt numerikus vizsgálataink szerint az amplitúdó-karakterisztikák vágási meredeksége a 6 dB csillapításhoz tartozó ω_6 határfrekvenciánál az m értékétől nem függ. Az $M=22$ és 4 fokszámokhoz tartozó meredekség viszonya 2. A maximális meredekség $m < (M-2)/4$ esetén $\omega < \omega_6$ frekvenciánál, $m > (M-2)/4$ esetén $\omega > \omega_6$ frekvenciánál jelentkezik. A határfrekvencia egy közelítő kifejezése, amely a Herrmann-féle formulánál jobb közelítést nyújt:

$$\omega_6 = \frac{1}{T} \arccos \left(\frac{M-2-4m}{M} \cos \frac{2\pi}{5\sqrt{M}} \right) \quad (17)$$

2.2 Átmeneti szűrők

Maximálisan lapos aluláteresztő szűrő tervezésénél m értékét egész számra kell választani, így – (17)-ből láthatóan – tetszőleges határfrekvenciájú szűrőt nem valósíthatunk meg.

A (15) szerinti karakterisztikákat megfigyelve könnyen belátható, hogy monoton, de nem maximálisan lapos karakterisztikákat nyerünk, ha a b_r együtthatókat a (13)-ban meghatározott értéknél kisebbre választjuk. Gyakorlati szempontból csak a legmagasabb fokszámú b_m együtthatóval való manipuláció érdekes. A $b_m = \binom{N}{m}$ együtthatót egy W ($0 < W \leq 1$) súlyszámmal szorozva, mint a (14) rekurziós formulából kitűnik, a d_i szűrőegyütthatók az $m-1$ és m paraméterekhez tartozó szűrőegyütthatók konvex kombinációi lesznek:

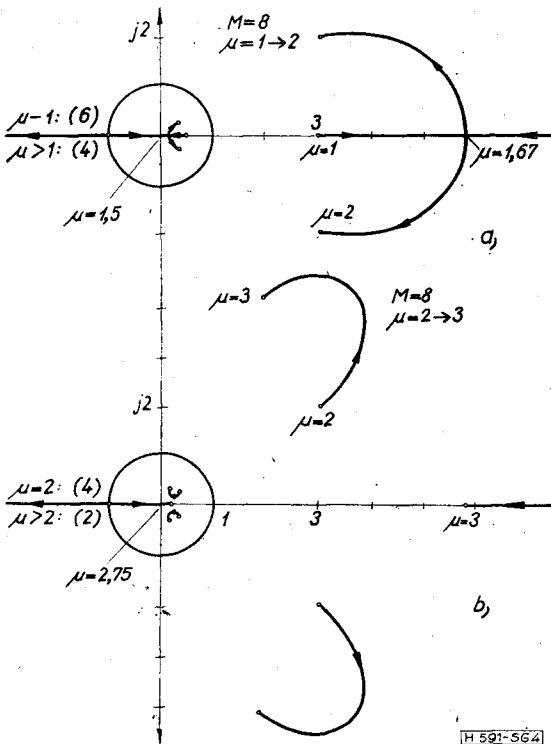
$$d_i^{(m-1+W)} = W \cdot d_i^{(m)} + (1-W) d_i^{(m-1)}$$

és nyilvánvaló (16)-ból, hogy az $m-1$ és m paraméterű amplitúdó-karakterisztikák között elhelyezkedő, azok konvex kombinációjaként adódó átmeneti karakterisztikát kapunk:

$$K_0^{(m-1+W)}(e^{j\omega T}) = W \cdot K_0^{(m)} + (1-W) K_0^{(m-1)}. \quad (18)$$

Számításaink szerint az ω_0 határfrekvencia az $m-1$ és m paraméterű karakterisztikák határfrekvenciái között lineárisan interpolálható. Így a karakterisztikákat $\mu = m-1 + W$ formában paraméterezhetjük, és a (17) összefüggés segítségével, m -t μ -vel helyettesítve meghatározhatjuk adott ω_0 -hoz tartozó μ paramétert. Ebből pedig:

$$m = -\langle -\mu \rangle \quad W = \mu + 1 + \langle -\mu \rangle.$$



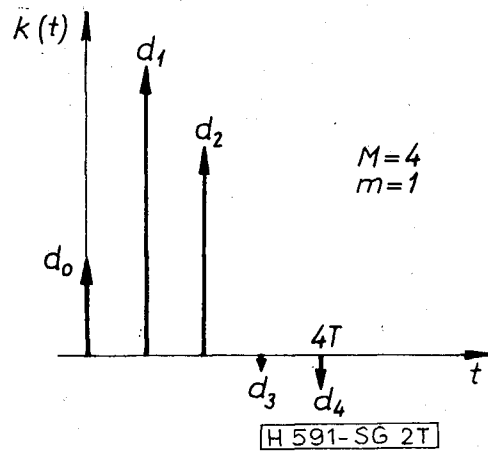
4. ábra. A zérushelyek vándorlása a μ paraméter függvényében 8-ad fokú lineáris fázisú karakterisztika esetén

Az átmeneti karakterisztikák segítségével tehát az $m=0$ és $m_{max} = \langle (M-1/2) \rangle$ által meghatározott tartományon belül tetszőleges határfrekvenciájú monoton karakterisztika létrehozható (2. és 3. ábra). Az átmeneti karakterisztikák lapossága $\omega=0$ -nál az $m-1$ paraméterű, $\omega=\pi/T$ -nél az m paraméterű karakterisztikának megfelelően alakul. (A zérushely a $z = -1$ -ben $M+2 \cdot \langle -\mu \rangle$ multiplicitású.) A 4. ábrán $M=8$ esetén láthatjuk a zérushelyek vándorlását a μ függvényében.

Adott követelményű szűrő tervezéséhez a BASIC (PDP-8) nyelvű MAXTRANS és TRANSCO programok készültek, melyek a karakterisztikák, ill. a szűrőegyütthatók számítását végzik.

2.3 Minimálfázisú szűrők

Mivel a 2.1 pontban tárgyalt lineáris fázisú szűrők $\tilde{K}_0(\Omega)$ karakterisztikája nem-negatív, e szűrők transzformációja azonos csillapításmenetű, de fele akora fokszámú minimálfázisú szűrőbe könnyen végre hajtható. A transzformáció az s tartományban kisebb munkával végezhető el, mint a z tartományban: M helyett csak $m < M/2$ fokszámú algebrai egyenletet kell megoldani. A megfelelő páros M fokszámhoz tartozó $B_m(-s^2)$ számlálópolinom $2m$ zérushelye az s síkon a $j\Omega$ tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el. (A $j\Omega$ tengelyen zérusok nem léphetnek fel.) A halfélsíkra eső zérusokat kiválasztva, a minimálfázisú FIR szűrő m -fokú $A_{MF}(s)$ referens számlálópolinomját állíthatjuk elő. Az $A_{MF}(s)$ együtthatóit $M_{MF} = M/2$ mellett (7)-be helyettesítve közvetlenül az M_{MF} fokszámú minimálfázisú szűrő d_i együtthatóit kapjuk. A nyert szűrő amplitúdó-karakterisztikája az M fokú és m paraméterű lineáris fázisú szűrő karakterisztikájának négyzetgyöke lesz. Következés-



2. táblázat

M = 4 fokú miminálfázisú max. lapos szűrő együtthatói

m	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	$\omega_0 T / \pi$
0	0,0671	0,2588	0,3747	0,2412	0,0582	0,26
1	0,1800	0,5016	0,3717	-0,0016	-0,0617	0,43
2	0,4026	0,6227	0,0683	-0,1226	0,0291	0,57
3	0,6958	0,4514	-0,1902	0,0486	-0,0056	0,74

képpen a határfrekvenciára vonatkozó (17) összefüggés a 3 dB csillapítású pontra lesz érvényes (M itt változatlanul a lineáris fázisú szűrő fokszámát jelzi.) A 2. táblázat a 4-ed fokú minimálfázisú szűrő együtthatóit tünteti fel egész $\mu=m$ paraméterekre.

2.4 Transzformált szűrők

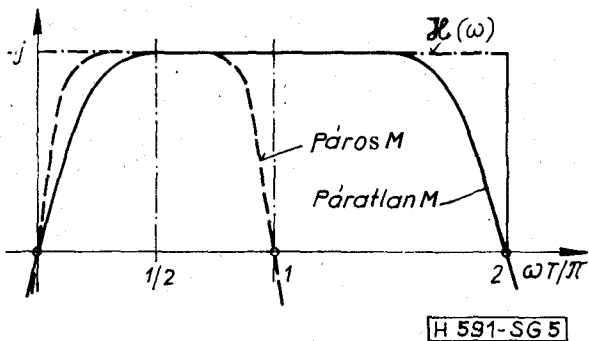
Az aluláteresztő $K(z)$ transzfer függvényében $z \rightarrow -z$ helyettesítést elvégezve feluláteresztőt, $z \rightarrow -z^2$ helyettesítéssel $\pi/2T$ sávközepű szimmetrikus sávszűrőt, $z \rightarrow z^2$ esetén szimmetrikus sávzárót kapunk. Lineáris fázisment igénye esetén feluláteresztőt és sávszűrőt csak páros fokszámú lineáris fázismentű aluláteresztőből nyerhetünk, ugyanis páratlan fokszám esetén $z = -1$ -ben törvényszerűen zérushely van [2].

3. Maximálisan lapos kvadratúraszűrők

Az antiszimmetrikus FIR szűrők igen alkalmasak a

$$\mathcal{H}(\omega) = j \operatorname{sgn} \omega$$

definíciójú Hilbert-transzformáció realizálására. Az ilyen szűrőket Hilbert-transzformátornak vagy kvadratúraszűrőnek nevezik. A szűrőegyütthatók $d_i = -d_{M-i}$ antiszimmetriája, egy $MT/2$ késleltetés mellett biztosítja a 90° fázistolást, így teljes figyelmünket az $\omega=0$ pont kivételével konstans amplitúdó-karakterisztika approximációjára fordíthatjuk (5. ábra). Az alternálási tételre alapuló egyenletes közelítések, az ablaktechnikát alkalmazó eljárások meglehetősen számításgényesek [5, 18]. Most felhasználva a páratlan fokszámú lineáris fázisú aluláteresztőkre nyert eredményeket, a kvadratúraszűrők explicit kifejezésekre vezető maximálisan lapos approximációját mutatjuk be.



5. ábra Kvadratúraszűrő-karakterisztikák

Az 1.2 pont szerint a megengedett referens transzfer függvény:

$$\tilde{K}(s) = \frac{sB(-s^2)}{(1+s)^M}$$

Mivel antiszimmetrikus együtthatóelrendezésnél páros fokszám esetén $\omega = \pi/T$ -ben törvényszerűen átviteli zérus lép fel, páratlan M fokszám választása előnyösebb. Így $\omega = \pi/T$ környezetében maximálisan lapos közelítést nyerhetünk és a kihasználható frekvenciatartomány π/T -ig terjed (5. ábra).

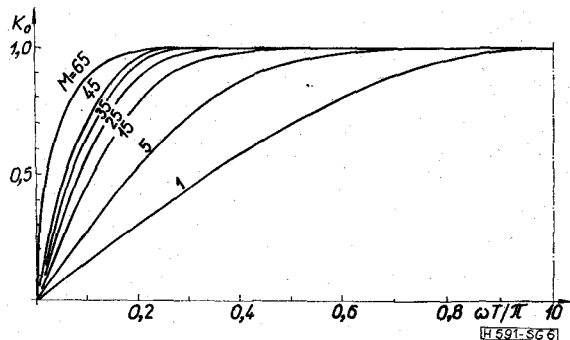
Ahhoz, hogy nagy értékű Ω -kra konstans átvitelt kapjunk $\tilde{K}(s)$ számlálójának M fokúnak kell lennie, következésképpen $B(-s^2)$ ($M-1$)/2 fokszámú lesz. Az $\omega = \Omega = 0$ pontbeli követelmény automatikusan teljesül. Így egy feluláteresztő jellegű $\tilde{K}(s)$ -t kapunk. Ha elvégezzük az $s = 1/S$ helyettesítést:

$$\tilde{K}(1/S) = \frac{B_{(M-1)/2}(-S^{-2})}{S(1+S^{-1})^M} = \frac{C_{(M-1)/2}(-S^2)}{(S+i)^M}$$

alakú páratlan fokszámú aluláteresztőhöz jutunk,

ahol: $c_r = (-1)^{\lfloor (M-1)/2 - r \rfloor}$ $r = 0, 1 \dots (M-1)/2$.

A $\tilde{K}(1/S)$ maximálisan lapos közelítése (1: 2.1 pont) a



6. ábra. Páratlan fokszámú, maximálisan lapos kvadratúraszűrő-karakterisztikák

maximális $m = (M-1)/2$ paraméter mellett a c_r együtthatókra a (13) szerinti binomiális együtthatókat eredményezi. A megfelelő aluláteresztő szűrő együtthatóit c_r értékek (10)-be helyettesítésével nyerjük. Mivel az $s = 1/S$ transzformáció a $S = (1 - Z^{-1})/(1 + Z^{-1})$ bilineáris leképezés után $Z^{-1} = -z^{-1}$ helyettesítéssel invertálható, a kvadratúraszűrő együtthatóit az előzőekben nyert szűrőegyütthatók $(-1)^l$ -vel való szorzásával nyerjük, Formálisan, nagyon egyszerűen, a kvadratúraszűrő d_l együtthatói (10)-ből közvetlenül kiszámíthatók, ha

$$b_r = (-1)^r \binom{M/2}{r}, \quad r = 0, 1 \dots (M-1)/2.$$

Emlékeztetünk arra, hogy $d_i = -d_{M-i}$ és hogy a szelektív szűrőkhöz hasonlóan a d_l együtthatók kvantálási hiba nélkül valósíthatók meg, ha a szóhosszúság elegendően nagy. Például $M=5$ esetén a transzfer függvény:

$$K(z) = 2^{-8}(3 + 25z^{-1} + 150z^{-2} - 150z^{-3} - 25z^{-4} - 3z^{-5}).$$

Az amplitúdó karakterisztikák π/T -re szükségképpen szimmetrikusak. A (15)-ből, az $\omega T \rightarrow \pi - \omega T$ frekvenciatranszformációt elvégezve:

$$K_0(e^{j\omega T}) = \sum_{r=0}^{(M-1)/2} \binom{M/2}{r} \cos^{2r} \frac{\omega T}{2} \sin^{M-2r} \frac{\omega T}{2}.$$

A 6. ábra különböző páratlan fokszámú kvadratúraszűrő karakterisztikákat mutat. Mint látható az egyégtől való eltérés $\pi/2T$ -nél már 5-öd fokú szűrő esetén is kisebb 5%-nál. $\pi/2T$ -re szimmetrikus karakterisztikájú kvadratúraszűrőt $z^{-1} \rightarrow z^{-2}$ helyettesítéssel állíthatunk elő.

4. Egyenletes zárótartományú szűrők

A lineáris fázisú FIR digitális aluláteresztők át-eresztő és zárótartományának egyaránt egyenletes közelítése nonlinearis optimalizálással, az alternálási tétel alapján érhető el [7–10]. Ha csak a tartományok egyikét kívánjuk egyenletesen közelíteni, akkor a Csebisev polinomok segítségével létezik analitikus megoldás páros fokszámú szűrőkre [5, 14].

Most olyan approximációs eljárást mutatunk, amely többszörös leképezéssel állít elő zárótartományban egyenletes közelítésű aluláteresztőt, bármilyen paritású fokszám esetén. A FIR szűrő együtthatóira explicit formulákat fogunk kapni.

A lineáris fázismentet biztosító referens függvényben

$$\tilde{K}(s) = \frac{B_m(-s^2)}{(s+1)^M}, \quad 2m \leq M$$

a pólusok előírt helyen vannak. Az M fokszám és a számláló együtthatói úgy választandók, hogy az

$$\Omega \geq \Omega_z = \text{tg}(\omega_z \cdot T/2)$$

tartományban a csillapításminimumok előírt értékek legyenek. Itt ω_z ($0 < \omega_z < \pi/T$) a digitális szűrő előírt zárótartományi határfrekvenciáját jelöli. Ilyen átviteli függvény konstruálásával találkozunk az ún. L szűrők approximációjánál [19]. Egy mindentát-eresztő hálózat transzfer függvényéből többszöri transzformációval az

$$\tilde{F}(s) = \frac{\prod_{i=1}^M (w + w_i)}{\prod_{i=1}^M (s + s_i)} \Big|_{w^2 = s^2 + \Omega_z^2}$$

függvényt állítja elő, ahol $w_i^2 = s_i^2 + \Omega_z^2$, $[\cdot]_2$ a párosrészt jelöli. Az $\tilde{F}(s)$ függvény abszolút értéke az $\Omega \geq \Omega_z$ tartományban 0 és 1 között ingadozik, zérushelyei mind a $j\Omega$ tengelyen vannak.

Ha most az $s_i = -1$ és az ennek megfelelő $w_i^2 = 1 + \Omega_z^2$ ($i=1, 2 \dots M$) helyettesítéseket elvégezzük, akkor $w_0 = w_i$ jelöléssel:

$$\tilde{F}(s) = \frac{[(w + w_0)^M]_2 |_{w^2 = s^2 + \Omega_z^2}}{(s + 1)^M}, \quad (19)$$

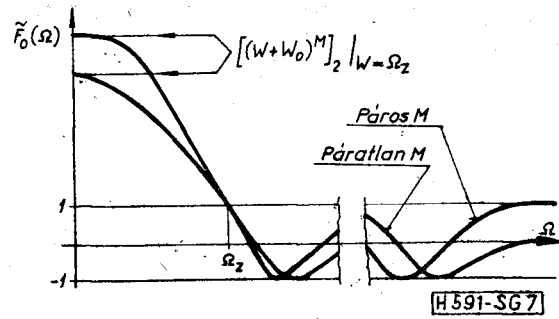
ahol

$$[(w + w_0)^M]_2 = \sum_{n=0}^{\langle M/2 \rangle} \binom{M}{2n} w_0^{M-2n} w^{2n}$$

alakban írható. Látható, hogy $\tilde{F}(s)$ számlálójának fokszáma M , ha M páros; $M - 1$, ha M páratlan. A (8) szerinti amplitúdókarakterisztika (19)-ből, az $N=M/2$ jelölést alkalmazva (7. ábra):

$$\tilde{F}_0(\Omega) = \frac{\sum_{n=0}^{\langle N \rangle} \binom{M}{2n} (1 + \Omega_z^2)^{N-n} (\Omega_z^2 - \Omega^2)^n}{(1 + \Omega^2)^N}. \quad (20)$$

Az $\tilde{F}(s)$ függvényt $F_0 = \tilde{F}_0(0)$ mennyiséggel normalizálva kapjuk meg a keresett $\tilde{K}(s)$ referens átviteli függvényt. Az F_0 normalizáló tényező éppen az adott M és Ω_z mellett elérhető zárótartománybeli



7. ábra. Egyenletes zárótartományú normalizálatlan referens karakterisztikák

elnyomásra jellemző, a zárócsillapítás: $a_z = 20 \log F_0$ [dB]. Ha a Ω_z nagy ($\Omega_z^2 + 1 \approx \Omega_z^2$), akkor (20)-ból:

$$F_0 \approx \frac{(2\Omega_z)^M}{2}$$

A FIR digitális szűrő amplitúdókarakterisztikája (20)-ból határozható meg. A normalizálást is figyelembe véve, átalakítások után a

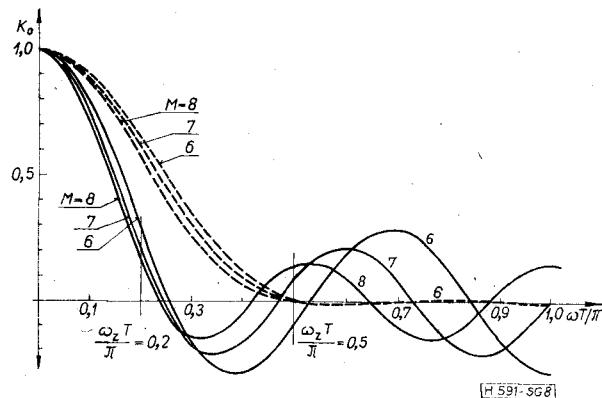
$$K_0(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{n=0}^{\langle N \rangle} \binom{M}{2n} (1 + \cos \omega T)^{N-n} (\cos \omega T - \cos \omega_z T)^n}{\sum_{n=0}^{\langle N \rangle} \binom{M}{2n} 2^{N-n} (1 - \cos \omega_z T)^n} \quad (21)$$

kifejezést kapjuk (8. ábra). A (20)-ból meghatározhatjuk, a referens számlálópolinom b_r együtthatóit is:

$$b_r = (-1)^r \frac{\sum_{n=r}^{\langle N \rangle} \binom{M}{2n} \binom{n}{r} (1 + \Omega_z^2)^{N-n} \Omega_z^{2(n-r)}}{\sum_{n=0}^{\langle N \rangle} \binom{M}{2n} (1 + \Omega_z^2)^{N-n} \Omega_z^{2n}}. \quad (22)$$

Nyilvánvalóan $b_0 = 1$ és páros M esetén $b_N = 1/F_0$. A b_r értékeket a (10) összefüggésbe helyettesítve a d_i együtthatóknak — a fokszám paritástól függetlenül érvényes — explicit kifejezése állt elő. E d_i szűrőegyütthatók a TRANSCO program segítségével szintén előállíthatók (3. táblázat).

Az előállított FIR digitális aluláteresztő zárócsillapítása, az [5, 14] eljárásaihoz hasonlóan, az adott



8. ábra. Lineáris fázisú, egyenletes zárótartományú FIR digitálisszűrő-karakterisztikák

M és Ω_z mellett elérhető legnagyobb. Ennek következménye egyrészt, hogy a szűrőgyűjtthetők mindig pozitívak. (Ezt könnyen beláthatjuk a lineáris fázisú FIR szűrők amplitúdókarakterisztikájának d_l gyűjtthetőkkel felírt

$$K_0(e^{j\omega T}) = \begin{cases} d_{M/2} + 2 \sum_{l=1}^{M/2} d_{M/2-l} \cos l\omega T & (M \text{ páros}) \\ 2 \sum_{l=1}^{(M+1)/2} d_{\frac{M+1}{2}-l} \cos \left(l - \frac{1}{2} \right) \omega T & (M \text{ páratlan}) \end{cases}$$

3. táblázat

M = 8 fokú lineáris fázisú egyenletes zárótartományú szűrő együtthetói

$\omega_z T / \pi$	$d_0=d_8$	$d_1=d_7$	$d_2=d_6$	$d_3=d_5$	d_4	$a_z[\text{dB}]$
0,1	0,2894	0,0567	0,0601	0,0623	0,0630	5,6
0,2	0,1153	0,0881	0,1091	0,1233	0,1284	16,2
0,3	0,0500	0,0825	0,1250	0,1575	0,1697	28,0
0,4	0,0248	0,0684	0,1275	0,1793	0,2000	40,8
0,5	0,0139	0,0555	0,1248	0,1941	0,2236	55,2
0,6	0,0087	0,0456	0,1204	0,2042	0,2420	72,1
0,7	0,0061	0,0388	0,1159	0,2111	0,2559	93,1
0,8	0,0048	0,0345	0,1124	0,2155	0,2657	122,0
0,9	0,0041	0,0320	0,1101	0,2180	0,2715	170,6

alakjából.) Másrészt, hogy az áteresztő tartománybeli viselkedés függetlenül nem specifikálható. Mint a 8. ábráról leolvasható a zárótartománybeli követelmények által megkívánt fokszámnál nagyobb fokszám alkalmazása az áteresztő tartománybeli viselkedést kedvezőtlenül befolyásolja. Az áteresztő tartomány vizsgálatához az EQUTRANS karakterisztika számító program készült.

A különböző transformációkkal lineáris fázisú felüláteresztőt, sávzárót konstruálhatunk (1: 2.4 pont). Az egyenletes közelítésű, lineáris fázisú szűrőből fele akkora fokszámú minimálfázisú szűrőt Herrmann és Schüssler által javasolt módszerrel állíthatunk elő [20]. Jelen esetben azonban, mivel a $K(z)$ zérushelyei mind a z -sík egységkörén helyezkednek el, a lineáris fázismenet egyben a minimális fázis is. Ötletüket a fokszámkétszerezés zárócsillapításnövelő hatásának meghatározására alkalmazhatjuk.

Ha az amplitúdókarakterisztikát a zárótartománybeli ingadozás $1/F_0$ nagyságával megemeljük, kétszeres multiplicitású zérushelyeket kapunk. A zérushelyeket egyszeres multiplicitással tartalmazó, fele fokszámú lineáris fázisú szűrő karakterisztikája:

$$K_{0, M/2}(e^{j\omega T}) = \sqrt{\frac{K_{0, M}(e^{j\omega T}) + \frac{1}{F_0}}{1 + \frac{1}{F_0}}}$$

alakú lesz, ahol már figyelembe vettük az $1/F_0$ eltolás miatt szükségessé váló újrnormalizálást is. Az összefüggésből kiolvasható, hogy a zárótartománybeli ingadozás amplitúdója $1/F_0$ -ról a fokszám felezésével

$$\sqrt{\frac{2}{F_0+1}} \cong \sqrt{\frac{2}{F_0}}$$

értékűre nő. A fokszám kétszerezésével tehát egy a_z zárócsillapítás mintegy $2a_z + 6$ dB-re növelhető.

IRODALOM

- [1] Sallai Gy.: A mintavételező (digitális) szűrők osztályozása. Híradástechnika 27. k. 7. sz. 208—214. 1976 júl.
- [2] Sallai Gy.: A digitális szűrők tervezésének alapelvei. Híradástechnika 27. k. 9. sz. 257—268. 1976 szept.
- [3] J. F. Kaiser: System analysis by digital computer, John Wiley, New York (1966)
- [4] H. D. Helms: Nonrecursive digital filters; design methods for achieving specifications on frequency response. IEEE Trans. Audio El. acoust. Vol. 16. 336—342 (1968)
- [5] L. R. Rabiner, B. Gold.: Theory and application of digital signal processing. Prentice-Hall Inc. London, 1975
- [6] L. R. Rabiner, B. Gold, C. A. McGonegal: An approach to the approximation problem for nonrecursive digital filters. IEEE Trans. Audio El. acoust. Vol. 18. 83—106 (1970)
- [7] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer: Digital signal processing. Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1975
- [8] O. Herrmann: Design of nonrecursive digital filters with linear phase, Electronic Letters, Vol. 6. No. 11. 328—329 (1970)
- [9] E. Hofsetter, A. Oppenheim, S. Siegel: On optimum nonrecursive digital filters, Proc. 9th Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 789—798 Oct. 1971
- [10] L. R. Rabiner, I. H. McClellan, T. W. Parks: FIR digital filter design techniques using weighted Chebyshev approximation, Proc. IEEE, Vol. 63. 595—610 (1975)
- [11] O. Herrmann: On the approximation problem in nonrecursive digital filter design. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. 18. 411—413 (1971)
- [12] M. F. Fahmy: Maximally flat nonrecursive digital filters. Int. J. Circuit Theory and Appl. Vol. 4. 311—313 (1976)
- [13] J. F. Kaiser: Comments on maximally flat nonrecursive digital filters, Int. J. Circuit Theory and Appl. Vol. 5. 103 (1977)
- [14] S. O. Scanlan, J. D. Rhodes: Microwave networks with constant delay. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. 14. 290—297 (1967)
- [15] Sallai Gy.: Transzverzális szűrők tervezése leképzéssel és kompenzációval. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1976.
- [16] Gy. Sallai: Design of FIR digital filters from analog filters. Proc. of 5th Summer Symp. on Circuit Theory, Vol. 2. p. 74—78. Kladno, 1977
- [17] A. J. Gibbs: The design of digital filters, Aust. Telecomm. Res. J. Vol. 4. 29—34 (1970)
- [18] O. Herrmann: Transversal filter zur Hilbert-Transformation, Archiv. Elekt. Übertragung. Vol. 23. 581—587 (1969)
- [19] Géher K.: Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [20] O. Herrmann, W. Schüssler: Design of nonrecursive digital filters with minimum phase. Electronic Letters, Vol. 6. No. 11. 329—330 (1970)