

DR. GRAD JÁNOS
Távközlési Kutató Intézet

A mintavételes fázisszinkronizáció

ETO 621.316.727.072.9:921.376.4

Elektronikus áramköri rendszerek létrehozásánál az utóbbi években mind nagyobb szerephez jutottak a fázisszinkronizált áramkörök, a fázisban visszacsatolt rendszerek, a fáziszárt hurkok. (Angol kifejezéssel: phase locked loop, PLL; automatic phase control, APC.) Ezek az áramkörök kitűnnek sokoldalú felhasználhatóságukkal. Alkalmazási területük a demodulátor áramköröktől és vivőszűrőktől a fordulatszám-szabályozásig és frekvenciastabilizálásig terjed. Számos olyan feladat is megoldható PLL-áramkörökkel, ami más módszerrel bonyolultabb, vagy gyengébb minőségű megoldás lenne.

Bár valamennyi PLL-áramkör — alapelveit tekintve — azonos működésű, a sokrétű felhasználás megköveteli, hogy adott esetben bizonyos PLL-paraméterekre sajátos követelményeket szabjunk. Az adott célnak megfelelő PLL-áramkörök fejlesztése pedig már létre is hozta a fázisszinkronizált áramkörök sajátos kategóriáit.

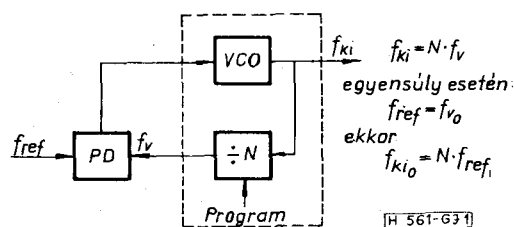
1. Alapvető szintéziskörök

A következőkben olyan fázisvisszacsatolt áramköröket tárgyalunk, amelyeknek jellegzetes felhasználásuk frekvencia-szintetizátoroknál van. A PLL-áramkörök a frekvencia-szintetizátorok alapáramkörei. Segítségükkel mód van arra, hogy frekvenciát megszorozzunk egy adott N állandóval (1. ábra), illetve lehetőség nyílik két frekvencia összeadására (2. ábra).

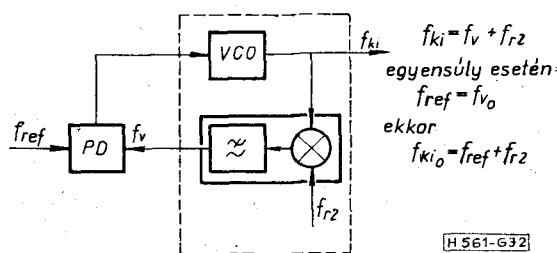
Mint minden PLL-körnek, úgy az 1. és 2. ábrán látható alapvető szintézisköröknek is lényeges része egy feszültségvezérelt oszcillátor (voltage controlled oscillator, VCO), valamint egy fázisdetektor (phase detector). Mint minden PLL-körben, itt is az a stabil egyensúlyi állapot ismérve, hogy a PD-fázisdetektor kimenetén a feszültség állandó, nem ingadozik. Állandó meghajtófeszültség hatására a VCO kimeneti f_{ki} frekvenciája is állandó lesz. Ebből az f_{ki} frekvenciából az 1. ábrán leosztás révén, a 2. ábrán lekeverés útján hozzuk létre az f_{v_0} visszacsatoló frekvenciát.

Egyensúlyi helyzetben f_{v_0} feltétlenül megegyezik f_{ref} -vel, hiszen állandó, nem változó fáziskülönbség csakis frekvenciaegyezés esetén lehetséges. A fáziskülönbség pedig feltétlenül állandó, hiszen egyensúlyi helyzetről beszélünk, amikor a fázisdetektor kimenő feszültsége konstans.

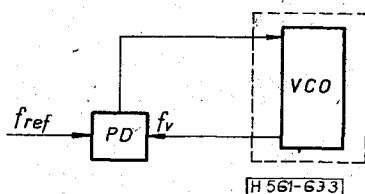
Megjegyzendő még, hogy a szabályozási kör nem törekszik a zérus fázishiba beállítására, hanem egy jól meghatározható fáziseltérést hoz létre f_{ref} és f_{v_0} között. A fáziseltérés akkora, hogy az általa előállított VCO meghajtófeszültség éppen az egyensúlyi állapotnak megfelelő f_{ki_0} kimenőfrekvenciát kelti. Amennyiben az 1. ábra szerinti körben az N osztási modulust, ill. a 2. ábra szerint f_{r2} referenciarekvenciát változtatjuk, f_{ki_0} kimenőfrekvenciának meg kell változni, de az $f_{ref} = f_{v_0}$ frekvenciaegyenlőség továbbra is megmarad. f_{ki_0} megváltozásának közvetlen oka a fázisdetektor kimenőfeszültségének változása, ez viszont az f_{ref} és f_{v_0} közti fáziskülönbség megválto-



1. ábra



2. ábra



3. ábra

zására vezethető vissza. Összefoglalóan elmondható, hogy szintézisköröknél a fázisszabályozás állandó fáziskülönbséggel (fázishibával) stabilizálódik.

Az 1. ábrán a VCO-t és a frekvenciacsökkentő áramkört (jelen esetben a programozható osztót a programforrással együtt) szaggatott vonallal körülhatárolt blokkban helyeztük el. Ugyanígy a 2. ábrán is elkülönítettük a VCO-t és a frekvenciacsökkentő áramkört. (A frekvenciacsökkentő áramkör most egy keverő aluláteresztő szűrővel, valamint az f_{r2} referenciarekvenciát létrehozó generátor.)

Az elkülönített blokk végeredményben tekinthető egyetlen fiktív VCO-nak is. Így a 3. ábrához jutunk. Az összehasonlás lehetővé teszi különböző felépítésű és viszonylag bonyolult szintéziskörök egyöntetű tárgyalását a 3. ábra szerinti egyszerű modell alapján.

2. Gyors frekvenciaszintézis

Amennyiben a PLL-kört frekvenciaszintetizátor részáramkörként használjuk, felvetődik a működési sebesség kérdése. A frekvenciaszintetizátor olyan jelgenerátor, amelynek frekvenciája numerikusan, esetleg távvezérléssel beállítható. Lényeges, hogy a vezérlési parancs beérkezése után röviddel a kimeneti frekvencia már ráálljon a kívánt értékre. Ha a beállási idő elegendően rövid, a szintetizátor sweep-generátorjelleggel is működhet. Ebben az esetben a vezérlés numerikus értékei gyors ütemben növekednek, ennek hatására a kimenőfrekvencia a vezérlésnek megfelelően növekszik és átsöpri a kívánt frekvenciasávot.

Vizsgáljuk meg, milyen körülmények között csökken le a PLL-körök beállási ideje olyan mértékben, hogy ezek az áramkörök gyors működésű frekvenciaszintetizátorokban felhasználhatók legyenek. Alapvető követelmény, hogy a PLL-körben a jelek futási ideje — késleltetése — a lehető legkisebb legyen. Más szóval, a 3. ábra modelljét véve alapul, a VCO-oszcillátor f_0 kimeneti frekvenciájának változását a PD-fázisdetektor a legrövidebb időn belül észlelje és hatására megfelelő kimeneti egyenfeszültséget produkáljon. Másfelől viszont a fázisdetektor kimeneti egyenfeszültségének változásait a VCO késlekedés nélkül kövesse és megfelelő f_0 kimenőfrekvenciát szolgáltatson.

Késleltetésmentes fázisdetektorról akkor beszélünk, ha a fázisdetektor kimenő köre nem tartalmaz frekvencia-aluláteresztő tulajdonságú elemet, vagyis integráló, szűrő, energiatároló tagot. Amennyiben a fázisdetektor kimenő körében, vagy a fázisdetektort követően kompenzáló kör gyanánt energiatároló lenne elhelyezve, úgy ez az energiatároló bizonyos fajta memóriaként működne: őrizné egy ideig a fázisdetektorra kerülő fázisinformációkat.

3. Mintavételes fázisdetektor

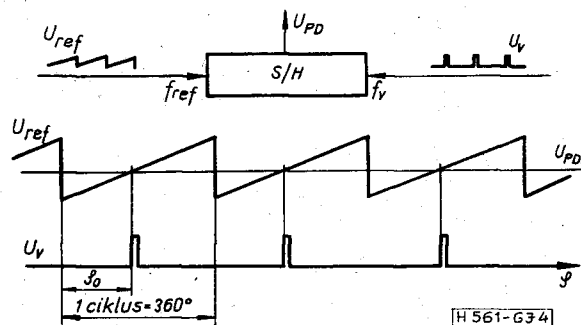
Gyors működésű PLL-körbe memóriamentes fázisdetektor céljaira egy ún. mintavevő-tartó áramkör (sample and hold, S/H) alkalmazása kínálkozik. A mintavevő áramkör a következő módon működik: Két bemenete van, egy analóg jelbemenet és egy mintavevő bemenet. A mintavevő bemenetre nagyon keskeny impulzustűk sorozatát kell adni. Az impulzustű tartama alatt az áramkör mintát vesz az analóg bemenet jeléből. A mintavett jel a kimenetre kerül. A kimeneten a mintavételi jelszint megmarad a következő mintavétel pillanatáig. Ekkor megváltozik a kimeneti jelszint, felveszi az analóg bemeneti jelnek azt az értékét, amit az újabb mintavétel pillanatában az éppen viselt.

Ez a mintavevő (S/H) áramkör jól felhasználható lineáris, memóriamentes fázisdetektorként. Adjunk az analóg bemenetre lineárisan emelkedő fűrészelet, amelynek frekvenciája a PLL-kör referenciarekvenciájával egyenlő, vagyis f_{ref} . A mintavevő bemenetre a PLL-kör f_0 frekvenciájú visszacsatoló jele kerüljön keskeny impulzussorozat formájában. A fázis-visszacsatolt hurok egyensúlya esetén a mintavevő impulzus beérkezésének φ_0 fázishelyzete az f_{ref} frekvenciájú fűrészelet lefutó éléhez képest változatlan marad, tehát állandó lesz a mintavevő kimenőfeszültsége. Egy másik φ fázishelyzethez másik kimenőfeszültség tartozik. A lehetséges fázishelyzet egy teljes ciklus ($0^\circ \dots 360^\circ$) fázisstartományának bármely értékét felveheti és a fázishelyzettel lineáris kapcsolatban álló kimenőjelet szolgáltat (4. ábra).

4. Mintavételes fáziszárt hurok

A fáziszárt hurok működése nagy mértékben függ az alkalmazott fázisdetektor felépítésétől. Az idevonatkozó irodalom részletesen tárgyalja a szorzókeverő jellegű fázisdetektorokat [1], [2], [3], foglalja egyenirányító jellegű (diódás) fázisdetektorokkal [4], valamint logikai elemekkel és töltés-utánhúzóval ellátott kapcsolásokkal [5]. E megoldásoknál a fázisdetektor mindig el van látva aluláteresztő szűrővel, vagy töltés-utánhúzóval, tehát energiatárolóval. A kimenőjel változása mindig folytonos, a PLL-kör működését differenciálegyenlet írja le. Az elméleti irodalom végeredményben ezen differenciálegyenlet vizsgálatát adja.

A mintavételező fázisdetektor kimenőjele nem folytonos, így modellünk szerint a VCO kimenőfrekvenciája, f_0 is ugrásszerűen változik a mintavételek pillanataiban.



4. ábra

natában. A teljes fáziszárt hurok dinamikáját a szakaszos működés miatt nem differenciál-, hanem differenciaegyenlet írja le.

A következőkben írjuk fel a mintavételező fáziszárt hurok működési egyenletét.

5. Egységválasztás, normalizálás

A hurokműködést leíró körjellemzők számának csökkentése végett válasszunk megfelelő frekvencia-, idő- és fázisegységeket.

A frekvenciaegység legyen azonos az f_{ref} referenciafrekvenciával.

Az időegység legyen a referenciajel periódusideje:

$$f_{ref}=1; \quad T_{ref}=\frac{1}{f_{ref}}=1.$$

Fáziszögegységnek a teljes 360° -os ciklust választjuk. Az 5. ábra diagramján a független változó tengelyére vigyük fel a t időt oly módon, hogy a $t=0$ origópont a referenciafűrész egyik visszafutó élével essék egybe. Időegység-választásunk miatt a fűrészvisszafutásokhoz tartozó időérték mindig egész szám lesz. Fűrész-visszafutás a $t=0, 1, 2, \dots$ időpontokban következik be. A referencia fűrészjel tehát periodikus függvény, mégpedig egységválasztásunk miatt 1-ben periodikus.

Az egy perióduson belüli fázisállapotot jelölje φ . Értelmezési tartománya a $[0, 1)$ alulról zárt, felülre nyílt intervallum. A referenciafeszültség pillanatértéke φ lineáris függvénye. A fűrészfeszültség minimumhelye $\varphi=0$ -nál:

$$U(\varphi=0)=U_m.$$

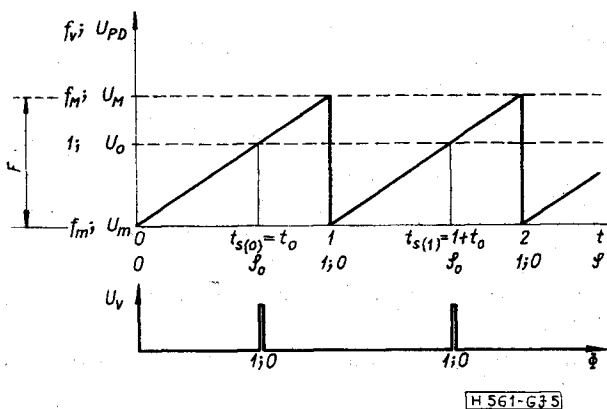
A fűrészfeszültség maximumhelye, ha φ megközelíti a $\varphi=1$ értéket (fel nem veheti, hiszen az intervallum felülre nyílt):

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1} U(\varphi)=U_M.$$

φ fáziszög egyértelműen kapcsolódik a referencia fűrészfeszültséghez, ezért referencia fáziszögnek nevezzük. A folyó t idő és a φ közötti kapcsolat:

$$\varphi=t-\text{int } t, \quad (1)$$

ahol az $\text{int } t$ művelet t egész részének képzését jelenti.



5. ábra

A fűrészfeszültség lefolyása és a referencia fáziszög között lineáris a kapcsolat:

$$U(\varphi)=U_m+(U_M-U_m)\varphi. \quad (2)$$

Hurokegyensúly esetén periódusról periódusra mindig ugyanannál a φ_0 fáziszögnél történik a mintavétel, a fűrészjelből mintavett feszültség értéke: U_0 . Ez az egyensúlyi feszültség jelenik meg mintavételről mintavételre a fázisdetektor kimenetén és ez kerül rá a VCO bemenetére. Hatására a VCO f_v visszacsatoló frekvenciát bocsát rá a fázisdetektorra. Ha a mintavétel a fűrészjel minimumánál, U_m feszültségnél történik, a visszacsatoló frekvencia f_m lesz, míg a maximális U_M feszültséghez f_M frekvencia tartozik.

Egy általános helyzetű mintavételhez $U(\varphi)$ mintavett feszültség tartozik, ez a feszültség a VCO által a visszacsatoló ágban f_v frekvenciát hoz létre. Egyensúlyi, φ_0 helyzetű mintavételhez U_0 mintavett feszültség, ehhez pedig f_{v_0} frekvencia tartozik. Egyensúly esetén: $f_v=f_{v_0}=f_{ref}$. Az egységválasztás miatt $f_{ref}=1$, így $f_{v_0}=1$.

A nagyságviszonyokra nézve: $f_m \leq 1$ (egyenlőség akkor van, ha $\varphi_0=0$) és $f_M > 1$, továbbá a bal oldali határértékre:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1} f_{v_0}=f_M=1.$$

A későbbiekben szükség lesz az

$$F=f_M-f_m \quad (3)$$

különbségre, amit frekvenciaviszonynak fogunk nevezni.

6. Kapcsolat a frekvencia és fázis között

A (2) összefüggés a fázishelyzet és a fázisdetektor kimenőfeszültsége közti kapcsolatot mutatja. A feszültséggel a VCO-t kívánjuk megfelelő kimenőfrekvenciára vezérelni. Az $U(\varphi)$ feszültségre – mint különböző mennyiségre – a későbbiekben nincs szükség, a φ fáziszög segítségével közvetlenül kifejezhető a VCO frekvencia:

$$f_v=f_m+(f_M-f_m)\varphi=f_m+F\varphi. \quad (4)$$

Speciálisan, egyensúlyi állapotban, amikor $f_v=f_{v_0}=1$ és $\varphi=\varphi_0$:

$$1=f_m+F\varphi_0. \quad (5)$$

Innen megállapítható az adott F frekvenciaviszonyhoz tartozó egyensúlyi φ_0 fáziszög:

$$\varphi_0=\frac{1-f_m}{F}. \quad (6)$$

Az 5. ábra diagramján a mintavétel egyensúlyi állapotban történik, mindig φ_0 referencia fáziszög mellett. Jelöljük a mintavételezések időpontját $t_{s(i)}$ módon, ahol az i index az i -edik mintavételezést jelenti. Az egyensúlyi helyzetű mintavételezés jele: $t_{s(i)}$. Az 5. ábra szerint az egyensúlyi mintavételezés a

$$\begin{aligned}
 t_{s(0)} &= t_{s(0)} = t_0 \text{ (a 2. egyenlőség } t_0 \text{ definíciója)} \\
 t_{s(1)} &= t_{s(1)} = 1 + t_0 \\
 t_{s(2)} &= t_{s(2)} = 2 + t_0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 t_{s(i)} &= t_{s(i)} = i + t_0 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

időpillanatokban történik.

A mintavételt bizonyos t_s időpillanatokban a visszacsatoló ágból beérkező impulzustűk hozzák létre. Miként a referenciajel egy teljes periódusához hozzáilleszthetünk egy φ fázisállapotot, úgy a visszacsatolt jelhez is hozzáilleszthetünk egy Φ fázishelyzetet. Φ neve: visszacsatoló fázis. Értelmezési tartománya a $[0, 1)$ alulról zárt, felülről nyílt intervallum.

Az i -edik mintavétel $t_{s(i)}$ pillanatában $\Phi = 0$. Ezután az idő múlásával Φ monoton növekszik, amíg a $\Phi = 1$ értéket meg nem közelíti. Φ értelmezési tartománya felülről nyílt intervallum lévén, a $t_{s(i+1)}$ időpontban $\Phi = 1$ nem jöhet létre, helyette visszabilenés történik $\Phi = 0$ -ra. A visszabilenéssel egyidőben újabb mintavétel zajlik le.

Mivel Φ visszacsatoló fázis a VCO kimenőjelének jellemzője, annak frekvencia-idő függvényéből, $f_v(t)$ -ből származtatható:

$$f_v(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t) \quad t \neq t_{s(i)}$$

Innen integrálással:

$$\Phi(t) = \Phi(t_a) + \int_{t_a}^t f_v(\tau) d\tau,$$

ahol t_a az integrálás kezdő ideje. A kifejezés t -ben folytonos és monoton növekedő. Így Φ egy bizonyos t_s időpontban eléri, aztán meg is haladja a $\Phi(t_s) = 1$ értéket. Azonban a $t = t_s$ időpontban mintavétel történik, így ekkor Φ visszabilen a $\Phi(t_s) = 0$ fázishelyzetbe és a növekedés újra kezdődik. Ez a függvénykonstrukció úgy hozható létre, ha a fenti határozott integrál tört részét képezzük:

$$\Phi(t) = \left(\Phi(t_a) + \int_{t_a}^t f_v(\tau) d\tau \right) - \text{int} \left(\Phi(t_a) + \int_{t_a}^t f_v(\tau) d\tau \right). \quad (7)$$

A (7) összefüggés a VCO-ból eredő f_v visszacsatoló frekvencia és az általa eredményezett Φ visszacsatoló fázis közti kapcsolatot írja le.

7. Mintavételezés

Φ hatására mintavétel történik a megfelelő $t_{s(i)}$ időpontban. Két mintavétel között (ugyanabban a mintavételi ciklusban) f_v értéke nem változik, hiszen f_v csakis mintavétel alkalmával vehet fel újabb értéket. Így, amennyiben a (7) egyenletnél olyan t_a kezdőidőt választunk, amelynél

$$t_{s(i)} \leq t_a < t_{s(i+1)},$$

és az integrálás felső határával nem érjük el a következő mintavétel idejét, vagyis

$$t_a \leq t < t_{s(i+1)},$$

akkor újabb mintavétel nem történik. Ebben az intervallumban végezve a műveleteket, (7) második tagja elhagyható:

$$\text{int} \left(\Phi(t_a) + \int_{t_a}^t f_v(\tau) d\tau \right) = 0.$$

(7) első tagjánál f_v -nek az t -edik mintavételi ciklusban felvett, és ezen cikluson belül állandó értékét jelöljük $f_{v(i)}$ -vel. Ezt az állandót integrálva:

$$\Phi(t) = \Phi(t_a) + f_{v(i)}(t - t_a), \quad (8)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 t_{s(i)} &\leq t_a \leq t < t_{s(i+1)}, \\
 \Phi(t_{s(i)}) &= 0.
 \end{aligned}$$

(8)-ból kiszámítható az újabb, $(i+1)$ -edik mintavétel időpontja, $t_{s(i+1)}$. Ekkor ugyanis (8)-ban $\Phi(t)$ felveszi $\Phi(t_{s(i+1)}) = 1$ értéket.

$$t_{s(i+1)} = t_a + \frac{1 - \Phi(t_a)}{f_{v(i)}}. \quad (9)$$

Megjegyzendő, hogy a (7) kifejezésben alsó integrálási határnak többnyire $t_a = t_{s(i)}$ érték választandó. Ekkor (9) így egyszerűsödik:

$$t_{s(i+1)} = t_{s(i)} + \frac{1}{f_{v(i)}}. \quad (10)$$

Most már rendelkezésünkre állnak azok az egyenletek, amelyeknek segítségével a mintavételező fáziszárt hurok tárgyalható.

8. Induló folyamat

Nézzük az időfolyamat menetét. Indítsuk a folyamatot t_a pillanatban, tehát (1) szerint a

$$\varphi_a = t_a - \text{int } t_a, \quad (11)$$

referenciafázis helyzetből a nem összetartozó Φ_a, f_{va} értékekkel. A legelső mintavétel ($t=0$) időpontja (9) szerint számítható:

$$t_{s(0)} = t_a + \frac{1 - \Phi_a}{f_{va}}. \quad (12)$$

A mintavétel pillanatában felvett referencia fázishelyzet (1) alapján:

$$\varphi_{(0)} = t_{s(0)} - \text{int } t_{s(0)}. \quad (13)$$

A mintavétel a referencia fűrészel $\varphi_{(0)}$ fázisánál történik. Ez a mintavétel (4) szerint

$$f_{v(0)} = f_m + F\varphi_{(0)}, \quad (14)$$

frekvenciát fog eredményezni. $f_{v(0)}$ frekvenciával rezeg a VCO a következő mintavételig, ami a $t_{s(1)}$ időpontban következik be. Ez az időpont már nem (9)-ből, hanem (10)-ből számítható, hiszen az előző ciklus mintavétellel fejeződött be. Az új ciklusnál az időszámítás a $t_a = t_{s(0)}$ mintavételi értéknél kezdődik:

$$t_{s(1)} = t_{s(0)} + \frac{1}{f_{v(0)}}.$$

A referencia fázishelyzet (1)-ből:

$$\varphi_{(1)} = t_{s(1)} - \text{int } i_{s(1)}.$$

A folyamat így megy tovább magasabb i indexértékek mellett is. Összefoglalva: Induló folyamatnál a (11), (12) és (13) egyenlet használandó.

9. Alapegyenlet rendszer

Folyamatos mintavételezésnél ($i=0, 1, 2, \dots$) rendre felhasználandó a (10), (15), (16) egyenlet. Megjegyzendő, hogy (15) és (16) egyenletek az (1) és (4) egyenlet ($i+1$) indexű alakja.

$$t_{s(i+1)} = t_{s(i)} + \frac{1}{f_{v(i)}}, \quad (10)$$

$$\varphi_{(i+1)} = t_{s(i+1)} - \text{int } t_{s(i+1)}, \quad (15)$$

$$f_{v(i+1)} = f_m + F\varphi_{(i+1)}. \quad (16)$$

Így az i -edik mintavétel adataiból kiszámíthatók az $(i+1)$ -edik mintavétel adatai.

A (10), (15), (16) differenciagyenletekből álló egyenletrendszer analízisével a mintavételező fázisszinkronizált kör tulajdonságai részletesen elemezhetők. Az egyenletrendszerben csak egyetlen körparaméter szerepel: az F frekvenciaviszony. Így valamennyi kördinamikai tulajdonság F függvénye lesz.

A nagy jelű analízis bonyolult és hosszadalmas. Nem túlságosan nehéz viszont a kis jelű stabilitás kritériumát megadni. Ez a stabilitási kritérium alapvető jellegű a mintavételező fáziszárt hurok méretezésénél.

Írjuk fel (10), (15), (16) egyenleteinket az egyensúlyi helyzetben. Egyensúly esetén (10)-ben $f_{v(i)} = 1$, valamint $i_{s(i)} = t_{s(i)}$. Ezáltal

$$t_{s(i+1)} = t_{s(i)} + 1 = t_{s(i+1)}, \quad (17)$$

(15) egyenlet a most kiszámított $i_{s(i+1)}$ értékkel:

$$\varphi_{(i+1)} = t_{s(i+1)} - \text{int } (t_{s(i+1)}) = t_{s(i)} - \text{int } t_{s(i)} = \varphi_{(i)}.$$

Tehát az $(i+1)$ -edik mintavételi struktúra egyensúly esetén megegyezik az i -edik mintavételi struktúrával. Ezt az egyensúlyi fázishelyzetet a (6) egyenletben φ_0 -nak jelöltük. Tehát egyensúly esetén:

$$\varphi_{(i+1)} = \varphi_{(i)} = \varphi_0.$$

Eddigi levezetésünk azt mutatja, hogy ha valamilyen i -edik mintavételkor a mintavétel fázishelyzete $\varphi_{(i)} = \varphi_0$, akkor a következő mintavételi fázishelyzet is ugyanez lesz, azaz

$$\varphi_{(i+1)} = \varphi_0.$$

10. Egyváltozós alapegyenlet

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy amennyiben az i -edik mintavétel nem egyensúlyi helyzetű, vagyis $\varphi_{(i)} \neq \varphi_0$, mi lesz az $(i+1)$ -edik mintavétel fázishelyzete.

A nem egyensúlyi mintavétel történjen a φ_0 egyensúlyi állapottól $\Delta\varphi$ eltéréssel:

$$\varphi_{(i)} = \varphi_0 + \Delta\varphi_{(i)}, \quad (18)$$

(17)-ből a mintavételi idő segítségével így adható meg a mintavételi fázis:

$$\varphi_{(i)} = i_{s(i)} - \text{int } t_{s(i)} = t_{s(i)} + \Delta t_{s(i)} - \text{int } (t_{s(i)} + \Delta t_{s(i)}), \quad (19)$$

(19)-ben $\Delta t_{s(i)}$ jelentése: az i -edik mintavételi időpont eltérése az egyensúlyi $i_{s(i)}$ értéktől.

Az egyensúlyi helyzettől való kis eltéréskor:

$$\text{int } (t_{s(i)} + \Delta t_{s(i)}) = \text{int } i_{s(i)}. \quad (20)$$

Ezáltal

$$\varphi_{(i)} = t_{s(i)} - \text{int } t_{s(i)} + \Delta t_{s(i)} = \varphi_0 + \Delta t_{s(i)}.$$

Az utóbbi egyenlőség sor végeredményét összevetve (18)-cal:

$$\Delta\varphi_{(i)} = \Delta t_{s(i)} \quad (21)$$

(18)-ből kiszámítható az i -edik mintavételi ciklus visszacsatolási frekvenciája:

$$f_{v(i)} = f_m + F\varphi_{(i)} = f_m + F(\varphi_0 + \Delta\varphi_{(i)}) = 1 + F\Delta\varphi_{(i)}, \quad (22)$$

(22) kiszámításánál felhasználtuk a (4) összefüggést.

Az újabb $(i+1)$ -edik mintavétel időpontja (10) alapján számítható, de a kifejtésbe a (17) azonosságot és (22) végértéket is beírjuk:

$$\begin{aligned} t_{s(i+1)} &= t_{s(i+1)} + \Delta t_{s(i+1)} = i_{s(i+1)} + 1 + \Delta t_{s(i+1)} = \\ &= i_{s(i)} + \frac{1}{f_{v(i)}} = t_{s(i)} + \Delta t_{s(i)} + \frac{1}{1 + F\Delta\varphi_{(i)}}. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőség sor 3. és 5. tagját összevetve:

$$i + \Delta t_{s(i+1)} = \Delta t_{s(i)} + \frac{1}{1 + F\Delta\varphi_{(i)}}. \quad (23)$$

Végezetül (21) összefüggést i , valamint $(i+1)$ indexszel véve:

$$\Delta\varphi_{(i+1)} = \Delta\varphi_{(i)} + \frac{1}{1 + F\Delta\varphi_{(i)}} - 1. \quad (24)$$

A (24) egyváltozós nemlineáris differenciagyenlet a mintavételező fázisszinkronizáló alapegyenlete. Nemcsak kis jelű, hanem nagy jelű vizsgálatokra is alkalmas. A nagy jelű folyamatokat mindaddig helyesen írja le, amíg a (20) egyenlőség érvénye fennáll.

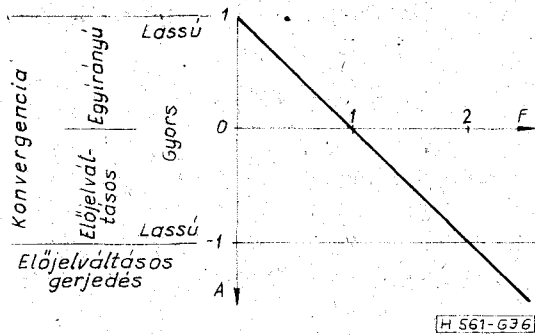
11. Kisjelű működés

(24) átrendezésével a következő formula nyerhető:

$$\frac{\Delta\varphi_{(i+1)}}{\Delta\varphi_{(i)}} = (i - F) + F(\Delta\varphi_{(i)} - \Delta\varphi_{(i+1)}). \quad (25)$$

Most használjuk fel a kis jelű üzemvitel sajátosságait. $\Delta\varphi_{(i)}$ legyen nagyon kicsi. A hatására előáll $\Delta\varphi_{(i+1)}$ is nagyon kicsi lesz:

$$\lim_{\Delta\varphi_{(i)} \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_{(i+1)}}{\Delta\varphi_{(i)}} = \frac{d\varphi_{(i+1)}}{d\varphi_{(i)}} = 1 - F. \quad (26)$$



6. ábra

Alkalmazzuk az alábbi jelölést:

$$\frac{d\varphi_{(i+1)}}{d\varphi_{(i)}} = A. \quad (27)$$

Az A tényezőt hurokátvitelnek nevezzük. Az elnevezés fizikai háttere szemléletes. Ha az i -edik mintavételi ciklusban az egyensúlyi helyzettől $d\varphi_{(i)}$ távolságban történt a mintavétel, akkor a következő, $(i+1)$ -edik mintavételkor a mintavételi hiba:

$$d\varphi_{(i+1)} = A d\varphi_{(i)},$$

illetve

$$\Delta\varphi_{(i+1)} \approx A \Delta\varphi_{(i)}. \quad (28)$$

Az A hurokátviteli tényező éppen azt fejezi ki, hogy két egymást követő mintavétel során hogyan változik, hányszorosára nő, vagy hányadrészt csökken a mintavételi hiba. Az A hurokátviteli tényező (26) szerint az F frekvenciaviszony egyszerű függvénye:

$$A = 1 - F. \quad (29)$$

Mivel $F > 0$, így az $A < 1$ reláció mindig érvényes. Az A és F közötti (29) kapcsolatot a 6. diagram szemlélteti:

12. Stabilitás

Az A mennyiség ismeretében a kis jelű üzemmód fázishibáinak változása könnyen leírható. Amennyiben az i -edik mintavétel fázishibája $\Delta\varphi_{(i)}$, úgy az ezt követő k -dik mintavételezés fázishibája:

$$\Delta\varphi_{(i+k)} = A^k \Delta\varphi_{(i)}, \quad (30)$$

k növekedésével akkor csökken $\Delta\varphi_{(i+k)}$, ha $|A| < 1$, ill. $F < 2$. Ebben az esetben

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\varphi_{(i+k)} = 0.$$

A tranzienst folyamat az állandósult φ_0 mintavételezésű folyamathoz közelít. Ezzel tehát felírtuk a stabilitás feltételét.

Amennyiben $A < 0$, akkor $\Delta\varphi_{(i+1)}$ ellentétes előjelű lesz $\Delta\varphi_{(i)}$ -hez képest. A tranzienst folyamat az előjelváltások során át zajlik le. Különösen gyors konvergenciát nyerünk az $A = 0$, azaz $F = 1$ esetben. Ekkor azonnal, az első mintavételezéssel beáll a folyamat a végállapotba. A konvergencia sebességére

vonatkozó vizsgálat (30) alapján könnyen elvégezhető. Eredményeinket a 6. ábra tünteti fel.

$F > 2$, ill. $A < -1$ esetén a φ_0 egyensúlyi helyzettől való bármilyen kicsiny $\Delta\varphi_{(i)}$ eltérés a mintavételező folyamat során növekedni fog.

$$|\Delta\varphi_{(i+1)}| > |\Delta\varphi_{(i)}| \quad i=0, 1, 2, \dots \text{ ha } A < -1.$$

Ebben az esetben a φ_0 egyensúlyi helyzet labilis. k növekedésével $|\Delta\varphi_{(i+k)}|$ növekszik, az egyensúlyi állapottól való eltérések egyre nagyobbakká válnak. Nagy eltérések esetén a (26)-ban leírt határátmenet már közelítőleg sem lesz érvényes, így a kis jelű modell érvényét veszti.

Megjegyzendő, hogy a nagy jelű analízis szerint is érvényes az 5. ábrán feltüntetett diagram, a stabilitás határese:

$$F = 2.$$

13. Analízis a programozható osztójú alapkörre

Eddigi analízisünket a 3. ábra egyszerűsített PLL-modelljére végeztük. Az 1. pontban említettük, hogy a nyert eredmények az 1. és 2. ábra szerinti alapvető szintéziskörökre is vonatkoztathatók lesznek. Alkalmazási példaként nézzük meg egy programozható osztóval ellátott mintavételező szintéziskör stabilitási viszonyait.

Az egyensúlyi kimenőfrekvencia az 1. ábra szerint:

$$f_{k0} = N \cdot f_{ref}.$$

Amennyiben egyensúlyi helyzet nem állott még elő, a fázisdetektor vezérlőfeszültségének hatására a kimenőfrekvencia egy $f_{ki \min}$ és egy $f_{ki \max}$ között változhat.

A programozható osztó aktuális N osztási modulusának és f_{ki} kimenőfrekvenciának ismeretében az f_v visszacsatoló frekvencia kiszámítható:

$$f_v = f_{ki}/N,$$

f_v minimális és maximális értéke:

$$f_{v \min} = f_{ki \min}/N,$$

$$f_{v \max} = f_{ki \max}/N.$$

Az egyensúlyi helyzet:

$$f_{v0} = f_{ref}.$$

E számolással már át is tértünk a 3. ábra egyszerűsített modelljére. $f_{v \min}$, $f_{v \max}$, valamint f_{v0} a VCO és a frekvenciaosztó együttese által alkotott fiktív VCO kimenőadatai lesznek.

A számítás során f_v értékét f_{ref} által normalizálni lehet. A normalizálás során az alábbi frekvencia-értékek jönnek létre.

$$f_{v0} = f_{ref} \rightarrow 1,$$

$$f_{v \min} \rightarrow f_m = f_{ki \min}/N f_{ref},$$

$$f_{v \max} \rightarrow f_M = f_{ki \max}/N f_{ref}.$$

A hurokdinamikát meghatározó F frekvenciaviszony:

$$F = f_M - f_m = \frac{f_{ki \max} - f_{ki \min}}{N f_{ref}}. \quad (31)$$

Látható, hogy F értéke az N osztási modulus függvénye lesz. Ez azt jelenti, hogy N megváltoztatásával (a programozás által) változni fog a hurok dinamikája is.

Az egyensúlyi fázishelyzet (6) alapján:

$$\varphi_0 = \frac{1 - f_m}{F} = \frac{N f_{ref} - f_{ki \min}}{f_{ki \max} - f_{ki \min}} \quad (32)$$

14. Méretezési példa

Méretezzünk programozható osztójú mintavételező szintéziskört az alábbi adatokkal:

$f_{ki} = 20$ MHz; 20,5 MHz; 21 MHz; ...; 30 MHz (21 frekvenciahelyzet).

Frekvenciafelbontás:

$$\Delta f_{ki} = 0,5 \text{ MHz.}$$

A feladat megoldható olyan fáziszárt körrel, amelynek referenciarekvenciája:

$$f_{ref} = \Delta f_{ki} = 0,5 \text{ MHz,}$$

programozható osztójának osztási modulusa

$$N = 40, 41, \dots, 60,$$

értéket vehet fel. N számsorában $N_{\min} = 40$, $N_{\max} = 60$.

A referenciát biztosító fűrészfeszültség amplitúdója olyan legyen, hogy a kimenőfrekvenciát a kellő biztonsági sávval legyen képes biztosítani.

$$f_{ki \min} = 18 \text{ MHz,}$$

$$f_{ki \max} = 33 \text{ MHz.}$$

A frekvenciaviszony (31)-ből:

$$F = \frac{f_{ki \max} - f_{ki \min}}{N f_{ref}} = \frac{1}{N} \frac{33 \text{ MHz} - 18 \text{ MHz}}{0,5 \text{ MHz}} = \frac{15}{N},$$

$$F_{\max} = \frac{15}{N_{\min}} = \frac{15}{40} = 0,375 < 1.$$

Az 5. ábra alapján F_{\max} mellett a hurok stabil működésű és egyirányú konvergenciával rendelkezik.

Ha $N > N_{\min}$, akkor $F < F_{\max}$, a stabil működés és egyirányú konvergencia fennmarad. Az osztási modulus másik szélső eseténél, N_{\max} -nál:

$$F_{\min} = \frac{15}{N_{\max}} = \frac{15}{60} = 0,25.$$

A hurok egyensúlyi fázishelyzete (32) szerint a két szélső helyzetben:

$$\begin{aligned} \varphi_{0 \min} &= \frac{N_{\min} f_{ref} - f_{ki \min}}{f_{ki \max} - f_{ki \min}} = \frac{40 \cdot 0,5 \text{ MHz} - 18 \text{ MHz}}{33 \text{ MHz} - 18 \text{ MHz}} = \\ &= 0,1333 \text{ ciklus} = 48^\circ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{0 \max} &= \frac{N_{\max} f_{ref} - f_{ki \min}}{f_{ki \max} - f_{ki \min}} = \frac{60 \cdot 0,5 \text{ MHz} - 18 \text{ MHz}}{33 \text{ MHz} - 18 \text{ MHz}} = \\ &= 0,8 \text{ ciklus} = 288^\circ. \end{aligned}$$

N változtatásával $\varphi_{0 \min}$ és $\varphi_{0 \max}$ között változhat a φ_0 egyensúlyi fázishelyzet. $\Delta N = 1$ egylépéses programváltozásakor φ_0 megváltozása:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_0 &= \frac{f_{ref}}{f_{ki \max} - f_{ki \min}} = \frac{0,5 \text{ MHz}}{33 \text{ MHz} - 18 \text{ MHz}} = \\ &= 0,0333 \text{ ciklus} = 12^\circ. \end{aligned}$$

Ezzel elvégeztük a megadott adatok mellett a programozható osztójú szintéziskör hurokméretezését és stabilitásvizsgálatát.

I R O D A L O M

- [1] Viterbi, A. J.: Principles of Coherent Communication; McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [2] Gardner, F. M.: Phaselock Techniques; Wiley, London, 1966.
- [3] Lindsay, W. C.: Synchronization Systems in Communication and Control; Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [4] Шахильдяя, В. В., Ляховский, А. А.: Системы фазовой автоподстройки частоты. Связь, Москва, 1972.
- [5] Motorola: Applications Information MC4344, MC4044 Phase-Frequency Detector.