

A Fourier-transzformáció és a híradástechnika

ETO 517.982.43:621.39

A Fourier transzformációt (a továbbiakban röviden: FT) mértékadó forrás [1] azon néhány alapvető művelet között említi, amelyeket az új elektronikai módszerekre épülő számítógépektől várhatunk. Jelanalizátorok már ma is gyakran rendelkeznek FT-t végző kiegészítéssel [2]. Az FT-re és a számítógépes technika eszközeire támaszkodva készülnek jelvizsgálók, amelyek egy távbeszélő csatorna jeléből gyakorlatilag folyamatosan, azonos idejű feldolgozásban képesek a frekvenciaspektrumot meghatározni [3]. Ismételten egy klasszikus elméleti eszköz elterjedt munkaeszközzé válásának részesei lehetünk. A folyamatban — a számítógépes eszközök fejlődése, terjedése mellett — az FT numerikus kiszámítására alkalmas diszkrét Fourier transzformáció (DFT) és az utóbbi számítási műveletszám igényét lényegesen csökkentő gyors („fast”) Fourier transzformáció (FFT) játszanak nagy szerepet.

E cikk tárgya: a híradástechnika néhány FT-re vezető problémája, majd az FT, a DFT és az FFT lényege. Törekvünk: viszonylag átfogó, az alkalmazási lehetőségeket felvillantó tárgyalás, mely követhető csupán a komplex számok és a valós függvénytan alapfogalmainak az ismeretében is — keresve az ennek megfelelő, az irodalomban szokásosnál helyenként eltérő tárgyalási módot. Az FT elemi trigonometrikus módszerekkel való bevezetése megtalálható [7]-ben, a főként a specialistának szóló közlések pedig a legtöbb érintett kérdéstről [4], [5] és [6]-ban.

1. Néhány híradástechnikai feladat, amely konvolúció-integrálhoz vezet

1.1 Jel frekvenciaspektrumának mérése szelektív teljesítménymérővel

Vizsgáljunk egy olyan, hírközlő csatornából származó, elektromos jelet, amelynek előzőleg, tapasztalatilag megállapítottuk a következő tulajdonságait:

— Pillanatértékei az időben véletlenszerűen változnak;

— Időtartama összemérhetetlenül nagyobb, mint bármelyik, ténylegesen megvizsgált jelszakasz időtartama;

— A különböző, kellően hosszú idejű jelszakaszokból megállapított statisztikus jellemzők (pl. a mért pillanatértékek számtani átlagai stb. stb.) stabilitást mutatnak (különböző jelszakaszokból meghatározott jellemzők értékének az ingadozása kicsi, és a jelszakaszok hosszának növelésével csökkenő tendenciát mutat);

— Összteljesítménye véges, amely véges (vagy végtelen) nagyságú frekvenciasávon oszlik meg. Bár mely differenciálisan kicsiny df frekvenciasávra csak differenciálisan kicsiny (vagy nulla) teljesítmény jut. Tehát nem találhatók a jelben olyan szinuszos (vagy egyenáramú) összetevők, amelyeknek a teljesítménye véges nagyságú (ha ilyen volt, azt előzőleg már elnyomtuk, „kiszűrtük”);

A fenti tulajdonságok mindegyikével rendelkező jeleket (determinisztikus komponens nem tartalmazó) stacionárius sztochasztikus jeleknek (röviden: SSJ-nek) fogjuk nevezni.

Az SSJ spektrumának elméleti jellemzésére használjuk fel azt a (frekvenciától függő) teljesítményt, amelyet egy df sáv szélességű, ideális karakterisztikájú (zérus áteresztő-, végtelen nagy zárócsillapítás, egyikről a másikra átmenet nélküli átugrás), 1 ohm valós és illesztett lezárások között dolgozó szűrő emelne ki a jelből, s amely teljesítményt felírhatjuk (1.1) szerinti kéttényezős szorzat alakjában:

$$s(f) \cdot df; \quad f \geq 0 \quad (1.1)$$

(1 ohmos, valós, illesztett lezárásokról lévén szó, a teljesítmény egyben akár a feszültség, akár az áram effektív értéke négyzetének a mérőszáma is!)

Az 1 Hz sáv szélességre vonatkoztatott teljesítmény f frekvencián:

$$\frac{S(f) df}{df} = S(f) \left[\frac{\text{teljesítmény egység}}{\text{frekvencia egység}} \right] \quad (1.2)$$

A jel összteljesítménye (lezárási feltételeink mellett):

$$P_{\text{össz}} = S_{\text{eff}}^2 = \int_0^{\infty} s(f) df \quad (1.3)$$

(1.3) egyben $s(f)$ definíciója is.

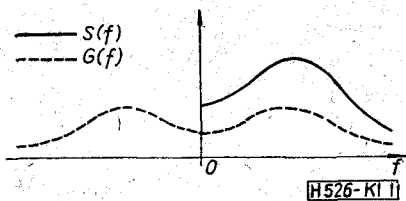
$S(f)$ felezésével és a függőleges tengelyre való tükrözésével (az 1. ábra példája szerint) vezetjük be a $G(f)$ teljesítményspektrumot:

$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{s(f)}{2}, \\ G(-f) &= G(f) \\ -\infty &< f < \infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$P_{\text{össz}} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df \approx 2 \int_0^{\infty} G(f) df.$$

Ha rendelkezünk egy teljesítménymérővel és egy „hangolható” sávszűrővel* (vagy nem hangolható

* Megj.: végeredményben ehhez jutunk „fix” szűrővel és hangolható vivőjű modulátorral (frekvencia transzponálóval) is.



1. ábra

szűrők sorozatával), és a szűrő változtatható sávközép-frekvenciája F , akkor a jelteljesítménynek gyakorlati mérésekkel megállapított frekvencia szerinti eloszlását a különböző F sávközép-frekvenciákra hangolt szűrő kimenetén levő összteljesítménnyel jellemezzük (itt és a továbbiakban is a már tisztázott lezárási feltételek mellett), melynek jelölése:

$$S_m(F); F \geq 0. \quad (1.5)$$

A méréshez használt sávszűrőt, $F=0$ Hz sávközép beállítása mellett, jellemezzük az f frekvenciájú harmonikus (szinuszos) jelre vonatkozó teljesítményátvitellel:

$$A(f; F=0) = A_0(f) = \frac{P_{ki}(f; F=0)}{P_{be}(f)} \leq 1. \quad (1.6)$$

Tegyük fel, hogy $A_0(f)$ -et folytonosnak tekinthetjük, deriváltja pedig létezik és véges nagyságú mindenütt, ahol ez a későbbiekben szerepet játszik, legalább (elfogadható) közelítéssel. Ekkor $A_0(f)$ -nek df sávon belüli változása elhanyagolhatóan kicsi és (elvben, az f frekvenciájú, $P_{be}(f)$ teljesítményű szinuszjel helyett) az SSJ-nek az ideális, df sáv szélességű sávszűrővel kiválasztható, $S(f) df$ teljesítményű részét, használhatjuk (1.6)-ban, Ezzel:

$$A_0(f) = \frac{S_m(f; F=0)}{S(f) df} \quad (1.7)$$

amiből:

$$S_m(f; F=0) = S(f) A_0(f) df. \quad (1.8)$$

A (1.6), (1.7) és (1.8) összefüggések értelemszerűen akkor is alkalmazhatók, ha szűrőnk sávközép frekvenciáját tetszés szerinti F értékre hangoljuk:

$$A_F(f) = \frac{P_{ki}(f; F)}{P_{be}(f)} \leq 1 \quad (1.9)$$

$$S_m(f; F) = S(f) A_F(f) df. \quad (1.10)$$

Az előzőleg szüretien (SSJ) bemenő jelhez tartozó összes kimenő teljesítmény (az F sávközép frekvenciára hangolt szűrő kimenetén) a df sáv szélességű, ideális sávszűrővel előzetesen megszárt bemenő jelekhez tartozó kimenő jelek összege:

$$S_m(F) = \int_0^{\infty} S(f) A_F(f) df. \quad (1.11)$$

A továbbiakban mérőszűrőnk karakterisztikájáról (vizsgálódásunk egyszerűsítésére) feltételezzük:

a) Bármely $A_F(f)$ karakterisztika előállítható $A_0(f)$ -ből, F nagyságú, frekvencia tengely menti eltolással:

$$A_F(f) = A_0(f - F) \quad (1.12)$$

b) A karakterisztika szimmetrikus az F ponton átmenő tengelyre. Tehát pl. $F=0$ esetén:

$$A_0(f) = A_0(-f). \quad (1.13)$$

Megjegyezzük: a matematikai fogásként feltételezett szimmetrikus szűrő karakterisztika azt jelenti, hogy $A_F(f)$ -et $(f - F) < 0$ mellett, tehát „negatív frekvenciákon” is értelmezzük. Ezzel azonban semmiféle hibát nem okozunk, mert $A_F(f)$ -et mindig csak $S(f)$ -el megszorozva fogjuk használni, és $S(f) = 0$, ha $f < 0$.

Tekintsük a 2. ábrát (mely egy példa a (1.12) és (1.13) feltételek kielégítésére), és vizsgáljuk meg valamely f_1 frekvencián az $A_F(f)$ -re vonatkozó összefüggéseket.

Mint azt a 2. ábrából leolvashatjuk:

$$A_F(f_1) = A_0(f_1 - F) = A_0(F - f_1). \quad (1.14)$$

Tekintve, hogy (1.14) bármely f_1 választás mellett teljesül általános formában is felírhatjuk:

$$A_F(f) = A_0(f - F) = A_0(F - f). \quad (1.15)$$

(1.15)-öt (1.11)-ben felhasználva nyerjük:

$$S_m(F) = \int_0^{\infty} S(f) A_0(F - f) df. \quad (1.16)$$

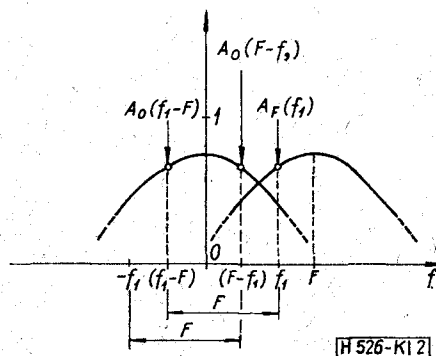
Az integrálás alsó határául $-\infty$ is írható, lévén $S(f) = 0$, ha $f < 0$!

A (1.16)-ban szereplő integrál kifejezést konvolúció integrálnak, vagy konvolúció szorzatnak, vagy — röviden — konvolúciónak nevezik.

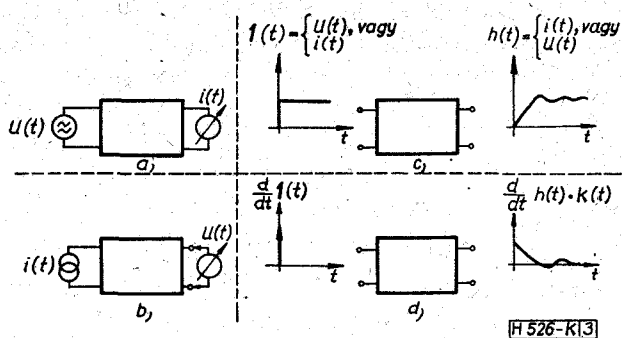
1.2 Jelátvitel vizsgálata az időtartományban

Csak lineáris (és az időben állandó paraméterű) hálózattal foglalkozunk. Az ilyen hálózat (mondható, hogy definíciója alapján) néhány fontos alaptulajdonsággal rendelkezik. Pl.: érvényes rá a szuperpozíció elve; ha az eredeti gerjesztésről annak idő szerinti deriváltjára térünk át, akkor az eredeti feleletnek is az idő szerinti deriváltját kapjuk; stb. A második tulajdonságot, melyet később felhasználunk, nevezzük a d/dt differenciál operátorra vonatkozó tulajdonságnak.

Az egyszerűség kedvéért az általános kétkapupár (négy pólus) hálózatot szélsőséges lezárásoknál vizsgáljuk. Vagy ideális feszültséggenerátorral gerjesztünk és a feleletet rövidzár áramán ideális árammérővel mérjük. Vagy ideális áramgenerátorral gerjesztünk és a feleletet nyitvázár feszültségén mérjük.



2. ábra



3. ábra. Hálózatjellemzők az időtartományban

tünek és a feleletet szakadáson ideális feszültségmérővel mérjük. Az előbbi esetben rövidzár, az utóbbiban szakadás a kétkapu-pár mindkétoldali lezárása, a 3 a és b ábrák szerint.

A hálózat időtartománybeli jellemzésére használhatjuk az egységugrás-függvényre adott választ (időfüggvényt), amit átmeneti függvénynek nevezünk és $h(t)$ -vel jelölünk (3c ábra).

Az átmeneti függvény idő szerinti első deriváltját *súlyfüggvénynek* nevezük és $k(t)$ -vel jelöljük:

$$\frac{d}{dt} h(t) = k(t). \tag{1.17}$$

A hálózat d/dt operátorra vonatkozó már említett tulajdonságából következik: feleletként akkor kapjuk $k(t)$ -t, ha a gerjesztés az egységugrás függvény deriváltjával („nagyon nagy amplitúdójú”, „nagyon rövid idejű”, „egységnyi területű” ún. Dirac-impulzussal, szokásos jelölés szerint $\delta(t)$ -vel) történik (3. d ábra).

A [8] forrásban, a 3. ábra viszonyaira (a 4. ábra konkrét példájára) jól követhető levezetést találunk, melynek egyik eredménye (saját jelöléseinkre áttérve):

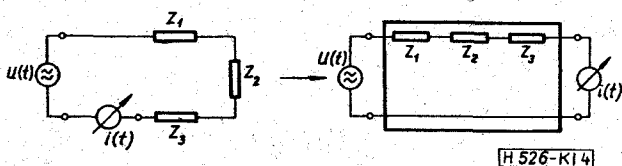
$$i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau. \tag{1.18}$$

Mivel itt az integrálási változó τ , az integrálás szempontjából t konstansként kezelhető, a d/dt differenciál operátort bevihetjük az integrál jel mögé:

$$i(t) = \int_0^t u(\tau) \frac{d}{dt} h(t-\tau) d\tau. \tag{1.19}$$

Felhasználva 1.17-et:

$$i(t) = \int_0^t \dot{u}(\tau) k(t-\tau) d\tau. \tag{1.20}$$



4. ábra. Egy példa a 3. ábra szerint

A $k(t-\tau)$ a $t=\tau$ időpillanatban fellépő Dirac-impulzusra (mint gerjesztésre) adott felelet, amely a gerjesztés pillanata előtt nem kezdődhet el. Tehát $k(t-\tau)=0$, ha $(t-\tau)<0$, vagyis ha $\tau < t$. Ennek megfelelően:

$$\int_{\tau=t}^{\infty} u(\tau) k(t-\tau) d\tau = 0. \tag{1.21}$$

(1.21) bal oldalát (nulla lévén) hozzáadhatjuk (1.20) jobb oldalához, s az integrálási határok megfelelő figyelembevételével a két integrál kifejezést egybe vonhatjuk:

$$i(t) = \int_0^{\infty} u(\tau) k(t-\tau) d\tau. \tag{1.22}$$

(1.22) ugyanolyan matematikai szerkezetű konvolúció, mint (1.16)!

1.3 Két valószínűségi változó együttes eloszlása

Valószínűségi változóról számadatokkal jellemzett véletlen eseményekre vonatkozóan beszélhetünk, ha az előforduló számadatok relatív gyakoriságai (mint statisztikus jellemzők) stabilitást mutatnak a különböző (kellően hosszú) kísérlet sorozatokban.

Ha folytonos valószínűségi változóról (a lehetséges számértékek folytonos halmazáról) van szó, akkor egy $(x, x+dx)$ határokkal megjelölt intervallumból való számválasztásnak (másként: az $(x < x_i < x + dx)$ esemény bekövetkezésének) a valószínűsége (p) differenciálisan kicsiny intervallum esetében lineárisan függ az intervallum dx nagyságától, és függ egy $f(x)$ arányossági tényezőtől (mely – legalább közelítőleg – mindegyik x intervallum-kezdőponthoz tapasztalatiilag meghatározható az alábbi összefüggés felhasználásával):

$$p(x < x_i < x + dx) = f(x) dx. \tag{1.23}$$

Az összetartozó x és $f(x)$ értékpárok összessége egy függvény, melynek neve: *valószínűségi sűrűségfüggvény*. Egy (folytonosnak tekinthető) valószínűségi változó eloszlását (eloszlás-típusát) jól lehet $f(x)$ -el jellemezni. Összegezéssel (integrálással) $f(x)$ ismeretében (1.23) alapján számítással meghatározhatók a különböző értéktartományokból való számelőfordulások valószínűségei.

Vizsgálat tárgya lehet egy olyan $z = x + y$ valószínűségi változó (és annak $r(z)$ sűrűségfüggvénye), amelyik két, már ismert valószínűségi változónak (az $f(x)$, ill. a $g(y)$ sűrűségfüggvényekkel jellemzett x , ill. y változóknak) az összege (pl. hasznos jel és zaj pillanatértékeinek az összege).

Az $f(x)$, a $g(y)$ és az $r(z)$ sűrűségfüggvények közötti összefüggés levezetése tekintetében az irodalomra (pl. [9]) hivatkozunk. Kikötve, hogy x és y csak pozitív számértékeket vehetnek fel, vagyis $x \geq 0$ és $y \geq 0$ az eredmény:

$$r(z) = \int_0^{\infty} g(y) f(z-y) dy. \tag{1.24}$$

Ismét egy konvolúció kifejezés!

1.4 A korrelációs függvények

Legyen $S_1(t)$ egy jel, $S_2(t-\tau)$ pedig egy másik ($S_2(t)$ -ből az időtengely mentén, pozitív irányban, τ nagyságú eltolással származtatott) jel időfüggvénye.

Vizsgálatunk a jelek olyan T időtartamára terjed ki, mely elegendő bármely, bennünket érdeklő (pl. statisztikus) jellemzőnek az elfogadható pontosságú megállapítására. A figyelembe vett τ értékekre pedig álljon fenn a $T \gg \tau_{\max}$ reláció.

A két jelet reprezentálják (az idő szerinti mintavételi tételnek megfelelően, T_m időközönként, kT_m időpillanatokban vett) x_k ill. y_k mintasorok ($k=1,2, \dots, N$). Az azonos index-számú, azonos időpillanatokban vett x és y minta alkot egy összetartozó mintapárt.

Könnyen megmutatható (l. pl. [10] vagy [2]), hogy az

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (1.25)$$

kifejezés a két függvény páronként összetartozó értékei hasonlóságának a statisztikus mértéke, ezért — pl. — ha az adott és a vett jelre (1.25)-öt kellően sok τ értéknél kiszámítjuk, a kifejezés maximumához, vagyis a legnagyobb hasonlósághoz tartozó τ értéket tekinthetjük a statisztikusan megállapított jelkésési időnek.

(1.25) a két függvény páronként összetartozó értékei szorzatainak a súlyozott számtani átlaga, más néven a várható értéke. (A gyakorisággal súlyozott átlagról van szó, mert ha ugyanolyan értékű tényezőket tartalmazó szorzat ismételten előfordul, ismételten figyelembe kell venni.)

A páronként összetartozó függvényértékek súlyozott számtani átlaga közvetlenül a két időfüggvény szorzatából is előállítható, mint a szorzatfüggvény integrál-közéértéke:

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T S_1(t) S_2(t-\tau) dt. \quad (1.26)$$

$R(\tau)$ statisztikus jellemző. „Pontos értékét” akkor kapjuk, ha a vizsgálati idő igen nagy, vagyis

$$T \rightarrow \infty$$

Ez esetben (1.26) kifejezés (eltekintve az $1/T$ konstans szorzótól) éppen olyan konvolúció, mint (1.16), (1.22) és (1.24).

Megjegyezzük még: Ha a két összehasonlított függvény csak abban különbözik, hogy az egyik a másikhoz képest τ időintervallummal el van tolva, akkor (1.26)-ban az index-számokat elhagyjuk és $R(\tau)$ -t autokorrelációs függvénynek nevezzük, amely $\tau=0$ mellett az effektív érték négyzetének jól ismert kifejezésébe megy át:

$$R(0) = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt = S_{\text{eff}}^2. \quad (1.27)$$

1.5 A konvolúció egy átalaktása

A négy különböző modellen bevezetett konvolúció általános jelölésére és további vizsgálatára (1.22)-nek

a betűjelöléseit ($i=I$) használjuk fel — elvonatkoztatva a matematikai forma konkrét tartalmától (érvényben tartva a matematikai megkötéseket).

Az (1.22) egyenlet jobb oldala — bármely rögzített t értéknél — az alábbi szorzatok összege:

$$\begin{aligned} & u(0) \cdot k(t) \cdot d\tau \\ & u(0+d\tau) \cdot k(t-d\tau) d\tau \\ & u(0+2d\tau) \cdot k(t-2d\tau) d\tau \\ & \vdots \\ & u(t) \cdot k(0) \cdot d\tau \end{aligned}$$

Ugyanezen szorzatok, de fordított sorrendben felírva;

$$\begin{aligned} & u(t-0) \cdot k(0) d\tau \\ & u(t-d\tau) \cdot k(0+d\tau) d\tau \\ & u(t-2d\tau) \cdot k(0+2d\tau) d\tau \\ & \vdots \\ & u(0) \cdot k(t) \cdot d\tau \end{aligned}$$

Ez utóbbi szorzatok összegét állítja elő az alábbi integrál:

$$\int_0^{\infty} u(t-\tau) \cdot k(\tau) d\tau.$$

Tekintve, hogy az összeadás felcserélhető művelet; kifejezésünk egyenlő (1.22) jobb oldalával. Tehát:

$$I(t) = \int_0^{\infty} u(\tau) k(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} u(t-\tau) k(\tau) d\tau \quad (1.28)$$

A második egyenlőséget, figyelembe véve, hogy $k(\tau)=0$, ha $\tau < 0$, így is írhatjuk:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) k(\tau) d\tau \quad (1.29)$$

(1.28) második egyenlősége, amely (1.29)-nek is megfelel, *Duhamel-tétel* néven is ismeretes.

2. A konvolúció és egyéb feladatok megoldásának eszköze: az FT

2.1 Az FT, mint a konvolúció megoldásának eszköze

Az FT-nek és (megfordításának, inverzének) az IFT-nek a definíciója, a (1.29) egyenletben szereplő függvény-jelöléseket felhasználva:

$$FT[u(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot e^{j2\pi f\tau} d\tau = F_u(f) \quad (2.1)$$

$$IFT[F_u(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F_u(f) \cdot e^{-j2\pi f\tau} df = u(\tau) \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_u(f) \cdot e^{-j2\pi f(t-\tau)} df = u(t-\tau). \quad (2.3)$$

A τ és f változók közötti dimenzió-kapcsolat:

$$[f] = \frac{1}{[\tau]} \quad (2.4)$$

Fentiekhez hasonlóan:

$$\begin{aligned} FT[k(\tau)] &= \dots = F_k(f) \\ IFT[F_k(f)] &= \dots = k(\tau) \\ FT[I(t)] &= \dots = F_f(f) \\ IFT[F_f(f)] &= \dots = I(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Egyszerűen bizonyítható (l. pl. [11]): ha három függvény között a (1.29) szerkezetű konvolúció kapcsolat áll fenn, akkor a Fourier-transzformáltjaik egymással egyszerű szorzat-kapcsolatban vannak:

$$F_f(f) = F_u(f) \cdot F_k(f) \quad (2.6)$$

Ez a Fourier-integrálra vonatkozó konvolúciós tétel, a továbbiakban röviden: *konvolúciós tétel*.

A konvolúciós tétel alapján pl. SSJ spektrumának $S(f)$ elméleti jellemzőjét így határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} FT[S_m(F)] &= FT \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f) A_0(F-f) df \right] \\ &= FT[S(f)] \cdot FT[A_0(F-f)]; \\ S(f) &= IFT \left[\frac{FT[S_m(F)]}{FT[A_0(F-f)]} \right]. \end{aligned}$$

2.2 Az FT értelmezése impulzusfel időfüggvényén és frekvenciaspektrumán

Az e pontban foglaltakat egyben az FT egyik lehetséges és „szemléletes” bevezetésének is tekinthetjük.

*

Bármely, a gyakorlatban előforduló, T periódus idejű periodikus jel $S_p(t)$ időfüggvénye felfogható, mint harmonikus időfüggvények végtelen sorának összege:

$$\begin{aligned} S_p(t) &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n), \\ \omega_1 &= 2\pi f_1; \quad f_1 = \frac{1}{T}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Itt ω_1 , ill. f_1 az ún. alapharmonikus frekvenciája radián/sec.-ban, ill. Hz-ben. Vagy más megfogalmazásban: a spektrum lehetséges két szomszédos összetevőjének a távolsága a frekvenciatengely mentén. S_n az amplitúdója, φ_n a $t=0$ pillanathoz tartozó fázishelyzete az $n\omega_1$ ill. $n f_1$ frekvenciájú összetevőnek. S_0 a jel egyenáramú (nulla frekvenciájú) összetevőjének az amplitúdója.

A Fourier nevéhez fűződő és (2.7) alakban megfogalmazott felismerés a híradástechnikusok számára ma már mindennapos tapasztalati tény.

A (2.7) szumma jele mögött szereplő általános tag más formában is felírható a két szög összegének a szinuszára vonatkozó ismert trigonometrikus azonosság alkalmazásával:

$$\begin{aligned} S_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) &= b_n \cos n\omega_1 t + a_n \sin n\omega_1 t \\ b_n &= S_n \sin \varphi_n; \quad a_n = S_n \cos \varphi_n \end{aligned} \quad (2.8)$$

A Fourier-sor így nyert formájában szereplő együtt-hatókra a matematikából ismert alapösszefüggések (tetszés szerinti t_0 időpont választással):

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S_p(t) \cos n\omega_1 t dt = b_{-n}. \quad (2.9)$$

(b_n n -nek páros függvénye, mert n a páros függvények osztályába tartozó koszinusz függvény argumentumában szerepel, s az összes többi mennyiség az n -től való függés vizsgálata szempontjából konstans!);

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S_p(t) \sin n\omega_1 t dt = -a_{-n}. \quad (2.10)$$

(a_n n -nek páratlan függvénye, az előzőhöz hasonló megfontolás és annak alapján, hogy a szinusz függvény páratlan függvény).

Alkalmazzuk az

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

ún. Euler összefüggést az

$$e^{jx} + e^{-jx}$$

ill. az

$$e^{jx} - e^{-jx}$$

kifejezésekre, és $x = n\omega_1 t$ jelöléssel:

$$\begin{aligned} \cos n\omega_1 t &= \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2} \\ \sin n\omega_1 t &= \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2j} \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.11)-et és (2.8)-at felhasználva (2.7)-ben, rendezés és a

$$\begin{aligned} \frac{b_n - ja_n}{2f_1} f_1 &= C'_n \cdot f_1 \\ \frac{b_n + ja_n}{2f_1} f_1 &= \frac{b_{-n} - ja_{-n}}{2f_1} f_1 = C'_{-n} \cdot f_1 \\ S_0 &= C_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

jelölések bevezetésével, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \cdot e^{j(-n)\omega_1 t} \cdot f_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n \cdot e^{jn\omega_1 t} \cdot f_1 \quad (2.13)$$

nyilvánvaló egyenlőség bevezetésével nyerjük a Fourier-sor ún. komplex együtt-ható alakját. C'_n -nek (2.12) definíciójából, (2.9), (2.10) és a már felírt Euler összefüggés felhasználásával a C'_n komplex együtt-ható kiszámítási formuláját valamint C'_n -nek S_n -el és φ_n -el való kapcsolatát is megkapjuk:

$$S_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n \cdot e^{jn2\pi f_1 t} \cdot f_1, \quad (2.14)$$

$$C'_n = \int_{t_0}^{t_0+T} S_p(t) \cdot e^{-jn2\pi f_1 t} dt, \quad (2.15)$$

$$S_n = 2|C'_n| \cdot f_1, \quad (2.16)$$

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\text{Im}[C'_n]}{\text{Re}[C'_n]}. \quad (2.17)$$

Végül az $n_1 f_1$ és az $n_2 f_1$ frekvenciájú harmonikus összetevők amplitúdói abszolút értékeinek az aránya:

$$\frac{|C'_{n1}|}{|C'_{n2}|} \quad (2.18)$$

Ezek után határozzuk meg egyfelől $S_p(t)$ egy periódusának 1 ohm terhelésen leadott energiája, másfelől a C'_n komplex együtthatók közötti összefüggést!

Az $n\omega_1$ [rad/sec]. ill. $n f_1$ [Hz] frekvenciájú harmonikus összetevő csúcsertékét (2.16), effektív értékét pedig annak $1/\sqrt{2}$ -szerese adja. A kérdéses összetevő átlagteljesítménye 1 ohmon (akár feszültségről, akár áramról van szó):

$$P_{n1\Omega} = S_{\text{eff}}^2 = 2|C'_{n1}|^2 \cdot f_1^2.$$

A teljes spektrum teljesítménye 1 ohmon:

$$P_{\text{ö1}\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n1\Omega} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |C'_{n1}|^2 \cdot f_1^2.$$

Ebből a T periódus időre jutó energia 1 ohmon:

$$W_{\text{ö1}\Omega} = T \cdot P_{\text{ö1}\Omega} = \frac{1}{f_1} P_{\text{ö1}\Omega} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |C'_{n1}|^2 \cdot f_1. \quad (2.19)$$

*

Térjünk át egy $\tau = 2t_1$ időtartamú impulzusjel vizsgálatára, ha annak időfüggvénye:

$$S(t) = \begin{cases} S_{\text{burkoló}}(t), & \text{ha } -t_1 < t < t_1 \\ 0, & \text{ha } t < -t_1, \text{ vagy ha } t > t_1 \end{cases}$$

Bár $S(t)$ csak τ ideig tér el nullától, mégis a jel értelmezve van a teljes $(-\infty < t < \infty)$ időtartományban. $S(t)$ -t felfoghatjuk egy olyan periodikus jelnek, melynek periódus ideje végtelen nagy:

$$T \rightarrow \infty$$

Ennek a következményei (a véges periódusidejű jellel szemben):

a) Két szomszédos harmonikus összetevő távolsága egymástól a frekvenciatengely mentén (ami, mint már rámutattunk, Hz-ben kifejezve a periódusidő reciproka) differenciálisan kicsinnyé válik

$$f_1 \rightarrow df$$

b) Az $n f_1$ frekvencia dimenziójú diszkrét változó a) következtében folytonos frekvenciaváltozóvá válik

$$n f_1 \rightarrow f$$

c) A diszkrét mennyiségek szummázása helyébe a folytonos mennyiségek integrálással történő összegezése lép

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

d) Végül a harmonikus összetevők komplex amplitúdójának a jelölésére, a különbségre való figyelemfelhívásként, vezessünk be új jelölést

$$C'_n \rightarrow F(f), \quad \text{vagy} \quad C'_n \rightarrow F(\omega)$$

attól függően, hogy a frekvenciát Hz-ben vagy rad/sec-ban kívánjuk-e mérni.

A $T \rightarrow \infty$ feltétel felsorolt a), b), c), és d) következményeit figyelembe véve a (2.14), (2.15), (2.17), (2.18) és (2.19) összefüggéseket egyszerűen átírjuk a véges időtartamú impulzusjel esetére:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \cdot e^{j2\pi ft} df, \quad (2.20)$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.21)$$

$$\varphi(f) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\text{Im}[F(f)]}{\text{Re}[F(f)]}. \quad (2.22)$$

Bármely két (f_1 és f_2 frekvenciájú) harmonikus összetevő aránya (feltételezve, hogy az osztás elvégezhető):

$$\frac{|F(f_1)|}{|F(f_2)|}. \quad (2.23)$$

Az impulzusjel energiája 1 ohm terhelésen:

$$W_{\text{ö1}\Omega} = 2 \int_0^{\infty} F|f|^2 df. \quad (2.24)$$

Eredményeinkhez a következő megjegyzéseket fűzzük:

1. Az impulzusjel frekvenciaspektrumát a (2.21)-el definiált $F(f)$ függvény, az ún. amplitúdó sűrűségfüggvény jellemzi. Ismeretében bármely harmonikus összetevő $t=0$ pillanatbeli fázishelyzete, bármely két harmonikus összetevő amplitúdói abszolút értékének hányadosa, valamint a jel teljes energiája számítható. Viszont egy-egy harmonikus összetevő amplitúdója differenciálisan kicsiny (vagy nulla), ami belátható abból, hogy véges idejű impulzus energiája véges, s ez a véges energia végtelen sok (a szomszédosoktól df távolságra levő) harmonikus összetevő között oszlik meg. (2.20) és (2.21) konkrét esetekre való alkalmazásából kitűnik: véges idejű impulzus frekvenciaspektruma végtelenül széles, véges frekvenciasávra korlátozott jel időfüggvénye pedig végtelenül kiterjedt.

2. A (2.24) összefüggés az ún. Parseval-tétel. E tételnek fejtegetéseinkben két vonatkozásban is fontos szerepe van. Az egyik: a tételből és véges idejű impulzus véges energiájából következik, hogy a (2.20)-ban szereplő végtelen határu integrál esetünkben véges értékű (más szóval „létezik”, „konvergens”). A másik: a tételből és az alapjául felhasznált (2.19) összefüggésből következik, hogy az impulzusjel energiájának f frekvencia Δf sáv szélességű környezetére jutó része, amelyet azután 1 Hz sáv szélességre vonatkoztatunk:

$$\frac{W_{\text{ö1}\Omega}(f; f + \Delta f)}{\Delta f} = \frac{2}{\Delta f} \int_f^{f+\Delta f} F|f|^2 df. \quad (2.25)$$

Ezt később, SSJ teljesítményspektrumának, $G(f)$ -nek a meghatározására felhasználjuk.

3. Ha (2.1)-et (2.20)-al és (2.2)-t (2.21)-et összevetjük látható, hogy az impulzusjel időfüggvénye és

amplitúdó sűrűség függvénye egymásnak Fourier-transzformáltja ill. inverz Fourier-transzformáltja

$$S(t) = FT[F(f)],$$

$$F(f) = IFT[S(t)].$$

2.3 SSJ teljesítmény spektrumának meghatározása FT-vel

a) A Parseval-tétel alapján

Tapasztalati tény, hogy SSJ frekvenciaspektrumát jellemző (1.4)-el definiált teljesítményspektrum $[G(f)]$ stabilitást mutató statisztikus jellemző, mely a jel kellően hosszú, de véges T időtartamú szakaszából a szükséges pontossággal meghatározható.

Véges T időtartamú SSJ-re viszont értelmezhető az amplitúdó sűrűségfüggvény, $F(f)$. Ez a tapasztalati $S(t)$ -ből (2.21) alapján numerikus módszerrel meghatározható (többek között éppen erre szolgál a később ismertetésre kerülő DFT és FFT).

$G(f)$ az f frekvencia Δf környezetében az 1 Hz sávzélességre jutó teljesítmény fele 1 ohm terhelésen. A teljesítmény pedig az energiának és a jel időtartamának a hányadosa. Az energiát esetünkben (2.25) adja meg. Mindezt figyelembe véve nyerjük:

$$G(f) = \frac{1}{T \cdot \Delta f} \int_f^{f+\Delta f} |F(f)|^2 df. \quad (2.26)$$

b) A Wiener-Hincsin-tétel alapján

Az ún. Wiener-Hincsin-tétel szerint (i. pl. [12]-ben) az autokorrelációs függvény és a teljesítményspektrum egymás Fourier-transzformáltjai (egymásból FT-vel, ill. IFT-vel meghatározhatók):

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df,$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (2.27)$$

A tétel könnyen ellenőrizhető: az első egyenlőség mindkét oldalán az effektív érték négyzetét, vagyis az 1 ohm terhelésre számított átlagteljesítményt kapjuk $\tau=0$ mellett, (1.27) és (1.4) felhasználásával.

Általában $G(f)$ (3.26) alapján történő meghatározásának van nagyobb gyakorlati jelentősége. Példa: a [3]-ban ismertetett berendezés, melyet bevezetőnkben már említettünk.

2.4 A Duhamel-tételben szereplő időfüggvények FT-jének értelmezése

Az (1.28) és (1.29) formákban felírt Duhamel-tételre, az (1.1)... (1.5) jelölés-definíciókkal, alkalmazzuk az (1.6) konvolúció-tételt, melyből

$$\frac{F_i(f)}{F_u(f)} = F_k(f). \quad (2.28)$$

Értelmezzük e kifejezést bármely rögzített frekvencián! Az egyenlet bal oldalán ekkor szinuszos gerjesztés és szinuszos felelet komplex amplitúdóinak a hányadosa, vagyis a hálózat átviteli függvényének az

értéke áll, az egyenlet jobb oldalán pedig a hálózat súlyfüggvényének FT-je. Tehát a hálózat frekvencia tartománybeli viselkedését leíró átviteli karakterisztika az időtartománybeli viselkedését leíró súlyfüggvény Fourier-transzformáltja. A további részleteket illetően itt is az irodalomra utalunk, l. pl. [13].

Ha a frekvenciafüggő átviteli karakterisztikával leírt hálózat időfüggvény átvitelét kívánjuk meghatározni, akkor a Duhamel-tételre támaszkodva az FT-t használhatjuk fel.

3. Az FT számítástechnikájáról

3.1 A DFT bevezetése és alkalmazása

Legyen $S(t)$ egy, időben $(-t_1; t_1)$ tartományra korlátozott jel időfüggvénye, s a jel legyen egyben $(0; F/2)$ frekvenciasávra korlátozva (tehát amplitúdó-sűrűségfüggvénye a $-F/2; F/2$, Hz-ben mért frekvenciasávra korlátozódik). Feltételeink — melyeket együttesen és teljesen kielégíteni a 2.2 pont 1. megjegyzése értelmében nem lehet, de gyakorlatilag elfogadhatóan megközelíthetők —:

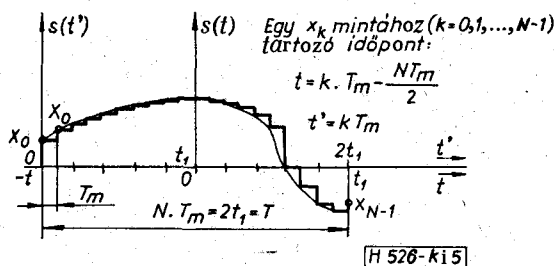
$$S(t) \cong 0, \quad \text{ha } |t| > t_1,$$

$$F(f) \cong 0, \quad \text{ha } |f| > F/2. \quad (3.1)$$

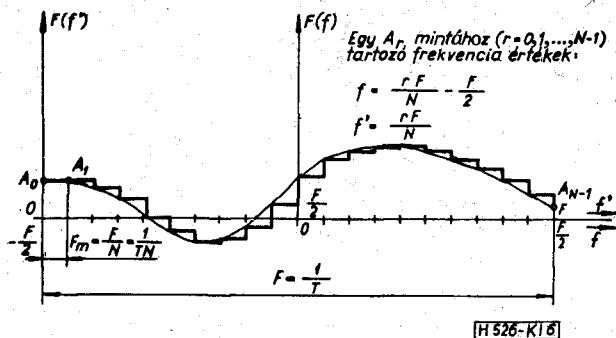
$S(t)$ -t közelítse egy lépcsős görbe, melyet az $S(t)$ -ből T_m időközönként vett x_k mintákkal ($k=0, 1, \dots, N-1$) szerkesztünk az 5. ábra szerint, kielégítve az idő szerinti mintavételi tételt is. Utóbbi előírja, hogy a tényleges frekvenciasáv kétszeresének a reciprokával legyen egyenlő a mintavételi időköz:

$$T_m = \frac{1}{2F/2} = \frac{1}{F} = \frac{T}{N}. \quad (3.2)$$

Ebből T_m és N is számítható a jel sec.-ban adott T



5. ábra. Időbe korlátozott jel időfüggvénye, diszkrét minták (x_k) sorával megadva



6. ábra. Frekvenciában korlátozott jelan amplitúdó sűrűség függvénye, diszkrét minták (A_r) sorával megadva

időtartamának és Hz-ben adott $F/2$ sáv szélességének az ismeretében.

$F(f)$ -et közelítse egy lépcsős görbe, amelyet az $F(f)$ -ből vett N db A_r minta ($r=0,1,\dots,N-1$) segítségével szerkesztünk meg, a 6. ábra szerint. Az A_r mintáknak az egymástól való, a frekvenciatengelyen mért távolsága:

$$F_m = \frac{F}{N} = \frac{1}{TN}. \quad (3.3)$$

Válasszuk T_m -et időegységnek (t_e) és ezzel egyben $1/T_m$ -et frekvenciaegységnek (f_e). A minták N db-számát terjesszük ki úgy, hogy 2-nek egész kitevőjű (n) hatványa legyen:

$$\begin{aligned} t_e &= T_m; & T_m &= i[t_e], \\ f_e &= 1/T_m; & F &= 1/T = 1[f_e] \\ N &= 2^n \end{aligned} \quad (3.4)$$

Az FT és az IFT (2.2) és (2.1) integrál kifejezéseit (figyelembe véve, hogy a határozott integrált függvény-szakaszonként, a zérustól eltérő függvényértékeket szolgáltatató változó értékek tartományára szorítkozva elvégezhetjük) helyettesítsük a 5. és a 6. ábra lépcsős közelítéseinek a felhasználásával:

$$\begin{aligned} F(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi f(kT_m - NT_m/2)} \cdot T_m \\ S(t) &= \sum_{r=0}^{N-1} A_r \cdot e^{j2\pi r(F/N - F/2)} \cdot \frac{F}{N} \end{aligned}$$

Ezekből a mintavételi pontokhoz tartozó értékek:

$$\begin{aligned} A_r &= F \left(\frac{rF}{N} - \frac{F}{2} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi r(F/N - F/2)(kT_m - NT_m/2)} \cdot T_m \\ x_k &= S \left(kT_m - \frac{NT_m}{2} \right) = \sum_{r=0}^{N-1} A_r \cdot e^{j2\pi r(F/N - F/2)(kT_m - NT_m/2)} \cdot \frac{F}{N} \end{aligned}$$

Térjünk át (5. és 6. ábrák szerint) a t' és f' változókra:

$$t' = t + \frac{NT_m}{2}; \quad f' = f + \frac{F}{2}. \quad (3.5)$$

(3.4) és (3.5) feltételekkel:

$$\begin{aligned} A_r &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kr} \\ x_k &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A_r \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} kr} \end{aligned}$$

Bevezetve egy tömörebb jelölést, a DFT és inverze, az IDFT (gyűjtőnéven nevezzük DFT-nek) szokásosabb formuláihoz jutunk:

$$\begin{aligned} A_r &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot W^{kr} = DFT[x_k], \\ x_k &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A_r \cdot W^{-kr} = IDFT[A_r], \\ W &= e^{-j \frac{2\pi}{N}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

A DFT (3.6) formulái felhasználhatók az FT véges számú numerikus lépéssel való kiszámítására, tetszés szerinti függvényekre, azok ismert (pl. megmért)

mintáiból, a (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) és (3.5) feltételeket figyelembe véve!

Konvolúciók — pl. a Duhamel-tétel — FT helyett DFT-vel is kezelhetők, ez esetben is alkalmazható a (2.6) konvolúciós tétel. Reprézntálják pl. (1.28) időfüggvényeit N elemű mintasorok:

$$\begin{aligned} U(t-\tau) &\rightarrow x_{s-1} \\ k(\tau) &\rightarrow y_l \\ I(t) &\rightarrow z_s \end{aligned} \quad (3.7)$$

(az s és az l index-változók az időfüggvény mintáinak sorszámait jelölik és a $0,1,\dots,N-1$ számokat veszik fel).

Legyen:

$$\begin{aligned} DFT[x_s] &= A_r \\ DFT[y_l] &= D_r \end{aligned} \quad (3.8)$$

Írjuk fel a konvolúciót diszkrét alakban, (3.6)-ot értelemszerűen felhasználva:

$$\begin{aligned} z_s &= \sum_{i=0}^s x_{s-i} \cdot y_i = \sum_{i=0}^s y_i \left[\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A_r \cdot W^{-r(s-i)} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A_r \left[\sum_{i=0}^s y_i \cdot W^{ri} \right] \cdot W^{rs} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A_r \cdot D_r \cdot W^{-rs} = IDFT[A_r \cdot D_r]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tehát egy konvolúció integrál kiszámítási módja:

$$z_s = IDFT[DFT[x_s] \cdot DFT[y_l]]. \quad (3.10)$$

Pl. y_l egy hálózat súlyfüggvényének, x_s a gerjesztés időfüggvényének, z_s pedig a felelet időfüggvényének véges hosszú jellemző mintasorait (számértéksorokat) jelenthetik. A közöttük levő kapcsolat véges számú szorzási és összeadási műveletre redukálódik. A gerjesztés és a felelet mintasorait összekapcsoló műveleteket elvégezheti pl. egy számítógép, amely ezáltal a (lineáris) hálózatot helyettesíti („digitális szűrő”-ként dolgozik). Természetesen, ha az eredeti bemenő jel folytonos, akkor a bemenő oldalon egy analóg/digitális átalakítóra — mintavevőre, kódolóra, illesztőre — van szükség. Ha pedig folytonos kimenő jel kívánatos, akkor digitális/analóg átalakító — illesztő, dekódoló és aluláteresztő szűrő — szükséges a kimenő oldalon.

(3.6)-ból kitűnik: egyetlen A_r érték kiszámításához (N db x_k mintából) N db komplex szorzási és (egy híján) ugyanannyi összeadási műveletre van szükség. Tehát egy teljes, N tagú A_r értéksorozat (A_0, A_1, \dots, A_{N-1}) kiszámítására $N \cdot N = N^2$ db komplex szorzás és összeadás szükséges. Pl. — mint [14]-ban publikálták — egy fizikai távbeszélő csatorna sávjában a nap megadott forgalmas órájában a zaj olyan SSJ, melyet kb. egy másodperces szakasza, vagyis kb. 10 000 db minta statisztikusan kielégítően jellemez. Ebből egyetlen DFT 10^8 db komplex szorzást és összeadást igényel!

Az FT nagy gyakorlati jelentősége és a numerikus kiszámításhoz rendelkezésre álló DFT nagy műveleti szám igénye bizonyára serkentő hatással voltak azokra a kutatásokra, melyek az 1960-as évek köze-

pén a DFT gyors kiszámítására alkalmas FFT eljárás kidolgozására vezettek.

3.2 Az FFT lényegéről – részletesebben

Ha a DFT (3.6) összefüggésének (pl.) az első egyenletében szereplő, A_r -t megadó összeget két részösszegre, a páros sorszámú x_k mintákat ($x_0, x_2, \text{stb.}$) és a páratlan sorszámú x_k mintákat ($x_1, x_3, \text{stb.}$) tartalmazó részösszegekre bontjuk, a bemutatandó célszerű átalakítás után két fontos felismerésre juthatunk:

1. Ha A_r az N db x_k minta N mintás DFT-je, akkor a két részösszeg egy (csak r -től függő) szorzótól eltekintve egy-egy $N/2$ mintás szabályos DFT. A páros sorszámú x_k mintákból származó $N/2$ mintás DFT-t B_r -rel, a páratlan sorszámúakból származót C_r -rel fogjuk jelölni.

2. Ha az első $N/2$ db A_r értéket ($A_0, A_1, \dots, A_{N/2-1}$) kiszámítjuk (mindegyiket N db komplex szorzással és összeadással), akkor a második $N/2$ db A_r érték ($A_{N/2}, A_{N/2+1}, \dots, A_{N-1}$) mindegyikét egy, már megismert értékből egy-egy komplex szorzással és összeadással kiszámíthatjuk.

Tekintve, hogy az N mintás A_r az 1. felismerés szerint két $N/2$ mintás DFT (B_r és C_r) összege, az 1. és a 2. felismeréseket most B_r -re és C_r -re tovább alkalmazhatjuk: mindegyik két $N/4$ mintás DFT-re vezethető vissza, a 2. felismerés előnye ismét kihasználható. Mindez addig folytatható, amíg az N mintás DFT-t csupa 1 mintásra visszavezetjük. Az eredmény: ha az N mintás DFT-t FFT-vel számítjuk ki, akkor nem N^2 db, csupán $N \cdot \log_2 N$ komplex szorzás és összeadás szükséges. Pl. $N = 2^{13} = 8192$ mellett a szükséges számítási műveletek száma 1/630 arányban csökken.

Nézzük a mondottak levezetését egy $N = 8$ mintás DFT konkrét példáján, egészen a végső számítási összefüggésekig és a számítás folyamatábrájáig!

Az első $N/2$ db A_r mintára:

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot W^{kr} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} \cdot W^{2kr} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \cdot W^{(2k+1)r}$$

Ha $r = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ értékeket veszünk figyelembe, akkor a második $N/2$ db A_r mintára:

$$A_{r+\frac{N}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} \cdot W^{2k(r+\frac{N}{2})} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \cdot W^{(2k+1)(r+\frac{N}{2})}$$

Végezzük el a kitevőkben kijelölt műveleteket, és használjuk ki, hogy

$$W^{kN} = e^{-j2\pi k} = \cos 2\pi k - j \sin 2\pi k = 1, \text{ ha } k \text{ egész szám.}$$

Ezzel:

$$\begin{aligned} W^{(2k+1)r} &= W^r \cdot W^{2kr}, \\ W^{2k(r+\frac{N}{2})} &= W^{2kr}, \\ W^{(2k+1)(r+\frac{N}{2})} &= W^{r+\frac{N}{2}} \cdot W^{2kr}. \end{aligned}$$

Visszahelyettesítés és a részösszegekre a B_r , ill. C_r jelölés bevezetése után nyerjük:

$$\begin{aligned} A_r &= B_r + W^r \cdot C_r, \\ A_{r+\frac{N}{2}} &= B_r + W^{r+\frac{N}{2}} \cdot C_r, \end{aligned}$$

$$B_r = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} \cdot W^{2kr}, \tag{3.11}$$

$$C_r = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \cdot W^{2kr},$$

$$r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Most (az $N/2$ mintás) B_r -t és C_r -t bontjuk tovább a már alkalmazott módszerrel $N/4$ mintás DFT részösszegekre.

B_r az x_0, x_2, \dots mintasorból származik, amit most egyfelől x_0, x_4 , másfelől x_2, x_6 részsorokból álló DFT összetevőkre bontunk. C_r az x_1, x_3, \dots mintasorból származik, amit egyrészt az x_1, x_3 , másrészt az x_5, x_7 részsorokból álló DFT összetevőkre bontunk. Tehát:

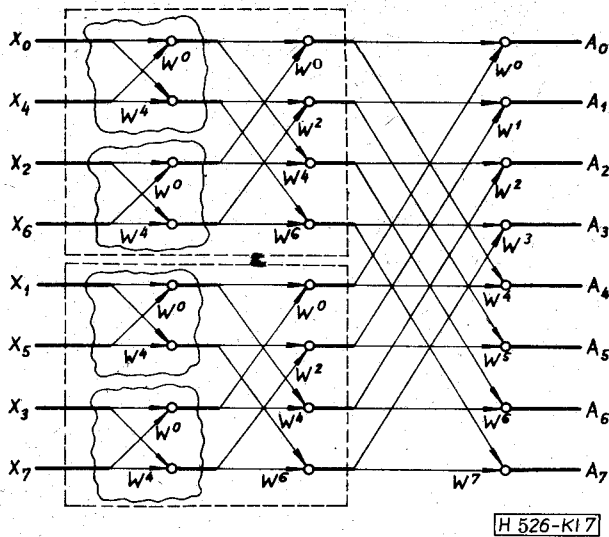
$$\begin{aligned} B_r &= \alpha_r + W^{2r} \cdot \beta_r; & C_r &= \gamma_r + W^{2r} \cdot \delta_r, \\ B_{r+\frac{N}{4}} &= \alpha_r + W^{(2r+N/2)} \cdot \beta_r; & C_{r+\frac{N}{4}} &= \gamma_r + W^{(2r+N/2)} \cdot \delta_r, \\ \alpha_r &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4k} \cdot W^{4kr}; & \gamma_r &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4k+1} \cdot W^{4kr}, \\ \beta_r &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4k+2} \cdot W^{4kr}; & \delta_r &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} x_{4k+3} \cdot W^{4kr}, \\ r &= 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ha $N = 8$, akkor $N/4 - 1 = 1$, s így $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ és δ_r 2 mintás DFT-k ($r = 0$ vagy 1). Mindegyiket (3.12) alatti definícióik és az eddigiekben is alkalmazott felbontási módszer alapján két db 1 mintás DFT-re bonthatjuk. Márpedig egy 1 mintás DFT, mint (3.6)-ból kitűnik, önmagával egyenlő. Írjuk ki $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ és δ_r összes értékeit, most már az $r = 0$ vagy 1 és a $k = 0$ vagy 1 konkrét számokkal:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x_0 \cdot W^0 + x_4 \cdot W^0, \\ \alpha_1 &= x_0 \cdot W^0 + x_4 \cdot W^4, \\ \beta_0 &= x_2 \cdot W^0 + x_6 \cdot W^0, \\ \beta_1 &= x_2 \cdot W^0 + x_6 \cdot W^4, \\ \gamma_0 &= x_1 \cdot W^0 + x_5 \cdot W^0, \\ \gamma_1 &= x_1 \cdot W^0 + x_5 \cdot W^4, \\ \delta_0 &= x_3 \cdot W^0 + x_7 \cdot W^0, \\ \delta_1 &= x_3 \cdot W^0 + x_7 \cdot W^4. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A felbontást ($N = 8$ esetre) ezzel fejeztük. Az x_0, x_1, \dots, x_7 mintákból az A_0, A_1, \dots, A_7 minták a (3.11), (3.12) és (3.13) összefüggések alapján számíthatók ki. A számítás folyamatábrája (és a felbontási lépések) a 7. ábrán láthatók. A kis köröknél levő nyíl találkozások összeadásokat jelentenek. A nyilakhoz rendelt exponenciális mennyiségek azt jelentik, hogy a nyilak által „hozott” mennyiségeket velük meg kell szorozni, s e szorzatokat kell a nyilak találkozásánál (kis körök) összeadandóknak tekinteni.

A folyamatábrát a benne felismerhető rendszer szerint 8-nál nagyobb N értékre is kiterjeszthetjük, feltevé, hogy N 2-nek pozitív egész kitevőjű hatványa.



7. ábra. FFT folyamatábrája $N=8$ mintás DFT kiszámítására. Négymintás (szaggatott-vonal keret), majd kétmintás (hullámos-vonal keret) DFT-re visszavezetve

Ábránkon az A_r minták természetes rendben, az x_k minták kevert rendben követik egymást. Ez a helyzet megfordítható, sőt (tárolók beiktatásával) bevezethető olyan számítási menet is, melyben x_k -k és A_r -ek egyaránt természetes rendben szerepelnek — 1. pl. [15].

A 7. ábrából az is felismerhető, hogy lehetőség nyílik egyidejűleg (párhuzamosan) több számítási művelet végrehajtására. [3]-szerint e lehetőség kihasználásával, több aritmetikai egységet tartalmazó célszámítógéppel, 4096 mintás DFT-nél a számítási sebességet „csupán” e fogással közel két nagyságrenddel sikerült megnövelni. A mintaszám növekedésével

mind magának az FFT-nek, mind pedig az FFT több aritmetikai célszámítógéppel történő végrehajtásának a számítást gyorsító hatása növekszik, s a két hatás szorzata érvényesül.

IRODALOM

[1] Vaszenkov, A. A.: A 70-es évek mikroelektronikája. Híradástechnika, 1974. 10. sz.
 [2] Dr. Kerpán I.—Temesvári Zs.—Koralewsky V.: Statisztikus mérések véletlen jeleken. BHG-ORION-TRT Műszaki Közlemények, 1976. 5. sz.
 [3] Fus, P. S.—Stuart, J. C., Jr.: Making the Fast Fourier Transform Really Fast. Bell Laboratories Record, February 1973.
 [4] Pálmai L.-né: Integrál transzformációk gyors végrehajtása számítógépen. Híradástechnika, 1972. 5. sz.
 [5] Dr. Székely V.: A dekonvolúció és technikai alkalmazásai. Híradástechnika, 1971. 6. sz.
 [6] Dr. Gordos G.—Sallai Gy.: Hírányanyagok természetes és összetett jeleinek statisztikai tulajdonságai. Híradástechnika, 1972. 9. sz.
 [7] Gebe L.: A Fourier-integrál. BHG-ORION-TRT Műszaki Közlemények, 1975. 1. sz.
 [8] Simonyi K.: Elméleti villamosságtan. Tankönyvkiadó, Budapest. 1955. évi, második kiadás, 300—302. old.
 [9] Prékopa A.: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962. 103—105. old.
 [10] Dr. Kerpán I.: A vezetékesség jelátvitel idődimenziójú jellemzőiről. Híradástechnika, 1974. 11. sz.
 [11] Dr. Fenyő I.—Dr. Frey T.: Matematika villamosmérnököknek II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965., 242—243. old.
 [12] Dr. Ferenczy Pál: Hírközlésemélet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
 [13] Dr. Géher K.: Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
 [14] Stuck, B. W.—Kleiner, B.: A Statistical Analysis of Telephone Noise. The Bell System Technical Journal, September 1974. vol. 53. No. 7. p. 1263—1320.
 [15] What is the FFT? (IEE munkacsoport közleménye. Megjelent a DIGITAL SIGNAL PROCESSING c. kötetben. Szerkesztők: Rabiner, L. R.—Rader, Ch. M. Kiadó: IEE PRESS, New York, 1972.)

Pályázati felhívás!

A Híradástechnikai Tudományos Egyesület diplomaterv- és szakdolgozat-pályázatot hirdet

- a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karán,
- a Zrínyi Miklós Akadémián,
- a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola Gyengeáramú Karának Híradásipari, Alkatrészgyártó és Számítástechnikai Szakán,
- a Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola Távközlési és Automatizálási Intézetében

1977-ben végző hallgatók részére.

A pályázaton mindazon hallgató részt vehet, aki államvizsgáját legkésőbb 1977. október 31-ig jeles vagy jó eredménnyel leteszi és diplomatervét, illetve szakdolgozatát az Állami Vizsgáztató Bizottság a pályázatra alkalmasnak tartja. (A pályázaton való részvétel esetén adatlapot kell kitölteni, amely a HTE titkárságán igényelhető.)

A pályázat célja a jó tanulmányi eredményt és a legjobb

diplomatervét, illetve szakdolgozatot kidolgozó végzős szakemberek megbecslése és munkájuk külön jutalmazása.

A pályázatra az Állami Vizsgáztató Bizottság közvetítésével lehet jelentkezni.

Pályadíjak:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a diplomaterv-pályázaton: | a szakdolgozat-pályázaton: |
| I. díj 1500,— Ft | I. díj 1200,— Ft |
| II. díj 1200,— Ft | II. díj 1000,— Ft |
| III. díj 1000,— Ft | III. díj 800,— Ft |

A díjak odaítéléséről bíráló bizottság dönt, amelynek elnökét és két tagját a HTE, további két tagját az iskola jelöli ki. A díjakat az Egyesület ünnepélyes ülésén nyújtják át a nyerteseknek. A díjnyertesek a HTE rendezvényei keretében munkájukról előadást tarthatnak és tanulmányt jelentethetnek meg az egyesület tudományos folyóiratában, a Híradástechnikában.

Dr. Házman István

a HTE Oktatási Bizottságának vezetője