

SZABÓ CSABA

BME Híradástechnikai Elektronika Intézet

## A fáziszárt hurok, mint vivőszűrő

ETO 621.376.4:621.391.822

Ebben a cikkben összefoglaljuk a fáziszárt hurkoknak azokat a tulajdonságait, amelyek koherens információközlő rendszerekben vivőszűrés, -helyreállítás és -szinkronizálás szempontjából lényegesek.

Elsősorban az előállított vivő fáziszájának statisztikus jellemzésére szorítkozunk, az információközlő rendszerek tulajdonságainak meghatározása szempontjából lényeges követési üzemmódban, additív gaussi zaj esetén. Törekedni fogunk a linearizált modellekből kapható, a számításokban egyszerűen felhasználható eredmények összefoglalására, amelyek a gyakorlati esetek széles körében jól alkalmazhatók. Az elnyomott vivőt helyreállító hurkok egy típusára, a döntésvisszacsatolt hurokra, saját eredményt ismertetünk.

A vivő fáziszájának hatását a demodulálás minőségére egy későbbi cikkben fogjuk megvizsgálni.

Jelölések:

$A_1, A_2$	a bemenőjel, ill. a VCO (feszültség-vezérelt oszcillátor) jelének effektív értéke,
$\alpha$	a hurok jel-zaj viszonya,
$B_L$	a hurok ekvivalens zajsávszélessége,
$B_1$	bemeneti sávszélesség,
$b$	relatív hurok-sávszélesség; a bemeneti- és a hurok-sávszélesség viszonya,
$D_\varphi^2 = E(\varphi - E(\varphi))^2$	a fázis varianciája,
$E$	a statisztikus átlagolás jele,
$h(t)$	súlyfüggvény,
$H_1(s), H(s)$	a hurok szűrő, ill. a hurok transzfer függvénye,
$H(p)$	a hurok transzfer függvény operátoros alakban,
$K_0$	a VCO állandója,
$K_d$	a fázisdetektor állandója,
$K$	a hurokerősítés,
$m(t)$	a moduláló jel,
$\hat{m}(t)$	a moduláló jel becslése,
$n(t)$	a bemeneti additív zaj,
$n_p(t), n_q(t)$	a zaj kvadratúra-felbontásának összetevői,
$p = d/dt$	a Heaviside-operátor,
$p(\varphi)$	a fázis valószínűség-sűrűségfüggvénye,
$P_e, P'_e$	hibavalószínűség,
$R$	bemeneti jel-zaj viszony digitális modulációnál: a jelteljesítmény és az $1/T$ sávszélességben bejövő zajteljesítmény viszonya,
$s(t)$	a bemenőjel,

$\Theta_1(t), \Theta_2(t)$  a bemenőjel, ill. a VCO-jel fázisa,  
 $\Theta_1(t), \Theta_2(t)$  a bemenőjel, ill. a VCO-jel fázisa a VCO frekvenciájára vonatkoztatva,  
 $\sigma_\varphi$  a Gauss-eloszlás szórása.

### 1. Az egyszerű analóg fáziszárt hurok tulajdonságai

Az 1. ábrán látható az analóg fáziszárt hurok alaptípusa, szorzó típusú fázisdetektor esetén. Erre az alaptípusra a gyakorlatban alkalmazott bonyolultabb, transzponálást, frekvencia-sokszorozást és -osztást tartalmazó rendszerek visszavezethetők. A közbelső frekvenciás szűrés hatása alapsávba transzponálással vehető figyelembe [1, 2], s a transzponálást, frekvenciasokszorozást alkalmazó hurkok zaj szempontjából ugyanazokkal az egyenletekkel írhatók le [3], vagy ugyanazzal a matematikai apparátussal kezelhetők [4].

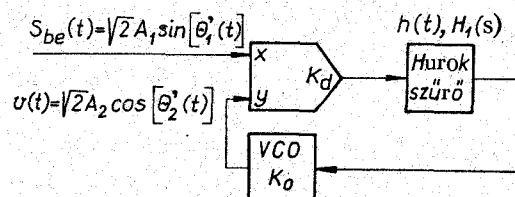
A működést leíró alapegyenlet egyszerűen felírható:

$$\frac{d\Theta_2(t)}{dt} = K \int_0^t \sin[\Theta_1(\sigma) - \Theta_2(\sigma)] h(t - \sigma) d\sigma \quad (1)$$

vagy

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\Theta_1(t)}{dt} - K \int_0^t \sin \varphi(\sigma) h(t - \sigma) d\sigma \quad (2)$$

alakban, ahol  $K = A_1 A_2 K_d K_0$  a teljes hurokerősítés,  $\Theta_1(t)$  és  $\Theta_2(t)$  a bemeneti és a VCO jel fázisa a VCO



[H 510-SC 1]

nyugalmi frekvenciájára ( $\omega_0$ -ra) vonatkoztatva, azaz  $\Theta_1(t) = \Theta'_1(t) - \omega_0 t$  és  $\Theta_2(t) = \Theta'_2(t) - \omega_0 t$ ,  $\varphi(t) = \Theta_1(t) - \Theta_2(t)$  a dinamikus fáziskülönbség.

Az (1) vagy (2) összefüggés helyett gyakran célszerűbb a (3) szerinti, differenciálegyenletes felírási formát használni:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\Theta_1(t)}{dt} - K \cdot H_1(p) \cdot \sin \varphi(t), \quad (3)$$

ahol  $H_1(p)$  formailag megegyezik a hurokszűrő  $H_1(s)$  transzfer függvényével, változója azonban a  $p = d/dt$  Heaviside-operátor.

A fenti nemlineáris integro-differenciálegyenletek az ismert módon linearizálhatók, ha feltételezzük, hogy a  $\varphi(t)$  fázishiba minden időben jóval kisebb 1 rad-nál. A vizsgálatok alapját ilyenkor az (1) vagy (2) egyenlet Laplace-transzformáltjai alkotják.

Ha a bemenő zaj zérus várható értékű, stacionárius, fehér Gauss-zaj,  $N_0/2$  spektrális sűrűséggel, akkor a hurok alapegyenlete a sávhatárolt folyamatokra érvényes

$$n(t) = n_p(t) \sin \omega_0 t - n_q(t) \cos \omega_0 t \quad (4)$$

felbontás felhasználásával a következőképpen írható:

$$\frac{d\Theta_2(t)}{dt} = K_d K_0 A_2 \int_0^t \{ A_1 \sin \{ \Theta_1(\sigma) - \Theta_2(\sigma) \} + n'(\sigma) \} h(t - \sigma) d\sigma, \quad (5)$$

ahol

$$n'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} n_p(t) \sin \Theta_2(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} n_q(t) \cos \Theta_2(t), \quad (6)$$

és kimutatható, hogy a bemenetivel megegyező,  $N_0/2$  spektrálsűrűségű fehér zaj.

Az egyenletről látható, hogy a VCO a szűrő által módosított  $n'(t)$  zaj hatására fázismodulált lesz. A fázist mint véletlen folyamatot a linearizált modellben belül egyszerűen a varianciájával jellemezhetjük:

$$D_\varphi^2 = \frac{N_0 B_L}{A_1^2} = \frac{1}{\alpha}, \quad (7)$$

ahol

$$\alpha = \frac{A_1^2}{N_0 B_L} \quad (8)$$

az ún. hurok jel-zaj viszonyt,  $B_L$  pedig az egyvonalas zajsávzsélességet jelöli:

$$B_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega. \quad (9)$$

Nemlineáris analízisnél három esetet különböztethetünk meg [5]:

a) a bemenő zaj korrelációs ideje (azaz az autokorrelációs függvényből számítható  $t_R = \frac{1}{R(0)_0} \int_0^\infty |R(\tau)| d\tau$  mennyiség) jóval kisebb a PLL időállandójánál,

b) a bemenő zaj korrelációs ideje jóval nagyobb a PLL időállandójánál,

c) átmeneti állapot az a) és a b) eset között.

A gyakorlatban legfontosabb a) esetben a fázis Markov-folyamat és a Fokker-Planck-egyenletekkel jellemezhetjük [6-10]. (A matematikai apparátusra vonatkozóan lásd a Híradástechnikában Pap L. cikket [11]). A b) esetben - amely szinkronizálási feladatokban ritkábban fordul elő - az ún. kvázistatikus módszerrel kaphatjuk meg a fázis sűrűségfüggvényét, lényegében Gauss-folyamat nemlineáris transzformációjának alkalmazásával [12]. A c) határesetre nézve, az irodalomban nem találtunk részletes vizsgálatot.

Visszatérve az a) esetre, viszonylag egyszerűen vizsgálható az elsőrendű, egyes típusú hurok (a terminológiát [13] szerint használjuk), nulla kezdeti frekvenciakülönbség esetén. Ekkor az (5) egyenlet átalakításával nyerhető

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -K \sin \varphi(t) - K' n'(t), \quad K' = A_2 K_d K_0 \quad (10)$$

egyenlet írja le a fáziszárt hurok működését zajban, és a  $\varphi(t)$  fázisfolyamat statisztikus jellemzése a feladatunk.

A fázis valószínűség-sűrűségfüggvényét a Fokker-Planck-egyenletek megoldásával kaphatjuk meg (l. pl. [2]-ben), amely időfüggő és több módusú,  $2\pi$  többszöröseinél kialakuló helyi maximumokkal. Viterbi [8] és Tihonov [6, 7] a problémát a fázis mod  $2\pi$  szerinti értelmezésével tették kezelhetővé, a folyamat így már időfüggetlen, egydimenziós sűrűségfüggvényrel jellemezhető. Ezt a teljességhez persze ki kell egészíteni, pl. a cikluscusúsások átlagos frekvenciájának a megadásával. Vívó-előállítási feladatokban legtöbbször megelégedhetünk azonban a fázis mod  $2\pi$  sűrűségfüggvényének megadásával. Mindezek alapján elsőrendű hurokra, nulla frekvenciakülönbség esetén adódik a legegyszerűbb eredmény:

$$p(\varphi) = \frac{\exp(\alpha \cdot \cos \varphi)}{2\pi \cdot I_0(\alpha)}, \quad (11)$$

ahol  $I_0(\alpha)$  az elsőfajú, módosított, nulladrendű Bessel-függvény.

Véges kezdeti elhangolásnál a fázis nullától különböző várható értékű, és nullára nem szimmetrikus. Nagy  $\alpha$  esetén közel szimmetrikussá válik a zajmentes esetben adódó állandósult fázishiba mint várható érték körül. A gyakorlatban fontos másodrendű, egyes típusú hurokra, véges kezdeti frekvenciakülönbség esetén [14]-ben találunk eredményeket, amelyek ábrázolására, származékainak (momentumainak) meghatározására és felhasználására zajos vívó esetén numerikus módszereket kell alkalmaznunk.

Lindsey és Charles kísérleti úton is meghatározták a fázis sűrűségfüggvényét különböző hurok jel-zaj viszony esetén. A részletes vizsgálatokból az a fontos következtetés vonható le, hogy elsőrendű és másodrendű, egyes típusú hurokra zérus elhangolás esetén  $\alpha > 7$ -re a gaussi közelítés,  $\alpha > 1$ -re pedig a (11) szerinti sűrűségfüggvény alkalmazható [9].

2. Elynomott vivőt követő hurok

Ha a vivő helyén nincs diszkrét spektrumösszetevő, az egyszerű fáziszárt hurok nem alkalmas a vivő helyreállítására. A fázisszinkronizálási elvet ilyenkor valamilyen nemlineáris művelettel kell kombinálni. A leggyakrabban alkalmazott megoldások egyike a hurok előtt négyzetre emelő áramkört tartalmaz, a másik jól ismert megoldásnál pedig magában a hurokban van nemlineáris művelet. Végül felhasználhatjuk a modulációs tartalom előzetes becslését is a vivő helyreállítására. A három megoldás szokásos neve:

- a) négyzetre emelő hurok (squaring loop),
- b) Costas-hurok,
- c) döntésvisszacsátolt hurok (decision-directed feedback loop).

Ezek a rendszerek és kombinációik számos, elnyomott vivőjú modulációs eljárás esetén alkalmazhatók, a továbbiakban azonban — későbbi céljainknak is megfelelően — a bináris állapot-fázismoduláció esetét vesszük alapul, amikor a hurok bemenetére az

$$s(t) = \sqrt{2Pm(t)} \cos \omega_0 t \quad (12)$$

jel jut, ahol

$$m(t) = \pm 1, \text{ ha } t_i \leq t \leq t_i + T_0,$$

$t_i$  az  $t$ -edik váltási időpont,

$T_0$  a szimbólum (bit) időtartama,

$P$  a jel teljesítménye.

2.1 A négyzetre emelő és a Costas-hurok

A négyzetre emelő hurok egyik szokásos egyszerű felépítése a 2. ábrán látható. A bemeneti sávszűrő után, a zaj már alkalmazott (4) felbontását felhasználva adódik, hogy

$$y'(t) = \sqrt{2Pm(t)} \cos \omega_0 t + n_p(t) \cos \omega_0 t - n_q(t) \sin \omega_0 t \quad (13)$$

A négyzetre emelést elvégezve, és a  $2\omega_0$  körüli komponenseket megtartva kapjuk, hogy

$$z(t) = \left[ Pm^2(t) + \frac{n_p^2(t)}{2} - \frac{n_q^2(t)}{2} + \sqrt{2Pm(t)}n_p(t) \right] \cos 2\omega_0 t - \left[ \sqrt{2Pm(t)}n_q(t) + n_p(t)n_q(t) \right] \sin 2\omega_0 t \quad (14)$$

Esetünkben  $m^2(t) = 1$ , s ez egy modulálatlan,  $2\omega_0$  frekvenciájú komponenst eredményez. Ezek után a fáziszárt hurok az egyszerű huroknál alkalmazható módszerekkel vizsgálható, bár a bemeneten jelentkező zaj leírása nem egyszerű [15]. A fázis sűrűségfüggvénye általános esetben nehezen kezelhető [16].

Linearizált modell alkalmazása esetén a fáziszaj varianciája a megelőző nemlinearitás hatása miatt várhatóan nagyobb lesz, mint az egyszerű huroké. Az eredmény ideális sávszűrő alkalmazása esetén [17]:

$$D_\varphi^2 = \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{B_i}{2\alpha B_L} \right), \quad (15)$$

ahol a zárójelben levő második tag jelenti az egyszerű hurokhoz képesti növekedést.

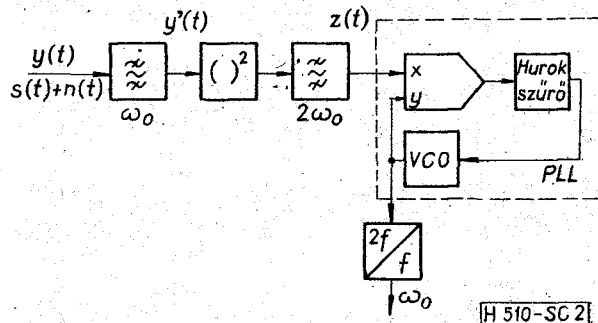
Az először [18]-ban javasolt Costas-hurok működésének lényege a 3. ábrán látható. A bemenőjelet itt egyrészt a VCO jelével (felső ág), másrészt a VCO  $\frac{\pi}{2}$ -vel fázistolt jelével (alsó ág) szorozzuk meg. Az aluláteresztő szűrők a kétszeres vivőfrekvenciás komponenseket elnyomják, de a modulációs tartalmat még torzítás nélkül átengedik. A két jel összeszorozása jelenti itt a nemlineáris műveletet, s a hurok szűrőn keresztül mindkét ág a VCO-ra záródik.

Kimutatható, hogy a Costas-hurok a leíró differenciál-egyenletet és a fázis statisztikus jellemzését tekintve teljesen azonos a négyzetre emelő hurokkal [19].

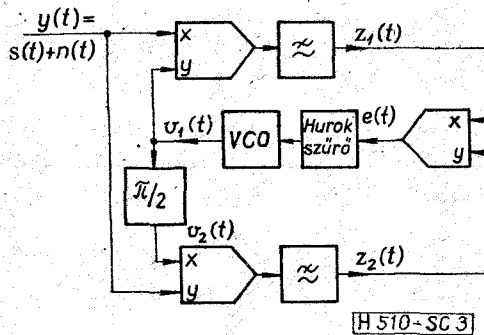
Megjegyezzük, hogy mind a négyzetre emelő, mind a Costas-hurok négyállapotú fázismoduláció esetén is alkalmas a vivő előállítására, természetesen bonyolultabb felépítésben.

2.2 A döntésvisszacsátolt hurok

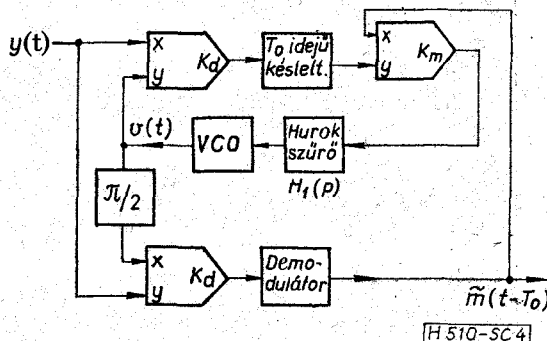
Az egyik lehetséges megvalósítás a 4. ábra szerinti, és egy kissé emlékeztet a Costas-hurokra [20]. Most



2. ábra. A négyzetre emelő hurok



3. ábra. A Costas-hurok



4. ábra. Döntésvisszacsátolt hurok, BPSK

azonban az alsó ágban egy adat-demodulátor van elhelyezve, s a demodulált adatjelet szorozzuk össze a felső ág egy szimbólumidőre késleltetett jelével (erre nyilvánvalóan azért van szükség, hogy ugyanahhoz a szimbólumidőhöz tartozó  $m(t)$ -t és  $\tilde{m}(t)$ -t szorozzunk össze).

Ha a bemeneti jel-zaj az előzőek szerint

$$y(t) = \sqrt{2P}m(t) \cos \omega_0 t + n(t), \quad (16)$$

a VCO  $v(t)$  jelét pedig

$$v(t) = \sqrt{2}A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (17)$$

alakúra vesszük fel, és feltételezzük, hogy a szimbólum-frekvencia jóval nagyobb a PLL sávszélességénél, a hurok alapegyenlete a következő alakban írható [19]:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\Theta_1(t)}{dt}$$

$$-K'H_1(p) \{ \sqrt{P}[1 - 2P_e(\varphi)] \sin \varphi(t) + \tilde{m}(t)n'(t) \}. \quad (18)$$

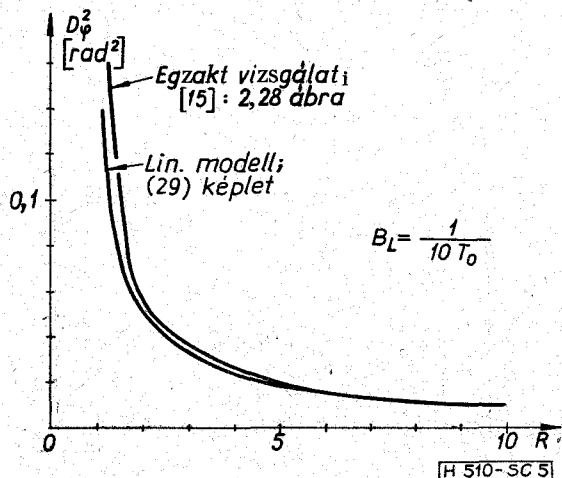
Itt  $K' = K_d K_0 K_m A_2$ ,  $n'(t)$  a (6) összefüggés szerinti,  $\tilde{m}(t)$  a moduláló jel becslése és  $P_e(\varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{R} \cos \varphi)$ , a hibaválószerűség bináris PSK esetén, ahol  $R = \frac{PT_0}{N_0}$  bemeneti jel-zaj viszony jellegű mennyiség.

Az egyenlet formailag megegyezik a fáziszárt hurok alapegyenletével, a szinuszos nemlinearitás megfelelő helyettesítésével. Analízise megtalálható pl. [19]-ben. A fázis sűrűségfüggvénye zárt alakban nem kapható meg, s az eredmények numerikus módszerekkel is nehezen kezelhetők.

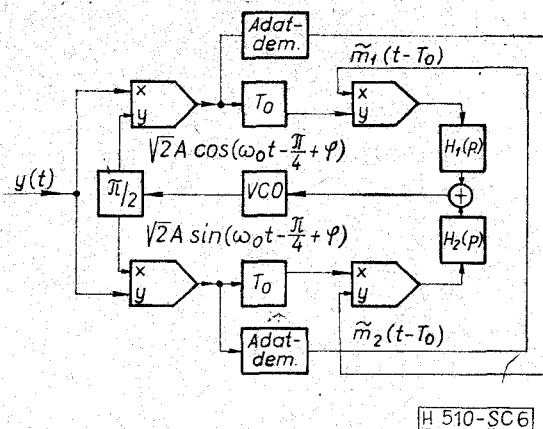
Linearizált modell alkalmazása esetén (amelyre nézve az irodalomban nem találtunk utalást) viszonylag egyszerűen meghatározható a fázis varianciája. A számítás részleteit a függelék tartalmazza. Az eredmény:

$$D_\varphi^2 = \frac{B_L N_0}{P(1 - 2P_e)^2}, \quad (19)$$

ahol  $B_L$  a szokásos módon értelmezett hurok-zajsávszélesség.



5. ábra. A fázis varianciája a döntésvisszacsatolt hurokban



6. ábra. Négy szintű döntésvisszacsatolt hurok

A kapott eredmény azt mutatja, hogy nagy  $R$  esetén ( $P_e \ll 1$ ) a döntésvisszacsatolt hurokban a fázis varianciája akkora, amekkora az egyszerű hurokra adódna, ha annak bemenetére a PSK jel effektív értékével megegyező folyamatos vivő jutna.

A nemlineáris vizsgálat eredményével való összevetés céljából felhasználhatjuk [15]-ből a 2.28. ábrát. A fázis varianciáját  $B_L = 1/10T_0$  esetére az 5. ábrán tüntettük fel.  $R \geq 2$  esetén a linearizált modell az egzakt vizsgálattal azonos eredményt ad.

Négyállapotú fázismodulációnál annak az elvnek a felhasználásával konstruálható döntésvisszacsatolt hurok, hogy az

$$s(t) = \sqrt{2P} \left[ \sin \omega_0 t + \frac{2\pi}{N} (i-1) \right]; \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (20)$$

összefüggéssel leírt QPSK jel felírható két BPSK jel összegeként:

$$s(t) = \sqrt{P}m_1(t) \sin \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{P}m_2(t) \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right), \quad (21)$$

ahol  $m_1(t) = m_2(t) = \pm 1$  bináris jelek, amelyek a négy-szintű modulálójel állapotainak megfelelően a következő értékeket veszik fel:

$k$	$m_1$	$m_2$
1	1	1
2	-1	1
3	-1	-1
4	1	-1

A négy-szintű, döntésvisszacsatolt hurok eszerint a 6. ábrán látható módon konstruálható meg [15]. Az alapegyenletből kiindulva, a fáziszaj varianciája az előzővel azonos módon határozható meg (l. a függelék). Az eredmény:

$$D_\varphi^2 = \frac{B_L N_0}{P(i - 2P_e)^2}, \quad (22)$$

ahol

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{R}{2}}. \quad (23)$$

Eszerint nagy jel-zaj viszonynál az eredmény ugyanaz, mint BPSK-nál, de  $P_e$ -t, a BPSK hibavalószínűségét most  $R/2$  értéknél kell behelyettesíteni.

A 7. és 8. ábrákon a Costas-féle és a döntésvisszacsatolt hurok esetén adódó számítási eredményeket ábrázoltuk az  $R$  paraméter függvényében két-, ill. négyállapotú moduláció esetén. Látható, hogy bináris esetben a helyzet a két esetben közel azonos, csak kis jel-zaj viszonynál van eltérés. Négyállapotú esetben nagyobb az eltérés, különösen kis jel-zaj viszonyoknál (a  $b$  paraméter jelentése: az  $1/T_0$  frekvencia — kb. a bemeneti sávzsélesség — és a hurok-zajszélesség viszonya).

**Összefoglalás**

Linearizált modellek alkalmazásával a fáziszárt elven működő szinkronizáló (vivőszűrő) rendszerek tulajdonságait követési üzemmódban igen egyszerűen jellemezhetjük. Az egyszerű fáziszárt hurok, amelyre a fázis varianciáját jól ismert módon a hurok jel-zaj viszony határozza meg [l. a (7) összefüggést] csak pilotvivős esetben alkalmazható. Az elnyomott vivőt követő hurkok közül a négyzetre emelő hurok (ill. a Costas-hurok) és a döntésvisszacsatolt hurok felépítésével, tulajdonságaival foglalkoztunk. A fázis varianciáját az előbbi típusú hurokra az irodalomból idéztük, az utóbbira nézve pedig az ismert alapegyenletekből kiindulva meghatároztuk, két- és négyállapotú fázismodulációra. Az eredmények, amelyeket a 7. és 8. ábrán illusztráltunk, digitális fázismodulált jelek vételekor alkalmazhatók a hibavalószínűség meghatározására, ha a szinkronizáló rendszer hibáját (az előállított vivő zajosságát) akarjuk figyelembe venni [20].

**Függelék.**

A fázis varianciájának meghatározása a döntésvisszacsatolt hurokban

A (18) alapegyenletet (bináris fázismoduláció esete) felhasználva, linearizált modellhez jutunk  $\varphi(t) \ll 1$  feltételezésével, az alábbi helyettesítésekkel:

$$\sin \varphi \cong \varphi; \quad \cos \varphi \cong 1;$$

$$P_e(\varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{R} \cos \varphi) \cong \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{R} = P_e.$$

A hurok alapegyenlete ekkor

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\Theta_1(t)}{dt} - K'H(p)\{C\varphi + n'(t)\tilde{m}(t)\} \quad (24)$$

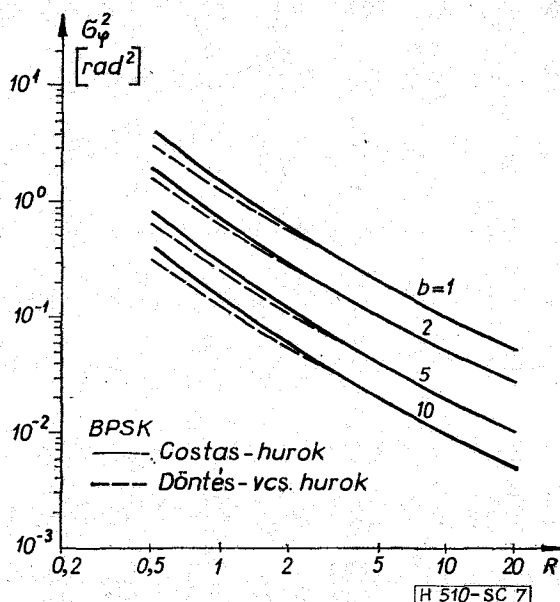
lesz, ahol  $C = \sqrt{P}(1 - 2P_e)$ .

A 9. ábrán látható rendszer most már a szokásos módszerrel vizsgálható. A zaj hatásának figyelembevételére alkalmazva a szuperpozíció elvét, az ábráról leolvashatóan a fázis spektrális sűrűségfüggvénye a következő lesz:

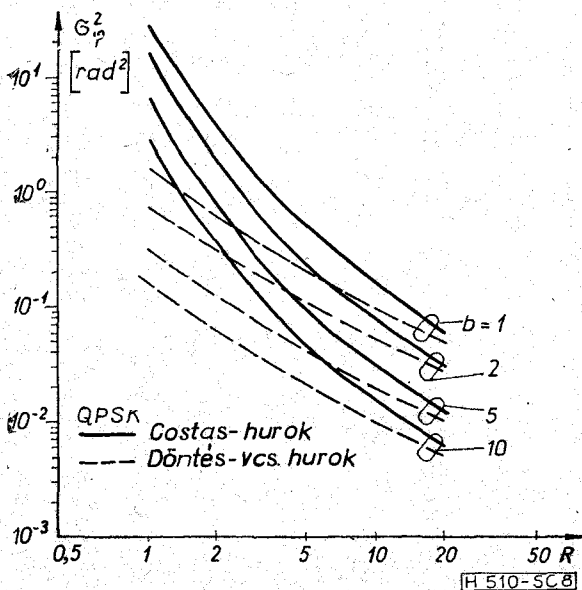
$$s_\varphi(\omega) = s_{\Theta_2}(\omega) = \frac{1}{C^2} |H(j\omega)|^2 s_{n_e}(\omega) \quad (25)$$

és

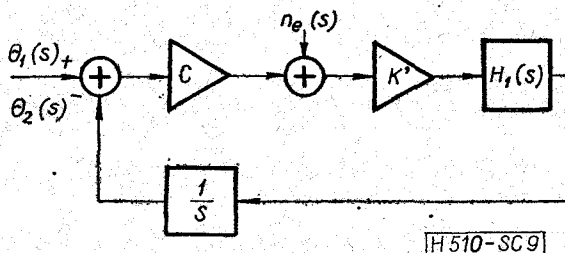
$$D_\varphi^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_\varphi(\omega) d\omega, \quad (26)$$



7. ábra. Döntésvisszacsatolt hurok, linearizált modell



8. ábra. A Costas-féle és a döntésvisszacsatolt hurok összehasonlítása, bináris moduláció



9. ábra. A Costas-féle és a döntésvisszacsatolt hurok összehasonlítása, négyállapotú moduláció

ahol  $H(j\omega)$  a

$$H(s) = \frac{K' \cdot \sqrt{P} \cdot H_1(s)}{s + K' \sqrt{P} H_1(s)} \quad (27)$$

zárthurkú transzferfüggvénynek felel meg, továbbá

I R Ó D A L O M

$$s_{n_0}(\omega) = s_n(\omega) * s_m^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_n(\omega - \nu) s_m^*(\nu) d\nu = \\ = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s_m^*(\nu) d\nu = \frac{N_0}{2}, \quad (28)$$

felhasználva, hogy  $n'(t)$  a bemenetivel megegyező,  $N_0/2$  spektrális sűrűségű fehér zaj.

Ekkor a fázis varianciájára kapjuk:

$$D_\varphi^2 = \frac{B_L N_0}{C^2} = \frac{B_L N_0}{P(1-2P_0)^2}. \quad (29)$$

A négyállapotú fázismodulációra ismert, hogy az alapegyenlet (a 6. ábra felhasználásával) a következő alakban írható [15]:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\Theta_1(t)}{dt} - \frac{K'}{\sqrt{2}} H_1(p) \{ \sqrt{P} [1 - 2P_{e_1}(\varphi)] \sin \varphi + \\ + \sqrt{2\tilde{m}_1(t)} n'(t) \} - \\ - \frac{K'}{\sqrt{2}} H_2(p) \{ \sqrt{P} [1 - 2P_{e_2}(\varphi)] \sin \varphi + \sqrt{2\tilde{m}_2(t)} n''(t) \}, \quad (30)$$

ahol

$$H_1(p) = H_2(p),$$

$$P_{e_1}(\varphi) = P_{e_2}(\varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{R'} \cos \varphi); \quad R' = \frac{R}{2},$$

$n'(t)$  és  $n''(t)$  pedig  $N_0/2$  spektrális sűrűségű fehér zaj.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$n_{e_1} = \sqrt{2\tilde{m}_1(t)} n'(t), \quad n_{e_2} = \sqrt{2\tilde{m}_2(t)} n''(t). \quad (31)$$

A bináris esethez hasonlóan látható bé, hogy  $s_{n_{e_1}}(\omega) = s_{n_{e_2}}(\omega) = N_0$ , továbbá — mivel  $n_{e_1}$  és  $n_{e_2}$  korrelálatlanok és nulla várható értékűek [15],  $s_{n_0}(\omega) = 2N_0$ . Eszerint a hurok alapegyenlete:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\Theta_1(t)}{dt} - \frac{K'}{\sqrt{2}} H_1(p) \{ 2\sqrt{P} [1 - 2P(\varphi)] \sin \varphi + \\ + n_{e_1}(t) + n_{e_2}(t) \}. \quad (32)$$

Linearizált modellhez a fentiek szerinti helyettesítésekkel jutunk, s a fázis varianciája ezek után egyszerűen meghatározható:

$$D_\varphi^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_\varphi(\omega) d\omega = \\ = \frac{1}{C^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 s_{n_0}(\omega) d\omega = \frac{B_L N_0}{P(1-2P_0)^2}. \quad (33)$$

[1] Gardner, R. M.: Phase-lock techniques. New York, Wiley, 1966.

[2] Viterbi, A. J.: Principles of Coherent Communications. New York, McGraw-Hill, 1966.

[3] Simon, M. K.: On the Equivalence of Several Phase-locked Loop Configurations. IEEE Trans. on Com. Tech., August, 1970.

[4] Kal'nin, A. A.: Vozdejsztvie sumov na szisztemu FAPCS sz uszilitelem promezsutocsnoj csasztottu. Radiotekhnika, t. 25, No. 9, 1970.

[5] Sahgil'djan, B. B.:—Ljahopkin, A. A.: Szisztémű fazovoj avtopodsztrojki csasztottu. Moszkva, Szovjetszkoje Radio, 1972.

[6] Tihonov, V. I.: Vlijanie sumov na rabotu szhemu fazovoj avtopodsztrojki csasztottu. Avtomatika i Telemekhanika, No. 9, 1959.

[7] Tihonov, V. L.: Rabota fazovoj avtopodsztrojki csasztottu pri nalicsu sumov. Avtomatika i Telemekhanika, No. 3, 1960.

[8] Viterbi, A. J.: Phase-locked Loop Dynamics in the Presence of Noise by Fokker-Planck Techniques. Proc. IEEE, Vol. 51, Dec. 1963.

[9] Lindsey, W. C.—Charles, R. J.: Some Analytical and Experimental PLL Results for low SNR. Proc. IEEE, Vol. 54, Sept. 1966.

[10] Suzuki, K.—Namekawa, T.: Dynamics of the Phase-locked Loop without a Limiter. IEEE Trans. on AES, Vol. 7, Sept. 1971.

[11] Pap L.: A Fokker-Planck-Kolmogorov-egyenlet és alkalmazása a híradástechnikában. Híradástechnika, XXVII. évf. 8. sz. 1976. aug.

[12] Sahgil'djan, B. B.: Vlijanie uzkopolosznüh fluktuacij na rabotu szisztémű fazovoj avtopodsztrojki csasztottu. Avtomatika i Telemekhanika, No. 12. 1966.

[13] Klapper, J.—Frankie, J. T.: Phase-locked and Frequency-Feedback Systems. New York, Academic Press, 1972.

[14] Lindsey, W. C.: Nonlinear analysis of Generalized Tracking System. Proc. IEEE, Vol. 57, No. 10, Oct. 1969.

[15] Lindsey, W. C.—Simon, M. K.: Telecommunication Systems Engineering. Englewood Cliffs, N. J. Prentice Hall, 1972.

[16] Lindsey, W. C.—Simon, M. K.: Nonlinear Analysis of Supressed Carrier Tracking Loops in the Presence of Frequency Detuning. Proc. IEEE, Vol.—58, No. 9, Sept. 1970.

[17] Lindsey, W. C.—Simon, M. K.: The Effect of Loop Stress on the Performance of Phase-coherent Communication Systems. IEEE Trans. on Com. Tech. Vol. 18, No. 5, Oct. 1970.

[18] Costas, J. P.: Synchronous Communications. Proc. IRE, Vol. 44, Dec. 1956.

[19] Lindsey, W. C.: Synchronization Systems is Communication and Control. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1971.

[20] Natali, R. D.—Walbesser, W. J.: Phase-locked Loop Detection of Binary PSK Signals Utilizing Decision Feedback. IEEE Trans. on AES, Vol. 5, No. 1.

[21] Szabó Cs.: Koherens demodulálás fáziszárt hurok alkalmazásával. Egyetemi doktori értekezés, 1976.