HUSZTY GÁBOR
Posta Kísérleti Intézet

Jelfeldolgozás homomorf rendszerekkel

ETO 621.372.54:621.395.665.1

Bizonyos értelemben minden híradástechnikai rendszer feladata, hogy jelfeldolgozást végezzen. A rendszer kimenő jele a bemenő jellel egy rendszerjellemző operátoron keresztül van kapcsolatban. A szokásos felosztás szerint a rendszerek lineárisak, ill. nemlineárisak lehetnek. A nemlineáris rendszerek bizonyos osztályainak új megközelítését jelenti a homomorf rendszerekkel történő jelfeldolgozás. Ezek a rendszerek a bemenetükre érkező nemlineárisan kombinált jeleket úgy alakítják át, hogy a kimenőjelek kapcsolata már lineáris jellegű.

A híradástechnikában gyakoriak az olyan összetett jelek, melyek két tényező szorzataként állnak elő. Ilyen pl. az amplitúdó modulált jel, de így közelíthető a beszédjel is [2], [11]. Ezekben az esetekben az egyik összetevő gyorsan változó, bipoláris jel, a másik viszont lassan változó, pozitív jel. Felvetődik a kérdés, hogy milyen módon lehetne ezt a két összeszorzott alkotót szétválasztani és külön kezelni, mégpedig úgy, hogy a lineáris rendszerek jól bevált eszközeit használjuk. A logaritmusfüggvény alkalmas arra, hogy két szorzott mennyiség kapcsolatát lineárissá tegye. Ugyanakkor a logaritmusfüggvényt megvalósító rendszer a szokásos szóhasználat szerint nemlineáris rendszer, azonban azzal a speciális tulajdonsággal rendelkezik, hogy kimenetén a jelek — a függvény-transzformációtól eltekintve — lineáris kapcsolatúak. Ezt a tulajdonságot alapul véve, az általánosított szuperpozíció elvének alkalmazásával fogjuk definiálni a homomorf rendszereket, ill. ezek egyik osztályát, a multiplikatív homomorf rendszereket.

Az irodalom alapján áttekintjük a homomorf rendszerek elméleti alapjait és tulajdonságait, ezen belül részletesen fogjuk vizsgálni a multiplikatív homomorf szűrőket. Összefoglaljuk a témakörben eddig megjelent munkák lényegesebb eredményeit, és ezeket néhány helyen kiegészítjük. Bemutatjuk egy, a szokásostól eltérő elven működő kompandor modelljét [2], amely a beszédjelek feldolgozásánál jelentős lehet. A 3. fejezet irodalomból átvett példájával [2] azt kívánjuk bemutatni, hogy a multiplikatív homomorf szűrőkkel milyen módon tudunk nemlineárisan kombinált (pl. szorzott) jeleket összetevőire bontani, majd hogyan tudjuk az összetevők transzformálása után a jelet ismét egyesíteni.

A dekonvolúciós homomorf szűrőkkel itt most nem foglalkozunk, de az irodalomjegyzékben felsorolunk néhány olyan munkát, amely ezt a témakört dolgozza fel [14]—[18]. Mint látni fogjuk, a különböző átviteli függvények megvalósítása sok szempontból digitális áramkörök használatát teszi célszerűvé, így jelen munka — bizonyos mértékig — kapcsolódik a folyóirat digitális szűrők témakörű cikksorozatához is [12], [13].

Beérkezett: 1977. II. 26.

1. Az általánosított szuperpozíció elve

A híradástechnika lineáris rendszereit összeg- és aránytartó lineáris operátorokkal szokás leírni. Az utóbbi két tulajdonság a szuperpozíció elve néven ismert [1]. Bár a nemlineáris rendszerekre nem teljesülnek a linearitás követelményei, de a továbbiakban tárgyalt nemlineáris rendszerek eleget tesznek a szuperpozíció elve általánosított formájának.

1.1 A szuperpozíció elvének általánosítása

Az általánosított szuperpozíció elvének ismertetése előtt fogalmazzuk meg a szuperpozíció „hagyományos" elvét a továbbiak szempontjából előnyös formában.

Ehhez jelöljük $C\equiv C[\alpha,\beta]$-val az $[\alpha,\beta]$ zárt intervallumban folytonos és valós értékű függvények terét, mely függvények ezen intervallum külsejében azonosan nulla értékűek. Tehát $f(t)\in C[\alpha,\beta]$, ha $\mathrm{Im}[f(t)]=0$ és $\sup|f(t)|<\infty$, ha $t\in[\alpha,\beta]$, továbbá $f(t)\equiv 0$, ha $t\notin[\alpha,\beta]$. Megjegyezzük, hogy WEIERSTRASS tétele alapján ekkor valamennyi $f(t)\in C[\alpha,\beta]$ függvény egyben korlátos is [8].

Tekintsük a C függvényteret, melynek elemei az $f(t)$ és $g(t)$ függvények. Továbbá λ és μ skalárok legyenek tetszőleges komplex számok. Ezek után a szuperpozíció elvét kifejező egyenlet a következő:

$$L\{\lambda\cdot f+\mu\cdot g\}=\lambda\cdot L\{f\}+\mu\cdot L\{g\}=\lambda\cdot F+\mu\cdot G, \tag{1}$$

ahol $L\{\cdot\}$ lineáris operátor, $L\{f\}=F$ és $L\{g\}=G$, továbbá $\{F,G\}\in A$, ahol A valamilyen lineáris tér (1: Függelékben). Tehát az (1) egyenlet $L\{\cdot\}$ operátora a C és A terek között lineáris leképezést valósít meg.

A homomorf rendszerek irodalmában A. V. OPPENHEIM javaslata nyomán az (1) egyenletet az alábbiakban bevezetett új jelölésrendszer segítségével írják le [2]—[4].

Legyenek az f és g függvények a C tér elemei: $\{f,g\}\in C$. A C térben az összeadás műveletét jelöljük $\bigcirc$-rel (olv.: kör), a skalárral való szorzás műveletét pedig jelöljük $\ast$-gal (olv.: csillag). Ezek után legyen $\{F,G\}\in A$. Az A térben az összeadást jelöljük $\square$-gel (olv.: négyszög), a skalárral való szorzást pedig :-tal (olv.: kettőspont). OPPENHEIM terminológiája szerint C a bemeneti vektortér a $\bigcirc$ és $\ast$ bemeneti műveletekkel, az A pedig a kimeneti vektortér, a $\square$ és : kimeneti műveletekkel. Tegyük fel most azt, hogy létezik egy olyan $R\{\cdot\}$ operátor, mely valamely, a C és A terek közötti leképezést valósít meg. Ezt az $R\{\cdot\}$ operátort és a most bevezetett jelölésrendszert az (1) egyenletre formálisan alkalmazva:

$$R\{(\lambda\ast f)\bigcirc(\mu\ast g)\}=[\lambda:R\{f\}]\square[\mu:R\{g\}]=$$
$$=(\lambda:F)\square(\mu:G). \tag{2}$$

A (2) egyenlőség a ○, ∗, ill. □, : műveletek megfelelő megválasztásai esetén is érvényes maradhat. Ilyen értelemben a (2) egyenlet az általánosított szuperpozíció elvét fejezi ki.

Ha a be- és kimeneti műveletek az összeadást és a skalárral való szorzást jelentik, akkor a (2) egyenlet azonos az (1)-gyel.

OPPENHEIM szerint létezik az $R\{\cdot\}$ operátor olyan speciális megválasztása is, hogy ha a ○ és □ műveletek a szorzást, a ∗ és : műveletek pedig a hatványozást jelentik, akkor a (2) egyenlet továbbra is egyenlőség marad.

Példaként tekintsük az

$$R\{v_i\}=v_i^2=w_i \tag{3}$$

alakú operátort, ahol v_i a bemeneti, w_i pedig a kimeneti függvényeket jelöli. A (2) egyenletet ezzel az operátorral és az előbbi műveletekkel felírva a következő kifejezést kapjuk:

$$R\{v_1^\lambda\cdot v_2^\mu\}=[R\{v_1\}]^\lambda\cdot[R\{v_2\}]^\mu=w_1^\lambda\cdot w_2^\mu. \tag{4}$$

Az egyenlőség kézenfekvő. Így a (4) egyenlet az általánosított szuperpozíció elvét fejezi ki, $R(v)=v^2$ operációval.

1.2 Az általánosítás matematikai háttere

A továbbiakban felhasználunk néhány, az algebrai struktúrákra vonatkozó fogalmat [5]—[8]. A Függelék F. 1.—F. 4. definíciói vezetnek a lineáris terek F. 5. szerinti definíciójához, melyből kitűnik, hogy a lineáris teret végeredményben két halmazból és négy kétváltozós műveletből lehet létrehozni.

Lényeges, hogy a lineáris terek definíciójánál a vektorok összeadása és a skalárral való szorzás mint elnevezés szerepel, tehát nem kikötés az, hogy ezek a műveletek valóban a szokásos összeadás, ill. skalárral való szorzás legyenek [2]—[4].

Az F. 6. definícióban a most elmondottak szerint, a megszokott axiómákat írtuk fel, az új jelölésekkel.

Természetes, hogy a korábban már definiált C tér az F. 6. definíció valamennyi követelményének eleget tesz, ha a ○ (kör) addíciós művelet az összeadás, a ∗ (csillag) multiplikációs művelet pedig a szorzás, míg a skaláris szorzatot a következő egyenlet definiálja:

$$(f,\ g)=\int_\alpha^\beta f(t)\cdot g(t)dt \quad \text{és} \quad \{f,\ g\}\in C.$$

1.3 Az általánosítás egy alkalmazása: a multiplikatív tér

Vezessük be az M jelű multiplikatív tér fogalmát! Az F. 6. definíció axiómái az M tér esetén is teljesülnek, mely térben a ○ (kör) addíciós művelet a szorzást, a ∗ (csillag) multiplikációs művelet pedig a hatványozást jelenti, és a tér m_i elemeire: $m_i\in C\cap N$, ahol az N tér azon függvények tere, melyekre $n(t)\in N$, ha $n(t)\neq 0$ és $t\in[\alpha,\ \beta]$. Tehát az M tér elemei rendelkeznek a C tér összes tulajdonságával, és az M elemei az $[\alpha,\ \beta]$ intervallumban egyetlen pontban sem nulla értékűek. A c_i skalárok komplex számok. A térben a skaláris szorzatot az alábbi egyenlet definiálja:

$$(m_i,\ m_j)=\int_\alpha^\beta \ln|m_i(x)|\cdot\ln|m_j(x)|\ dx.$$

Az M jelű multiplikatív tér az F. 6. szerinti axiómáknak eleget tesz; erről egyszerű behelyettesítéssel lehet meggyőződni.

A multiplikatív térben a „skalárral való szorzást" hatványozásként definiáltuk, és megengedtünk komplex kitevőket is. Az $x^a=e^{a\cdot\ln x}$ egyenlőség alapján azt írhatjuk, hogy

$$[m(x)]^\lambda=\exp\{\lambda\cdot\ln[m(x)]\},$$

ahol λ valamely komplex szám. Ugyanakkor az $m(x)$ függvényekre tett megkötéseink szerint $m(x)\neq 0$ de $m(x)$ lehet negatív is. Ha a negatív értékű $m(x)$ függvényt komplex függvényként kezeljük, akkor logaritmusát a komplex logaritmusfüggvény segítségével kiszámíthatjuk. A későbbiekben használnunk kellene a komplex logaritmusfüggvény inverzét, a komplex exponenciális függvényt. Azonban, mint ismeretes,

$$\ln[m(x)]=\ln|m(x)|+j\cdot\arg[m(x)]+j\cdot 2\cdot k\cdot\pi,$$

ahol k tetszőleges egész szám, és így láthatóan a logaritmus számítása nem egyértelmű. Ha a 2π szerinti többértelműséget figyelmen kívül hagyjuk, akkor még mindig problémát jelent az, hogy a

$$\ln[m_1(x)]+\ln[m_2(x)]=\ln[m_1(x)\cdot m_1(x)]$$

egyenlőség csak akkor teljesül, ha mind $m_1(x)$, $m_2(x)$ mind szorzatuk argumentuma a $(-\pi,\ \pi)$ intervallumon belül van. A Függelékben — OPPENHEIM nyomán — bemutatjuk, hogyan lehet a logaritmusfüggvény számítását olyan módon végezni, hogy az előbbi egyenlőség teljesüljön.

2. Homomorf rendszerek

Térjünk most vissza az általánosított szuperpozíció elvéhez, ill. az F. 6. definíció T jelű lineáris teréhez. Ha létezik egy olyan $R\{\cdot\}$ operátor, mely a T tér elemeit a T tér elemeibe képezi le, akkor ezt az operátort homomorf operátornak nevezzük. OPPENHEIM megfogalmazásában: „az általánosított szuperpozíció elvének eleget tevő operátorok homomorfak." Mivel a T lineáris tér, ezért elemeire teljesül az általánosított szuperpozíció elve; így a két állítás azonos.

A műszaki szóhasználattal látszólag ellentmondást mutat az, hogy a T lineáris tér elemeire az általánosított szuperpozíció érvényességét állítottuk, míg a szokásos szóhasználat szerint a lineáris terek a szuperpozíció elvének is tesznek eleget. A lineáris tér F. 5. vagy F. 6. definíciók megfogalmazása szerint ez csak akkor van így, ha a tekintett lineáris térben értelmezett műveletek az összeadás és a skalárral való szorzás. Azt mondhatjuk, hogy a műszaki értelemben lineáris terekre a szuperpozíció elve érvényes, míg a matematikai szóhasználat általánosabb értelme szerinti lineáris terekre az általánosított szuperpozíció elve érvényes.

Az eddig elmondottak következménye, hogy ha léteznek olyan $R\{\cdot\}$ operátorok, melyek a C és M terek között, vagy ezeken belül leképezéseket valósítanak meg, akkor ezeket — lineáris helyett — homomorf operátoroknak nevezzük.

A továbbiakban a bemeneti vektorteret V-vel, elemeit v_i-vel, a kimeneti vektorteret W-vel, elemeit w_i-vel fogjuk jelölni. Az általánosított szuperpozíció elvét kifejező (2) egyenletet ezekkel így írhatjuk fel:

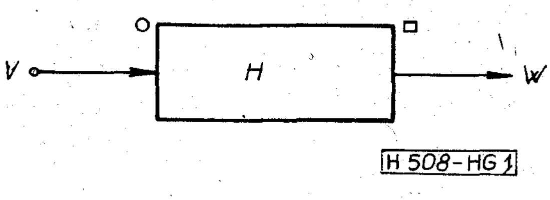
$$R\{(\lambda_1 * v_1)\circ(\lambda_2 * v_2)\}=[\lambda_1 : R\{v_1\}]\square(\lambda_2 : R\{v_2\}]. \quad (5)$$

A továbbiakban az (5) egyenlet lesz kiindulásunk alapja.

2.1 *A homomorf rendszerek néhány tulajdonsága*

Azonosítsuk a homomorf rendszereket azokkal a rendszerekkel, amelyek operátora homomorf, azaz: homomorf rendszereknek nevezzük azokat a rendszereket, melyek $H \equiv H\{\cdot\}$ operátora meghatározott tulajdonságú be- és kimenőjelek esetén eleget tesz az általánosított szuperpozíció elvének.

A homomorf rendszer legáltalánosabb ábrázolása az 1. ábrán látható.



1. ábra. A homomorf rendszerek legáltalánosabb ábrázolása

OPPENHEIM a következő két tételt mondja ki a homomorf rendszerekre [3]. Tegyük fel, hogy a rendszer $\{v_i\}$ bemenetei a $\circ$ és $*$ bemeneti műveletekkel vektorteret alkotnak. Ekkor

1. tétel: A $\square$ és : kimeneti műveletekre legfeljebb egy olyan választás van, mely esetében a rendszer homomorf.

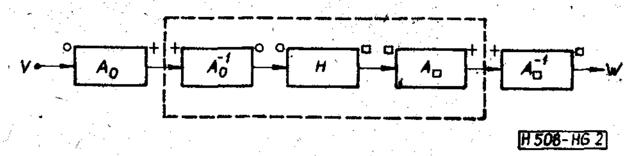
2. tétel: Ha a rendszer H operátora invertálható, azaz a be- és kimeneti jelek között egy-egy értelmű megfelelés van, akkor a $\square$ és : műveleteket megválaszthatjuk úgy, hogy a rendszer homomorf legyen, vagyis minden invertálható rendszer homomorf. A tételek bizonyítása [9]-ben megtalálható.

Igen egyszerűen belátható az is, hogy minden lineáris rendszer egyben homomorf is. Ez abból következik, hogy az $L\{\cdot\}$ lineáris transzformációk eleget tesznek a szuperpozíció elvének.

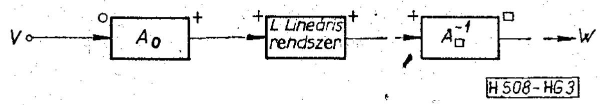
2.2 *A homomorf rendszerek kanonikus alakja*

Tekintsük az 1. ábra H homomorf rendszerét. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $A_\circ$ (olv.: A-kör) invertálható homomorf rendszer, melynek bemeneti művelete a $\circ$ (kör) művelet, kimeneti művelete pedig az összeadás. Ekkor $A_\circ$ inverzének, $A_\circ^{-1}$-nek bemeneti művelete természetesen az összeadás, kimeneti művelete pedig a $\circ$ (kör) művelet.

Az $A_\circ$ és az $A_\circ^{-1}$ jelű homomorf rendszerek előbbi sorrendű kaszkád kapcsolása ugyancsak homomorf. Az így keletkezett új rendszer transzformációt nem



2. ábra. A homomorf rendszer ekvivalens ábrázolása



3. ábra. A homomorf rendszer kanonikus alakja

végez. Így ha az $A_\circ$ és $A_\circ^{-1}$ rendszerek kaszkádját — ebben a sorrendben! — a H rendszer bemenetére kapcsoljuk, akkor az eredő rendszer szempontjából tulajdonképpen semmi sem változott. Ugyanezt az eljárást követve, tegyük fel azt is, hogy létezik egy olyan $A_\square$ (olv.: A-négyszög) invertálható homomorf rendszer, melynek bemeneti művelete a $\square$ (négyszög) művelet, kimeneti művelete pedig az összeadás. Így ezen rendszer $A_\square^{-1}$ jelű inverzének bemeneti művelete az összeadás, kimeneti művelete pedig a $\square$ művelet. Kapcsoljuk most az $A_\square$, $A_\square^{-1}$ előbbi sorrendű kaszkádját a H rendszer kimenetére. A teljes elrendezést a 2. ábra mutatja. Világos, hogy ez az ábrázolás ekvivalens a H homomorf rendszerrel. (A 2. ábrán feltüntettük a megfelelő be- és kimeneti műveleteket is.)

A 2. ábra alapján azt mondhatjuk, hogy a szaggatott vonallal határolt rendszer lineáris rendszer, hiszen be- és kimeneti művelete is az összeadás, ezért a rendszer eleget tesz a szuperpozíció elvének. Tehát továbbléphetünk az ábrázolásban, és definiálhatjuk a H rendszer ún. *kanonikus* alakját a 3. ábra szerint. Világos, hogy a H homomorf rendszer kanonikus formája hatásában ekvivalens a H rendszerrel. Ugyanakkor lényeges, hogy a 3. ábra L lineáris rendszerében már nincsen benne a H rendszer, ellenben az $A_\circ$ és az $A_\square^{-1}$ rendszerek mintegy „szétosztva" hordozzák a H tulajdonságait.

Az $A_\circ$ és $A_\square$ rendszereket karakterisztikus rendszereknek nevezték el [2]—[4].

A kanonikus alakkal kapcsolatos a következő

3. tétel: Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\circ$ bemeneti és a $\square$ kimeneti művelettel rendelkező H homomorf rendszer ábrázolható legyen kanonikus alakban az, hogy található legyen olyan invertálható $A_\circ$ és $A_\square$ karakterisztikus rendszer, melyek bemeneti művelete a $\circ$, ill. a $\square$ művelet, a kimeneti művelet pedig mindkét rendszerre az összeadás [9].

A H homomorf rendszerek valamely osztályát az $A_\circ$ és $A_\square$ rendszerek határozzák meg. Ha most ezekkel valamely tetszőleges L lineáris rendszer kaszkádba kapcsolódik a 3. ábra szerint, úgy eredményül az adott osztály egy eleme adódik [4]. Így a homomorf rendszerek valamely osztálya úgy generálható, hogy meghatározzuk a $\circ$ és $\square$ műveletek ismeretében az $A_\circ$ és $A_\square$ invertálható rendszereket.

Míg két lineáris rendszer kaszkád kapcsolása nyilvánvalóan lineáris marad, addig két homomorf rendszer kaszkád kapcsolása nem szükségképpen homomorf.

Homomorf rendszerek kaszkádba kapcsolt eredője csak akkor homomorf, ha a megelőző rendszer kimeneti művelete azonos az azt követő rendszer bemeneti műveletével.

3. Homomorf jelfeldolgozás

Az előző pontok alapján rendelkezésünkre állnak azok az eszközök, melyekkel a lineáris szűrés fogalmát bizonyos értelemben kiterjeszthetjük, pontosan úgy, ahogyan azt a szuperpozíció elvével tettük.

A 2. pont alapján a homomorf szűrők olyan homomorf rendszerek, melyeknek L lineáris rendszere lineáris szűrő.

3.1 *Multiplikatív homomorf szűrők*

A homomorf szűrők jelen pontban vizsgált osztályát a továbbiakban röviden multiplikatív szűrőknek fogjuk nevezni.

Az 1. pontban mondottak alapján legyen az M_f homomorf rendszer. A be- és kimeneti műveletek tehát a szorzás és a hatványozás.

Így az 1. pont jelöléseivel:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \bigcirc v_2 = v_1 \cdot v_2 \\ \lambda * v = v^{\lambda} \\ w_1 \square w_2 = w_1 \cdot w_2 \\ \lambda : w = w^{\lambda} \end{array}\right\}, \qquad (6)$$

ahol $w = M_f\{v\}$. Ekkor az általánosított szuperpozíció elvét kifejező (5) összefüggés most az alábbi lesz:

$$M_f\{v_1^{\lambda_1} \cdot v_2^{\lambda_2}\} = [M_f\{v_1\}]^{\lambda_1} \cdot [M_f\{v_2\}]^{\lambda_2}. \qquad (7)$$

Az M_f rendszer a 4. ábrán látható.

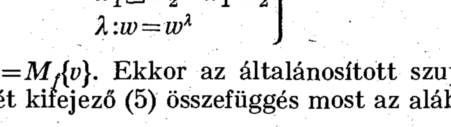
Keressük az M_f rendszer kanonikus alakját, azaz a karakterisztikus rendszereket, tehát $A_{(\cdot)}$-t és $A_{(\cdot)}^{-1}$-et. A 3. tétel alapján az $A_{(\cdot)}$-ra előírt feltételekből azonnal adódik, hogy

$$A_{(\cdot)}\{x\} = \ln(x)$$

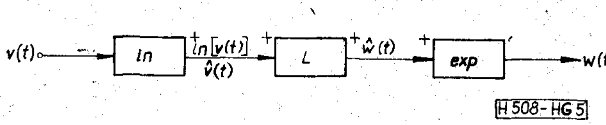
és

$$A_{(\cdot)}^{-1}(y) = \exp(y),$$

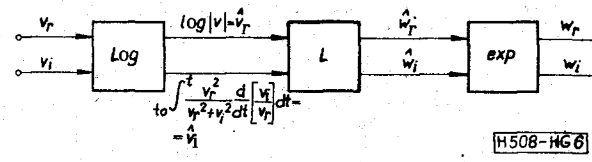
ahol $\ln(x)$ a természetes alapú logaritmust jelöli. $A_{(\cdot)}$ akkor invertálható, ha a $v(t)$ bemenőjel minden t-re csak pozitív értéket vesz fel, így a kanonikus alak az 5. ábra formájában megrajzolható. Ha a lineáris rendszer lineáris szűrő, úgy a multiplikatív szűrő kanonikus alakját kapjuk, feltételezve azt,



4. *ábra*. Multiplikatív homomorf rendszer



5. *ábra*. Multiplikatív szűrő kanonikus alakja, pozitív bemenőjelekre; a be- és kimeneti művelet a szorzás



6. *ábra*. Multiplikatív szűrő kanonikus alakja komplex értékű bemenőjelek esetén

hogy a bemenő jele pozitív. Az 5. ábrán megadott jelek: $v(t)$, $\hat{v}(t)$, $\hat{w}(t)$, $w(t)$ az ábra alapján értelmezhetők.

Legyen most $v(t)$ értelmezési tartománya a komplex sík, a $(0+j0)$ pontot kivéve. Ezzel az értelmezéssel nemcsak negatív, de tetszőleges komplex értékű függvényeket (pl. FOURIER tránszformáltakat) is figyelembe tudunk venni.

A komplex értékű bemenőjelek megengedése azonban lehetetlenné teszi az 5. ábra kanonikus alakjának alkalmazását olyan egyszerű módon, hogy a logaritmus és exponenciális függvényt egyszerűen a megfelelő komplex függvényekkel helyettesítjük. Ugyanis, bevezetve a következő jelöléseket:

$$\left.\begin{array}{l} v = v_r + jv_i \\ \ln(v) = \hat{v} = \hat{v}_r + j\hat{v}_i \end{array}\right\}, \qquad (8)$$

a komplex-logaritmusfüggvény tulajdonsága alapján azt kapjuk, hogy

$$\ln(v) = \ln\sqrt{v_r^2 + v_i^2} + j(\arg v + 2k\pi) = \hat{v}_r + j\hat{v}_i,$$

ahol k tetszőleges egész szám. Mivel $\hat{v}_i$ végtelen sok értékű lehet, ezért $A_{(\cdot)}$ nem invertálható. Ugyanakkor belátható, hogy a logaritmusfüggvény főértékével való számolás is helytelen eredményre vezet, mert a

$$\mathrm{Ln}(v_1 \cdot v_2) = \mathrm{Ln}(v_1) + \mathrm{Ln}(v_2)$$

egyenlőség — ahol $\mathrm{Ln}(x)$ a komplex-logaritmusfüggvény főértékét jelöli — csak akkor igaz, ha mind v_1 és v_2 argumentuma, mind pedig az argumentumok összege is a $-\pi < \varphi < \pi$ intervallumba esik. A problémát úgy oldhatjuk meg, ha a $v(t)$ jelre előírjuk azt, hogy:

1., $v(t) \neq 0$

2., $v(t)|_{t=t_0} > 1$ valós, ha a bemeneti műveletként definiált hatványozás λ hatványkitevője valós szám,

3., $v(t)|_{t=t_0} = 1$ valós, ha a bemeneti műveletként definiált hatványozás λ hatványkitevője komplex szám,

továbbá a Függelékben bevezetett Log jelű logaritmusképzést alkalmazzuk.

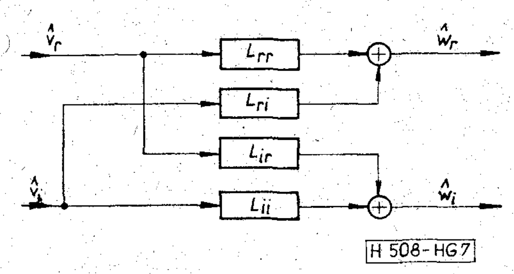
Felhasználva az 5. ábrát és az (F. 2), ill. (F. 3) egyenleteket, megrajzolhatjuk a 6. ábrát, azaz annak a multiplikatív szűrőnek a kanonikus alakját, mely az 1., 2., 3., követelményeknek eleget tevő $v(t)$ jelek feldolgozására alkalmas.

Figyelembe véve a komplex exponenciális függvény definícióját, azt írhatjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{l} w_r = \exp(\hat{w}_r) \cdot \cos\hat{w}_i \\ w_i = \exp(\hat{w}_r) \cdot \sin\hat{w}_i \end{array}\right\}. \qquad (9)$$

és

Megjegyezzük, hogy a 6. ábra valamennyi egysége négykapu.



7. ábra. Komplex értékű bemenőjeleket feldolgozó multiplikatív szűrő lineáris rendszere

A 6. ábra L lineáris rendszere a 7. ábra szerint négy alrendszerre bontható. Ha a $v(t)$ jellel kapcsolatos λ valós (lásd az 1., 2., 3., feltételeket), akkor az alrendszerekre nincsen külön kikötés, de ha λ komplex, akkor az L rendszerre vonatkozó szuperpozíció elv alapján kell, hogy

$$L_{rr}=L_{ii}$$

és

$$L_{ri}=-L_{ir}$$

legyen [2].

3.2 *A multiplikatív szűrők alkalmazása*

A multiplikatív szűrőkkel olyan jeleket tudunk feldolgozni, melyek két tényező szorzataként állnak elő. Ilyen pl. az amplitúdó-modulált jel, de így közelíthető a beszédjel is [2], [11].

Ha az L lineáris rendszerre előírjuk, hogy

$$L_{ir}=L_{ri}=0$$

és

$$L_{ii}=m$$

legyen, ahol m egész szám, úgy a multiplikatív szűrő a 8. ábrán látható felépítésű, és alkalmas /bipoláris/• •/pozitív/ alakú jel feldolgozására.

Ha $v(t)=e(t)\cdot m(t)$, ahol $e(t)$ pozitív és $m(t)$ bipoláris jel, akkor azt írhatjuk, hogy

$$v(t)=|v(t)|\cdot\exp\left\{j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot[1-\operatorname{sign} v(t)]\right\}, \tag{10}$$

ahol

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}+1 & \text{ha} \quad x>0\\ -1 & \text{ha} \quad x<0\end{cases}.$$

A $v(t)$ beszédjel és alkotóinak $(e(t), m(t))$ jellegét a 9. ábra mutatja.

A szűrő $w(t)$ kimenőjele legyen az alábbi alakú:

$$w(t)=e'(t)\cdot m'(t),$$

ahol $e'(t)$ a szűrőnek az $e(t)$ jelre adott válasza, $m'(t)$ pedig az $m(t)$ jelre adott válasza. Ez a meghatározás nem más, mint az általánosított szuperpozíció elvének alkalmazása, ugyanis, ha M_f a multiplikatív szűrő transzformációja, úgy előbbi feltételünk így is megfogalmazható:

$$M_f\{e(t)\cdot m(t)\}=M_f\{e(t)\}\cdot M_f\{m(t)\}=e'(t)\cdot m'(t)$$

(vö. az (5) egyenlettel!).

Ha feltételezzük, hogy $v(t)\neq 0$, akkor a (10) alapján:

$$\operatorname{Log}[v(t)]=\ln|v(t)|+j\frac{\pi}{2}[1-\operatorname{sign} v(t)].$$

Ha $m(t)=0$, akkor $v(t)=0$. Azonban a multiplikatív szűrő bemenetére nulla értékű jel nem vezethető. A logaritmusszámításnál ezért azon pontok kellőképpen kicsiny ($\delta_{i,1}$; $\delta_{i,2}$) környezetét, ahol $v(t)=0$, nem vesszük figyelembe. A 9. ábra részletének nagyított képe és a nullátmenet kihagyásával keletkező görbe a 10. ábrán látható. A t_i ($\delta_{i,1}$; $\delta_{i,2}$) környezetére nézve azonban a kézbentarthatóság szempontjából előírjuk, hogy $|v(t_i-\delta_{i,1})|=|v(t_i+\delta_{i,2})|$ legyen. A $[(t_i-\delta_{i,1})$; $(t_i+\delta_{i,2})]$ intervallumban a $v(t)$ függvényt a $v(t_i-\delta_{i,1})$ értékkél helyettesítjük. Így egy olyan $v^*(t)$ függvényt kaptunk, mely a $v(t)$ függvénnyel – a nulla helyek ($\delta_{i,1}$; $\delta_{i,2}$) környezeteit leszámítva – megegyezik, és $v^*(t)\neq 0$. A továbbiakban $v(t)$-vel a már ilyen $v^*(t)$ görbét fogjuk jelölni.

Mielőtt továbblépnénk, foglaljuk össze jelöléseinket, melyek egy része a 8. ábrán már szerepelt: $v(t)=e(t)\cdot m(t)$, a bemenő jel (beszédjel),

$e(t)$, a pozitív („burkoló") jel,
$m(t)$, a bipoláris jel,

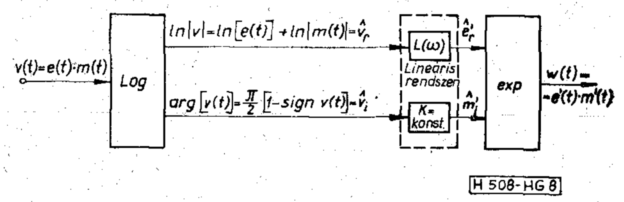
míg

$$\hat{v}(t)=\operatorname{Log}[v(t)]=\hat{v}_r+j\hat{v}_i$$
$$\hat{e}(t)=\operatorname{Log}[e(t)]=\hat{e}_r+j\hat{e}_i$$
$$\hat{m}(t)=\operatorname{Log}[m(t)]=\hat{m}_r+j\hat{m}_i,$$

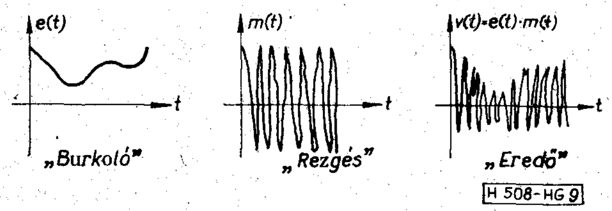
és

$\hat{v}'(t)=L\{\hat{v}(t)\}$, ahol $L\{\cdot\}$ a lineáris rendszer operátora,

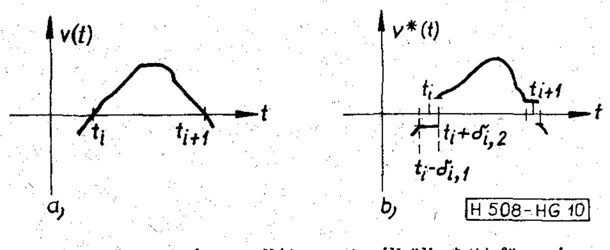
$$\hat{v}'(t)=\hat{e}'(t)+\hat{m}'(t);\quad w(t)=\exp[\hat{v}'(t)],$$
$$\hat{e}'(t)=\hat{e}'_r+j\hat{e}'_i;\quad e'(t)=\exp[\hat{e}'(t)],$$
$$\hat{m}'(t)=\hat{m}'_r+j\hat{m}'_i;\quad \hat{m}'(t)=\exp[\hat{m}'(t)].$$



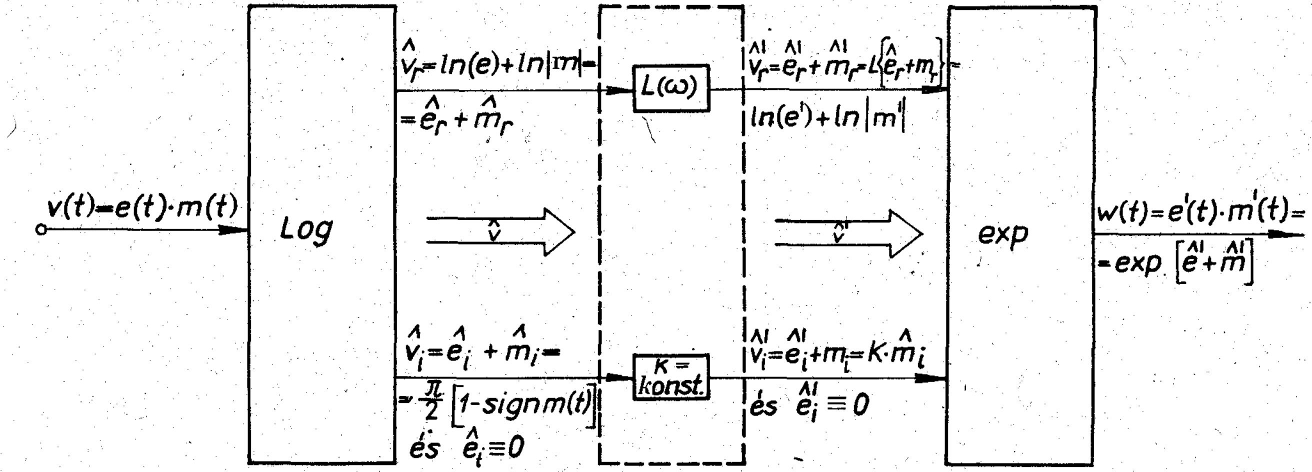
8. ábra. Bipoláris jeleket feldolgozó multiplikatív szűrő



9. ábra. A $v(t)$ bipoláris jel és komponensei



10. ábra. A $v(t)$, és a nullátmenet nélküli $v^*(t)$ függvény görbéje



11. ábra. A bipoláris jeleket feldolgozó multiplikatív szűrő kanonikus alakja

Az előbbi jelölésrendszer segítségével azt írhatjuk, hogy:

$\hat{e}_r = \ln |e(t)| = \ln e(t)$, mert $e(t) > 0$

tehát

$\hat{e}_i = 0$,

amiből következik, hogy

$\hat{v}_i = \hat{m}_i$.

Mivel

$\hat{v}'_i = k \cdot \hat{v}_i$ (k értelmezése a 11. ábrán látható), ebből az következik, hogy

$\hat{e}'_i = 0$.

Ez azt jelenti, hogy $e'(t)$ is mindig pozitív. Tehát

$\hat{v}'_i(t) = \hat{m}'_i(t)$,

és

$\hat{e}'_r(t) = \ln |e'(t)| = \ln [e'(t)]$.

A viszonyokat a 11. ábrán szemléltettük.

3.3 A homomorf multiplikatív kompandor

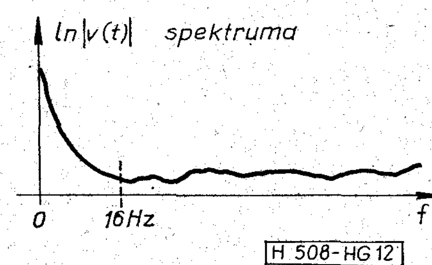
A 3.2 pont szerinti $\hat{v}'(t)$ jel két tényezője, $\hat{e}'(t)$ és $\hat{m}'(t)$ a lineáris rendszer kimenetén bizonyos körülmények között szétválasztható. STOCKHAM [11] és OPPENHEIM [2] tapasztalata szerint ugyanis beszédjel esetében $\ln [e(t)]$ és $\ln [m(t)]$ olyanok, hogy spektrális szempontból egymástól jól elkülöníthető frekvenciasávokat foglalnak el. Ezért lineáris szűrővel valóban szétválaszthatók. Az idézett irodalomban egy 7 másodperces beszédjel számítógéppel meghatározott logaritmusának spektrumát közlik, melyet a 12. ábra mutat. 16 Hz alatt és felett $\ln |v(t)|$ spektruma láthatóan jelentősen különbözik. A spektrum 16 Hz alatti szakaszát $\hat{E}(\omega)$-val, a 16 Hz feletti szakaszát $\hat{M}(\omega)$-val jelölve, $\hat{E}(\omega)$-t a lassan változó, burkoló jellegű $e(t)$ komponensnek tulajdoníthatjuk, az $\hat{M}(\omega)$-t pedig a gyorsan változó, vivő jellegű $m(t)$ tényezővel lehet összefüggésbe hozni.

A 11. ábra multiplikatív szűrőjét így kissé átalakíthatjuk. Legyen a k konstans $k=1$; akkor a 13. ábrán látható L rendszer az előbbiek alapján alkalmas $\hat{e}_r(t)$ és $\hat{m}_r(t)$ szétválasztására. Az aluláteresztő és felüláteresztő szűrőkre a szokásos jelöléseket alkalmaztuk. A $H_E(\omega)$ és $H_M(\omega)$ lineáris rendszerekkel az $\hat{m}_r$ és $\hat{e}_r$ jelek sajátságait egymástól függetlenül tetszőlegesen tudjuk alakítani.

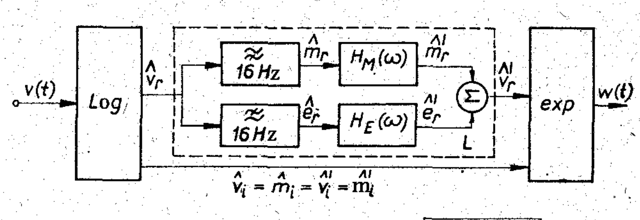
Vonjuk most össze a 13. ábrán a $H_M(\omega)$ átviteli karakterisztikájú szűrőt az eléje kapcsolt 16 Hz-es felüláteresztő szűrővel egyetlen egységgé, melynek átviteli karakterisztikáját jelöljük $H'_M(\omega)$-val. Járjunk el hasonlóképpen a $H_E(\omega)$ karakterisztikájú szűrő esetében is; az így adódó átviteli karakterisztikát jelöljük $H'_E(\omega)$-val.

Különösen érdekes, amikor valamely tetszőleges valós $a>0$ állandóval

$$|H'_M(\omega)| = \begin{cases} 0, & \text{ha } \dfrac{\omega}{2\pi} < 16 \text{ Hz} \\ 1, & \text{ha } \dfrac{\omega}{2\pi} > 16 \text{ Hz} \end{cases};$$



12. ábra. A 7 másodperces $v(t)$ beszédjel logaritmusának spektruma



13. ábra. Beszédjeleket feldolgozó multiplikatív szűrő kanonikus alakja, a lineáris rendszer részletezésével

$$|H'_E(\omega)| = \begin{cases} a, & \text{ha} \quad \frac{\omega}{2\pi} < 16 \text{ Hz} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{\omega}{2\pi} > 16 \text{ Hz} \end{cases}.$$

A $H'_M(\omega)$ és $H'_E(\omega)$ átviteli karakterisztikájú szűrőket egyesítsük a $H(\omega)$ karakterisztikával jellemzett szűrővé a következőképpen:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} a, & \text{ha} \quad \frac{\omega}{2\pi} < 16 \text{ Hz} \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{\omega}{2\pi} > 16 \text{ Hz} \end{cases}.$$

Ily módon a 13. ábra rendszerét megadhatjuk a 14. ábra szerinti formában.

Mivel az $\hat{m}(t)$ jel spektruma 16 Hz felett helyezkedik el, ezért az $\hat{m}(t)$ jel változás nélkül halad át a $H(\omega)$ lineáris rendszeren, tekintettel arra, hogy

$$\hat{m}_r(t) = \ln |m(t)|,$$

és

$$\hat{m}_i(t) = \hat{m}'_i(t) = \frac{\pi}{2} \cdot [1 - \text{sign } m(t)].$$

Mivel az $\hat{e}(t)$ jel spektruma 16 Hz alatt helyezkedik el, ezért a $H(\omega)$ szűrő kimenetén a jel amplitúdója a-szorosra változik, azaz

$$\hat{e}'(t) = a \cdot \hat{e}(t).$$

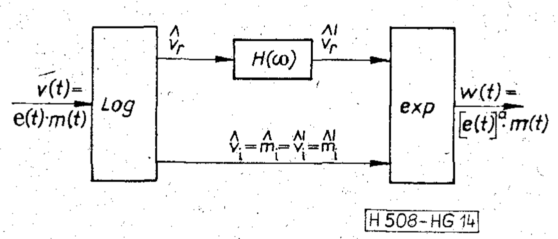
Tehát ha a 14. ábra homomorf multiplikatív szűrőjének transzformációja P, akkor

$$w(t) = P\{v(t)\} = P\{e(t) \cdot m(t)\} \cong [e(t)]^a \cdot m(t).$$

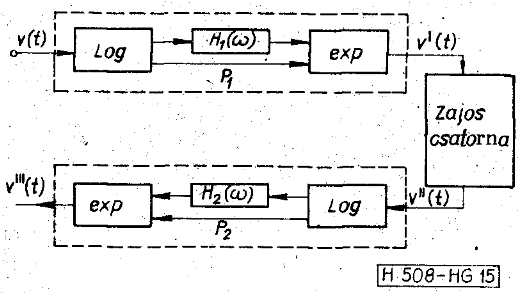
Ha $a < 1$, akkor ez a szűrő a $v(t)$ jel dinamikatartományának csökkenését eredményezi. Ha $a > 1$, akkor a $v(t)$ dinamikatartománya nő. Ha $a \ll 1$, akkor a multiplikatív szűrő automatikus erősítésszabályozóként (AGC) működik; tekintettel arra, hogy $[e(t)]^a \approx 1$, ha $a \ll 1$, azért ekkor $w(t) \approx m(t)$.

Az $a_1 < 1$ és $a_2 > 1$ eset együttes alkalmazásával egy új elven működő expander és kompresszor valósítható meg. Ez esetben természetesen $a_1 = \frac{1}{a_2}$. A multiplikatív szűrőkből felépített kompresszor és expander, melyet homomorf kompandornak nevezhetünk, a 15. ábrán, a $H_1(\omega)$ és $H_2(\omega)$ átviteli karakterisztikák a 16. ábrán láthatóak.

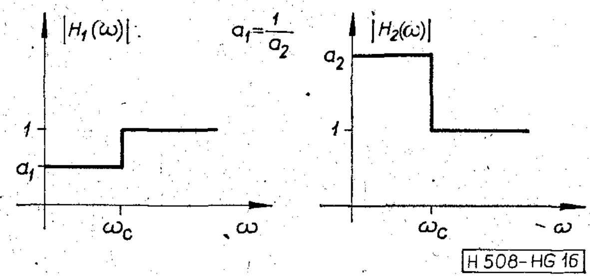
Éles $H(\omega)$ karakterisztika nem szükséges a jelek szétválasztásához, ami megérthető, ha a 12. ábra logaritmikus spektrumára tekintünk. Az $f = 16$ Hz



14. ábra. A 13. ábra multiplikatív szűrője, összevont lineáris szűrővel



15. ábra. A homomorf kompandor vázlata



16. ábra. A homomorf kompandor lineáris szűrőinek idealizált átviteli karakterisztikái

frekvenciánál alkalmazott spektrumszétválasztás láthatóan indokolt, de semmiképpen sem kell a szűrő karakterisztikájának ideális végtelen meredekségűnek lennie, hiszen a 16 Hz feletti és alatti spektrum sem élesen különül el egymástól.

A most ismertetett multiplikatív szűrőkből felépített „homomorf kompandor" rendelkezik bizonyos előnyös tulajdonságokkal. Ha ugyanis a 15. ábra kompresszorát és expanderét digitális elven valósítjuk meg, akkor mind a kompresszió-, mind az expanzióviszony könnyen és pontosan változtatható, tehát tetszőleges nemlineáris karakterisztikákat készíthetünk. Ugyanakkor a kompresszió- és expanzióviszonyok egyenlőségének biztosítása sem jelent különösebb problémát.

Érdemes külön is kiemelni az $a \ll 1$-nek megfelelő, AGC-hez hasonlítható kompresszió esetét. Ismeretes, hogy amplitúdómoduláció esetén (AM—DSB) a modulált jel teljesítményének csak mintegy felét hasznosítjuk információátvitelre. Ha feltételezzük azt, hogy a moduláló jel beszédjel, és kihasználjuk azt a tényt, hogy a beszéd érthetőségét a jel dinamikatartományának módosítása kevéssé befolyásolja, akkor az $a \ll 1$-nek megfelelő együtthatóval működő kompresszor segítségével jelentős teljesítményjavulást érhetünk el. Ekkor ugyanis a modulációs mélység közelítőleg konstans és nagy értékű lehet, és így azonos adóteljesítményt feltételezve, a kompresszió nélküli esethez képest az ellátott terület jelentősen megnő. A módszer hátránya, hogy bár az érthetőség lényegében megmarad, a hangszínezet elromlik, mert a beszédhang teljesen monotonná válik, és így a beszélő személyét gyakorlatilag nem lehet felismerni.

4. Összefoglalás

Gyakran előfordul az az eset, hogy valamely feladat megoldása a lineáris rendszerek elméletének alkalmazásával nem vezet kielégítő eredményre.

Ilyenkor a nemlineáris rendszerek bonyolult apparátusát szokás „segítségül hívni".

A homomorf rendszereket a lineáris és nemlineáris rendszerek közötti „átmenetnek" tekinthetjük, abban az értelemben, hogy ezek részben a lineáris rendszereknél megszokott eszközökkel írják le a nemlineáris rendszerek egy osztályát. A homomorf rendszerek a bemenetükre érkező jelek nemlineáris kapcsolatát lineáris jellegűvé transzformálhatják. A multiplikatív rendszerek a homomorf rendszerek alosztályát képezik.

A multiplikatív szűrők elsősorban olyan jelek feldolgozására alkalmasak, amelyek két összetevő szorzataként állnak elő. Az ilyen szűrők legjelentősebb előnye, hogy felhasználásukkal a két komponens külön-külön is alakítható. Megvalósításuk elvileg mind software, mind hardware úton lehetséges, azonban az irodalom mind ez ideig csak számítógépen szimulált homomorf szűrőket említ. A homomorf szűrők lineáris része előnyösen valósítható meg digitális szűrővel [12], [13], [18], bármilyen realizációról is van szó.

Függelék

a) *Algebrai struktúrák*

Az alábbiakban megadunk néhány, a tárgykörhöz kapcsolódó fogalmat.

F.1. definíció [5], [6]

Az a, b, c, elemekből álló S halmazt csoportnak nevezzük, ha értelmezve van benne egy binér művelet (műveleti jele: $\odot$), amely minden S-beli a, b elempárhoz egy $a \odot b$ objektumot rendel úgy, hogy

1. $a \odot b \in S$,
2. $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$, tetszőleges $(a, b, c) \in S$ esetén;
3. S tartalmaz egy e egységelemet, azaz olyan e elemet, hogy bármely $a \in S$-re $a \odot e = e \odot a = a$;
4. S minden a eleméhez van S-ben egy a^{-1} kétoldali inverz, azaz olyan a^{-1} elem, hogy $a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = e$.

Ha $a \odot b = b \odot a$, akkor a csoportot definiáló művelet kommutatív, és az S csoportot kommutatívnak vagy ABEL-csoportnak nevezzük.

F.2. definíció [7]

Az a, b, c elemekből álló R halmazt gyűrűnek nevezzük, ha értelmezve van benne két binér művelet, amelyek egyikét összeadásként, a másikat pedig szorzásként jelöljük és

1. R kommutatív csoport az összeadásra nézve;
2. $a \cdot b \in R$
3. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
4. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$; $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Ha két R-beli p és q elemre $p \cdot q = 0$, akkor p-t bal oldali, q-t jobb oldali zérusosztónak nevezzük. Ha az R gyűrű a eleméhez található olyan $a^{-1} \in R$, hogy $a^{-1} \cdot a = e$, akkor ezt az a^{-1} elemet az a elem bal oldali inverzének nevezzük. Hasonlóan értelmezhető a jobb oldali inverz is. Ha egy elemnek van bal oldali és jobb oldali inverze, akkor ezek egyenlők, és ekkor az a^{-1} elemet, melyre igaz az, hogy $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$, az a elem inverzének nevezzük.

F.3. definíció [6]

Testnek nevezzük az olyan egységelemes gyűrűt, mely tartalmaz nullától különböző elemet, és minden $a \neq 0$ elemének van a^{-1} inverze.

F.4. definíció [6]

Kommutatív testnek nevezzük azt a testet, melynek bármely a, b elempárjára: $a \cdot b = b \cdot a$.

F.5. definíció [7, 8, 10]

Valamely Ω test (pl. a valós vagy a komplex számok teste) feletti T lineáris téren olyan halmazt értünk, amelyben értelmezve van két binér művelet, az úgynevezett vektorok összeadása és a vektoroknak skalárral való szorzása.

F.6. definíció

A T lineáris tér fogalmán egy olyan függvényteret fogunk érteni, melyben az elemek (függvények) között értelmezve van egy addíciós műveletnek nevezett, és $\circ$-rel (olv.: kör) jelölt művelet, továbbá értelmezve van egy skalárok és vektorok közötti művelet, melyet multiplikációs műveletnek nevezünk, és $*$-gal (olv.: csillag) jelölünk. A $\circ$ addíciós és a $*$ multiplikációs műveletektől eltérően a skalárok közötti összeadás és szorzás műveletét a megszokott értelemben definiáljuk. Teljesüljenek a T tér elemeire az alábbi axiómák:

1—1 Ha $\{t_1; t_2\} \in T$, akkor $f_1 \circ t_2 \in T$.

1—2 Ha $\{t_1; t_2\} \in T$, akkor $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$.

1—3 Ha $\{t_1; t_2; t_3\} \in T$, akkor $t_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (t_1 \circ t_2) \circ t_3$.

1—4 Létezik a térben egy Q jelű nulla elem, melyre $t_i \circ Q = t_i$ minden $t_i \in T$-re. ($Q \in T$!)

1—5 Tetszőleges c_1 komplex szám esetén $c_1 * t_i \in T$, minden $t_i \in T$-re.

1—6 Ha $\{t_1; f_2\} \in T$ és c_1 tetszőleges komplex szám, akkor $c_1 * (t_1 \circ t_2) = (c_1 * t_1) \circ (c_1 * t_2)$.

1—7 Tetszőleges c_1 és c_2 komplex számok esetén $(c_1 + c_2) * t_i = (c_1 * t_i) \circ (c_2 * t_i)$, minden $t_i \in T$-re.

1—8 Tetszőleges c_1 és c_2 komplex szám esetén $c_1 * (c_2 * f_i) = (c_1 \cdot c_2) * t_i$, minden $t_i \in T$-re.

1—9 $1 * t_i = t_i$, minden $t_i \in T$-re, (és így az előzőekből már következik, hogy $0 * t_i = Q$, minden $t_i \in T$-re).

A T tér legyen továbbá metrikus tér, ahol a vektorok normáját az ún. skaláris szorzatból származtatjuk. A skaláris szorzat jele: (t_i, t_j), ha $\{t_i, t_j\} \in T$. A skaláris szorzattal és a normával kapcsolatban teljesüljenek az alábbi axiómák:

2—1 Tetszőleges c_1 komplex szám esetén $(c_1 * t_1, t_2) = c_1 \cdot (t_1, t_2)$, minden $\{t_1, t_2\} \in T$-re.

2—2 $(t_1 \circ t_2, \mathrm{ts}) = (t_1, \mathrm{fs}) + (t_2, t_3)$ minden $\{t_1; t_2; t_s\} \in T$-re.

2—3 $(t_1, t_2) = \overline{(t_2, t_1)}$, minden $\{t_1; t_2\} \in T$-re, ahol a felülvonás komplex t_i-k esetén konjugálást jelent.

2—4 $(t_i, t_i) = 0$, akkor és csak akkor, ha $t_i \equiv Q$, és $(t_i, t_i) > 0$, minden $t_i \in T$ esetén, ha $t_i \neq Q$.

3—1 A t_i vektor normája: $\|t_i\| = \sqrt{(t_i, t_i)} \geq 0$, minden $t_i \in T$ esetén, ill. $\|t_i\| = 0$, akkor és csak akkor, ha $t_i = Q$.

3—2 Tetszőleges c_1 komplex szám esetén $\|c_1 * t_i\| = |c_1| \cdot \|t_i\|$, minden $t_i \in T$ mellett.

3—3 $\|t_i + t_j\| \leq \|t_i\| + \|t_j\|$, minden $\{t_i; t_j\} \in T$ esetén.

Az így definiált lineáris metrikus T jelű térben a vektorok távolságát a következő egyenlet definiálja:

$$\varrho = \left\| t_i \circ t_j^{-1} \right\|,$$

ahol a t_j^{-1} ún. inverz elemre teljesül az, hogy

$$t_j \circ t_j^{-1} = Q.$$

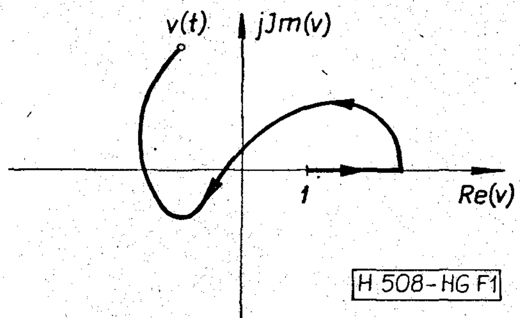
Ez utóbbi egyenlet az 1—1 és 1—9 axiómákból következik.

b) *Komplex logaritmusképzés*

Ha a 3.1. pontban említett feltételek (1, 2, és 3) teljesülnek a $v(t)$ függvényre, továbbá ha a komplex logaritmusfüggvény definícióját az alábbi formában tekintjük:

$$\log v(t) = \int_1^{v(t)} \frac{dz}{z} = \hat{v}(t) = \hat{v}_r + j\hat{v}_i, \tag{F.1}$$

és az integrálási útra előírjuk, hogy az $z = 1$-től $z = v(t_0)$-ig a valós tengelyen haladjon, utána pedig $z = v(t)$-ig kövesse a $v(t)$ görbe útját, (lásd az F. 1. ábrát) úgy a logaritmus képzésének egyértelműségét — leszámítva a 2π többszöröseire vonatkozó többértelműséget — biztosítottuk.



F. 1. *ábra.* Az integrálás útja a komplex logaritmus meghatározásához; z=1-től z=v(t₀)-ig a valós tengely

Bizonyítható [2], [9], hogy az integrálási görbére és a $v(t)$ jelre tett ezen előírás valóban biztosítja a

$$\mathrm{Log}\,(v_1 \cdot v_2) = \mathrm{Log}\,(v_1) + \mathrm{Log}\,(v_2)$$

egyenlőség teljesülését, ahol a $\mathrm{Log}\,(x)$ a $v(t)$ jelre felsorolt megkötések esetén az (F. 1) egyenlet szerinti komplex logaritmusképzést jelöli.

Az (F. 1) egyenlet átalakítható a következő alakra:

$$\hat{v}_r = \ln |v| \qquad \text{(F. 2)}$$

és

$$\hat{v}_i = \int_{t_0}^{t} \frac{v_r^2}{v_r^2 + v_i^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{v_i}{v_r} \right] \mathrm{d}t, \qquad \text{(F. 3)}$$

ahol az $(F.1)$ szerinti jelöléseket használtuk. [2], [9]

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki dr. Sallai Gyula kandidátusnak értékes megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] *GORDOS G.— VARGA A.:* Adatátvitel és adatfeldolgozás. Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

[2] A. V. *OPPENHEIM—R. W. SCHAFER—T. G. STOCKHAM:* Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals. IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, Vol. AU—16. pp. 437—466. September 1968.

[3] *A. V. OPPENHEIM:* Generalized Superposition. Information and Control, Vol. 11, pp. 528—536, November 1967.

[4] *A. V. OPPENHEIM:* Superposition in a Class of Nonlinear Systems. IEEE International Convention Records, Vol. 12, pt. 1, pp. 171—177, 1964.

[5] *G. G. HALL:* Alkalmazott csoportelmélet (fordítás angolból) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[6] *FRIED E.:* Absztrakt algebra elemi úton. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.

[7] *G. A. KORN—T. M. KORN:* Matematikai kézikönyv műszakiaknak, (Fordítás angolból) Műszaki Könyvkiadó, 1975.

[8] *FARKAS M.* szerk.*:* Matematikai Kislexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[9] *HUSZTY G.:* Jelek nemlineáris feldolgozása. Diplomaterv. Budapesti Műszaki Egyetem, Híradástechnikai Elektronikai Intézet, 1976.

[10] *FARKAS M.*-né—*FREY T.:* Matematika 1/4. Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[11] *T. G. STOCKHAM:* The Application of Generalized Linearity to Automatic Gain Control. IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, Vol. AU—16, No. 2, pp. 267—270, June, 1968.

[12] *SALLAI Gy.:* A mintavételező (digitális) szűrők osztályozása. Híradástechnika, 27. évf. 7. sz. pp. 208—214. 1976. július.

[13] *SALLAI Gy.:* A digitális szűrők tervezésének alapelvei. Híradástechnika, 27. évf. 9. sz. pp. 257—268. 1976. szeptember.

[14] *A. V. OPPENHEIM—R. W. SCHAFER:* Homomorphic Analysis of Speech. IEEE. Trans. Audio and Electroacoustics, Vol. AU—16, pp. 221—226, June 1968.

[15] *A. V. OPPENHEIM:* Nonlinear Filtering of Convolved Signals. Research Lab. of Electronics, M. I. T. Cambridge, Mass. Quart. Progr. Rept. 80, pp. 168—175, January 1966.

[16] *R. W. SCHAFER:* Echo Removal by Generalized Linear Filtering. *NEREM* Record, pp. 118—119, 1967.

[17] *R. W. SCHAFER—A. V. OPPENHEIM:* Discrete Analysis of Homomorphic Deconvolution. Research Lab. of Electronics, M. I. T. Cambridge, Mass., Quart. Progr. Rept., No. 85, pp. 231—234, April, 1967.

[18] *A. V. OPPENHEIM—R. W. SCHAFER:* Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1975.