

## Matematikai modell az ismételt hívás- kísérletek hatásának közelítő számítására

ETO 621.295.74

Az utóbbi 10–15 évben a forgalomelméleti kutatásokban nagy súllyal szerepeltek a hívások megismétlésére vonatkozó vizsgálatok. Céljuk volt azt meghatározni, hogy a forgalmi számításokban miképpen lehet figyelembe venni a valamilyen ok miatt nem sikerült, de újra jelentkező hívásokat.

A vizsgálatok eredményeiről beszámoló számos közleményben [1...19] a szerzők sokféle javaslatot adnak a feladat megoldására. Olyan módszer azonban még nem született, amely a távbeszélőtechnika területén átlagos műszaki színvonalat képviselő ország mérnökét a tervezési munkában megfelelően támogatná. A postaigazgatóságok közül ugyanis csak igen kevés rendelkezik olyan mérőeszközökkel, amelyekkel az eddig kidolgozott számítási módszerekhez szükséges forgalmi paramétereket meghatározhatnák.

Ilyen gyakorlati szempontok figyelembevételével kezdtük meg a PKI-ben a kérdés vizsgálatát. Az első eredményekről — néhány egyszerű forgalomtechnikai modelltől — a [20] irodalomban számoltunk be. Jelen cikkben ezek továbbfejlesztésével nyert olyan matematikai modellt mutatunk be, amely eleget tesz a vizsgálatok kezdetekor megszabott követelményeknek: kiindulási adatai egyszerűen mérhetők és főbb paraméterei számítástechnikailag könnyen kezelhetők. Először a hívásismétlések folyamatának néhány, a modell kialakítása szempontjából lényeges jellemzőjét tárgyaljuk. Ezt követi a modell bemutatása paramétereivel és azok összefüggéseivel. A paraméterek kiszámítására módszert adunk, majd a módszer felhasználásával nyert eredmények alapján jellemezzük a modellt. Végül vázoljuk az eljárás továbbfejlesztési lehetőségeit.

### I. A forgalomkeletkezési folyamat jellemzői

A valóságos forgalmi folyamat hívó és hívott előfizetők sokasága, valamint a távbeszélő-rendszer egymáshatásának eredményeként jön létre. A hívásismétlések szempontjából lényeges mozzanatokot úgy vizsgálhatjuk a legegyszerűbben, ha kiragadunk egy hívó—hívott előfizetőpárt ( $A, B$ ), és csak egyetlen híváskeletkezési folyamatot szemlélünk.

Tegyük fel, hogy  $A$  előfizető elhatározza, hogy felhívja  $B$ -t. A végső kimenetel kétféle lehet (1. ábra):

- létrejön a beszélgetés, vagy
- nem jön létre a beszélgetés, és a hívó nem kísérelte tovább.

Bármelyik eredmény sok híváskísérletet és különböző időket foglalhat magában. Ahogy azt az 1. ábra is mutatja, a hívás sikertelenné válhat a hívó, a hívott és a kiszolgáló rendszer miatt. A sikertelenség mértéke sok körülménytől függ (bővebben lásd a [21] és [22] összefoglaló jellegű cikkeket).

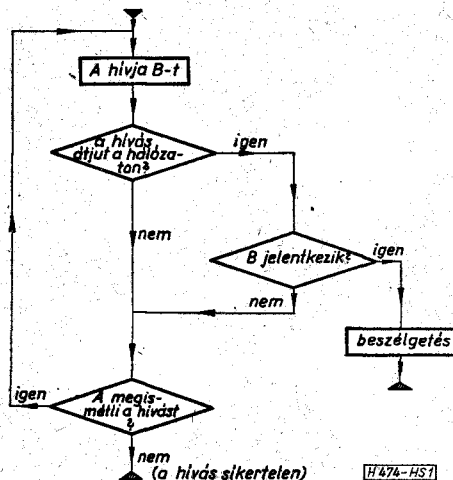
A sikertelen hívás megismétlésében viszont alapvetően csak két jellemző játszik fontos szerepet, ezek a következők:

I. Döntés arról, hogy a kísérletet megismétli-e az  $A$  előfizető. Ezt a döntést sok tényező befolyásolja, melyek közül a legfontosabbak:

- mennyire kíván  $A$  beszélni  $B$ -vel (információ fontossága),
- $A$  hányszor kísérletezett már,
- $A$  elképzelése az eddigi sikertelenség okáról (a hívó feltétlen másként dönt, ha tudatában van annak, hogy rosszul tárcsázott, ha foglaltsági hangot kap, vagy ha csengetési visszhangot kap),
- $A$  tapasztalata a távbeszélő-rendszerről és  $B$  távbeszélő-szokásairól.

Valamennyi jellemzőt együttesen egy  $H$  függvény-nyel vehetjük figyelembe. Ezt a függvényt hívjuk kitartási függvénynek, és az újrahívás valószínűségét adja meg.

II. A hívás megismétlése a visszautasítás után mennyi idő múlva jön létre. Három lényeges esetet különböztethetünk meg: rögtön ( $T_{sz1} \approx \Delta t$ ), rövid idő múlva ( $\Delta t < T_{sz2} < 1$  ó, és mindkét esetben a  $\Delta t < 1$  perc), csak sokkal később ( $T_{sz3} > 1$  ó). Az ismétlések a forgalmi jellemzők számítására az első két esetben gyakorolnak jelentős hatást. Az első a beérkezési folyamat jellegét — a Poisson-jelleget — is nagy valószínűséggel módosíthatja.



1. ábra. Hívásfolyamat két előfizető ( $A$  és  $B$ ) között

A második eset azt jelenti, hogy a megismételt kísérlet a vizsgált (1 órás) időintervallumban érkezik. A visszautasítás és a hívás megismétlése közötti időt  $T_{sz}$ -szel jelöljük és egy függvénnyel vehetjük figyelembe. E függvény értékei a fent felsorolt, a kitartási függvényt is befolyásoló tényezőkön kívül a napszaktól is függenek.

A hívásismétlési folyamatok leírásából kiderül, hogy tárgyalásuknál a lehető legpontosabban figyelembe kell venni:

- az előfizető viselkedésének hatását a kitartási függvényre és az ismétlési időköz eloszlására,
- a távközlő-rendszer viselkedését a hívásintenzitás és az átlagos foglaltsági tartam megnövekedése esetén.

Valamennyi hatás figyelembevétele egy matematikai modellben természetesen nem lehetséges. Módszerünk kialakításánál – a korábban említett gyakorlati szempontokon túlmenően – igyekeztünk csak olyan egyszerűsítéseket alkalmazni, amelyek jogosságát az eddigi mérési adatok részben vagy teljesen igazolták (pl. Poisson-bemenet feltételezése, lásd később a 2.2 pontban).

## 2. A modell kialakítása

A modell bemutatását célszerű három lépésben elvégezni: először bizonyos egyszerűsítő feltételekkel egy hívásfolyamát jellemzőinek matematikai megfogalmazását adjuk meg, majd – további feltételeket felállítva – a teljes forgalmi folyamat jellemzőinek analitikus összefüggéseit vezetjük le egy fokozatra, s végül a valóságot legjobban megközelítő két veszteséges fokozatra állítunk fel matematikai modellt.

### 2.1. A híváskísérletek arányainak meghatározása

Vizsgáljuk a hívásfolyamatot a következő feltevés esetén (lásd még [3]):

#### I. Feltevések a hívások elveszésére:

– a sikertelenség valamennyi okát egy közös  $P$  sikertelenségi valószínűségben fejezzük ki.  $P$  megmutatja, hogy egy hívás bármely okból milyen valószínűséggel vész el,

- $P$  független az időtől,
- $P$  független attól, hogy a hívásigény hányadik kísérletéről van szó.

#### II. Feltevések a kitartásfüggvényre:

– nem függ az időtől (napszaktól, évektől stb.),  
 – nem függ az előző híváskísérlet sikertelenségének valódi vagy feltételezett okától,  
 – függ attól, hogy az azonos igényhez tartozó hányadik kísérletről van szó. Jelölje az egy igényhez tartozó kísérletek számát  $i$  ( $i > 0$ ), akkor  $H(i)$  megadja, hogy az előfizető mekkora valószínűséggel végez el egy újabb kísérletet, ha a megelőző  $i$  kísérlet sikertelen volt.

Az  $i=0$  esetre  $H(0)=1$  értéket definiálunk és fennáll, hogy  $H(1) \neq H(2) \neq \dots \neq H(n)$ , amely értékek mérések alapján határozhatók meg [21].

Ilyen feltevések mellett a hívások valószínűségértékeit és jelöléseiket az alábbiak szerint foglaljuk össze (l. bővebben [3]).

Annak valószínűsége, hogy

- az első kísérlet sikertelen lesz:  $P$ ,
- az első kísérlet sikeres lesz:  $S_1=1-P$ ,
- az első, sikertelen hívás után a hívó újra kísérletezik:  $P \cdot H(1)$ ,
- az első, sikertelen hívás után a második kísérlet sikeres lesz:  $S_2=P \cdot H(1) \cdot (1-P)$ ,
- éppen a  $j$ -edik kísérletnél valósul meg a beszélgetés:

$$S_j = P^{j-1}(1-P) \prod_{i=1}^{j-1} H(i). \quad (1)$$

Vezessük be a következő jelölését:

$$H_j = \prod_{i=1}^j H(i), \quad (2)$$

és  $H_0=1$  definíciószerűen.

Az új jelöléssel az (1) összefüggés:

$$S_j = P^{j-1}H_{j-1}(1-P) = P^{j-1}H_{j-1} - P^jH_{j-1}.$$

A hívások további két valószínűségi jellemzője:

– annak valószínűsége, hogy az egy igényhez tartozó híváskísérlet sorozat éppen a  $j$ -edik kísérleténél ér véget sikertelenül:

$$Q_j = P^j \cdot H_{j-1} [1 - H(j)] = P^j(H_{j-1} - H_j), \quad (3)$$

– annak valószínűsége, hogy egy hívássorozat éppen a  $j$ -edik kísérletnél ér véget (sikeresen vagy sikertelenül):

$$R_j = S_j + Q_j = P^{j-1}H_{j-1} - P^j \cdot H_j \quad (4)$$

(természetesen mindenhol  $j \geq 1$ ).

Ezek alapján meghatározható valamely hívássorozat végső kimenetelének valószínűségi értéke. Egy hívássorozat sikeres befejeződésének valószínűsége:

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} S_j = (1-P) \sum_{j=1}^{\infty} P^{j-1} \cdot H_{j-1}. \quad (5)$$

Annak valószínűsége, hogy egy hívássorozat sikertelenül fejeződik be:

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j = \sum_{j=1}^{\infty} P^j(H_{j-1} - H_j). \quad (6)$$

Természetesen  $R = \sum_{j=1}^{\infty} R_j = 1$ , ugyanis a sorozat mindenképpen befejeződik valahogy.

Az átlagos kísérletszámok a valószínűségi változók várható értékei.

Az egy igényhez tartozó átlagos kísérletszám:

$$\beta = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot R_j = \sum_{j=0}^{\infty} P^j \cdot H_j, \quad (7)$$

ahol felhasználtuk a (4) összefüggést.

A létrejött beszélgetés előtti kísérletek átlagos száma (feltételes átlag):

$$\beta(S) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{S_j}{S}. \quad (8)$$

A kísérletezés feladása előtti hívások átlagos száma (feltételes átlag):

$$\beta(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{Q_j}{Q}. \quad (9)$$

Az időegység alatt keletkező hívásszámokra (a hívásintenzitásokra) a fő viszonyszámok felhasználásával kaphatunk összefüggéseket. Ehhez tegyük fel, hogy az első híváskísérletek (a továbbiakban elsődleges hívások) a hívásismétlésekkel együtt a következőképpen értelmezett stacionárius folyamatot alkotnak: a vizsgált időtartam (1 óra) előtt jelentkező hívásigényekhez tartozó hívásismétlések közül annyi jut a vizsgált időtartamra, mint amennyi az abban jelentkező igények megismételt kísérletei közül egy következő időszakra esik.

E feltevés figyelembevételével az egységnyi időszakban fellépő és kimenetelük szempontjából különböző hívások között egyszerű összefüggések találhatóak. Legyen az egységnyi időben fellépő igények, az elsődleges hívások száma  $c_0$ , akkor — felhasználva az (5), (6) és (7) összefüggéseket — ebben az időszakban az összes híváskísérletek átlagos száma:

$$c = c_0 \cdot \beta, \quad (10)$$

a sikeres hívások számának átlaga:

$$c_s = c_0 \cdot S = c_0 \cdot \beta(t - P) = c(1 - P), \quad (11)$$

az elvesző, nem megvalósuló igények átlagos száma:

$$c_q = c_0 \cdot Q = c_0 \cdot [1 - \beta(1 - P)], \quad (12)$$

a visszautasított, nem sikerült híváskísérletek száma:

$$c_n = c \cdot P. \quad (13)$$

## 2.2 A forgalmi jellemzők meghatározása

A forgalmi jellemzők számításához néhány további feltevés szükséges. Ezek:

— nem változik a bemeneti folyamat (mérési adatok ezt Poisson-folyamatnál igazolják is, lásd [16] irodalmat),

— a társidők eloszlása sem változik meg,  
— nem változik meg az átlagos beszélgetési idő,  $t_b$ .

Tekintsünk ezek után egy teljes elérhetőségű,  $N$  tagú kapcsolófokozatot, amelyre  $m \cong \infty$  forrásból Poisson-jellegű forgalom érkezik. Tegyük fel, hogy az elvesző hívások nem terhelik a fokozatot.

Az elsődleges forgalmi kínálat:

$$A_0 = c_0 \cdot t_s, \quad (14)$$

ahol:  $t_s = t_b + t_k$ , a sikeres hívások átlagos tartásideje,

$t_b$  = az átlagos beszélgetési idő,

$t_k$  = az átlagos kapcsolási idő és a beszélgetés előtti csengetési idő összege (valamennyi idő órában értendő).

A „visszacsatolás” miatt látszólag

$$A = c \cdot t_s, \quad (15)$$

forgalmi kínálat jelentkezik a bemeneten.

A (7), (10) és (14) összefüggések felhasználásával

$$A = c_0 \cdot \beta \cdot t_s = A_0 \sum_{j=0}^{\infty} P^j \cdot H_j. \quad (16)$$

Korábban tett feltevéseinkkel  $P = B_N(A)$ , ahol  $B_N(A)$  az Erlang-B veszteségi képlet  $N$  vonalszámra és  $A$  forgalmi kínálatra. A látszólagos kínálat tehát implicit alakban kifejezhető:

$$A = A_0 \sum_{j=0}^{\infty} B_N(A)^j \cdot H_j \quad (17)$$

A hívásszámoknál leírtakhoz hasonlóan a nem ismétléses forgalomtechnikai modellekhez képest itt is szükséges új fogalmak, elnevezések bevezetése.

Ezeket célszerűen a hívásszámok és a tartásidők segítségével definiáltuk, és a (10)–(17) kifejezések felhasználásával megadtuk a közöttük levő összefüggéseket is az alábbiak szerint.

A lebonyolított forgalom:

$$Y_s = c_s \cdot t_s = A[1 - B_N(A)], \quad (18)$$

a beszédforgalom:

$$Y_b = c_s \cdot t_b = \frac{t_b}{t_s} Y_s \quad (19)$$

a meddő forgalom:

$$Y_m = c_s \cdot t_k = Y_s - Y_b, \quad (20)$$

a látszólag elvesző forgalom:

$$A_n = c_n \cdot t_s = A \cdot B_N(A), \quad (21)$$

a kielégítetlen igények forgalma:

$$A_q = c_q \cdot t_s = A_0 \{1 - \beta[1 - B_N(A)]\}. \quad (22)$$

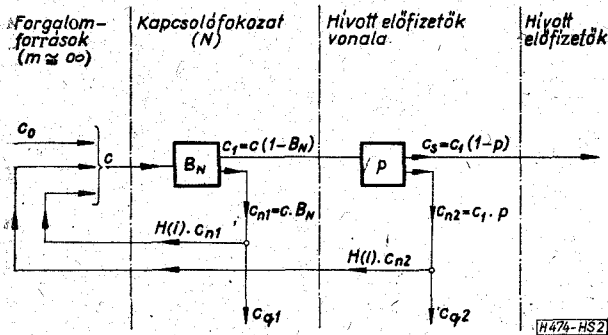
Az így kidolgozott modell hibája, hogy nem veszi figyelembe a további fokozatok veszteségét. Márpedig minden esetben létezik további veszteség, amely azután a visszahatás következtében a vizsgált fokozat forgalmi tulajdonságait befolyásolja. Ezt a hibát küszöböljük ki egy kétfokozatú modell alkotásával.

## 2.3 Az eljárás kiterjesztése két veszteséges fokozatra

A gyakorlatban előforduló esetek egy részében olyan elrendezéssel állunk szemben, amelyben a két veszteségforrás a kapcsolófokozat vagy vonalcsoport és a hívott előfizető. Ez utóbbi a mérési adatok szerint mindig az egyik legnagyobb veszteségforrást képviseli [21]. Az esetek egy másik csoportjában az elrendezés úgy egyszerűsíthető, hogy a számítás visszavezethető erre az elrendezésre. Mindezek azt indokolják, hogy modellünket kétfokozatú rendszerre alkossuk meg.

Vizsgáljunk egy ilyen elrendezést. Az előzőekkel megegyezésben az első veszteségforrás egy  $N$  tagú, teljes elérhetőségű kapcsolófokozat, amelyre  $m \cong \infty$  forrásból Poisson-jellegű forgalom érkezik  $c_0$  elsődleges és  $c$  összesített hívásintenzitás-paraméterrel (2. ábra). Az összes hívás egy  $B_N$  része már itt sikertelen lesz ( $c_{n1}$ ).

A kapcsolófokozaton túljutó hívások további  $p =$  konstans valószínűséggel elvesznek a hívott előfizető miatt ( $c_{n2}$ ).  $p$  értékére a mérési eredmények azt mutatják, hogy az a vizsgált hálózat jellemzője, hosszú időre nézve változatián értékű.



2. ábra. Hívásfolyamat egy kapcsolófokozatból és a hívott előfizetőből álló rendszerben

A kapcsolófokozatnál a hívások átlagos tartásideje háromféle lehet:

- a kapcsolófokozatnál elvesző hívások tartásideje nulla (nem terhelik a fokozatot),
- a hívott előfizető miatt elvesző hívások átlagos tartásideje:

$$t_{nf} = t_{k1} + t_{k2},$$

- ahol:  $t_{k1}$  = a fokozat kapcsolási idejének átlaga,  
 $t_{k2}$  = a hívott előfizetői vonal kapcsolása és a hívó bontása között eltelt időátlag (csengetés, illetve foglaltsági hang),

- a sikeres hívások átlagos tartásideje:

$$t_s = t_{k1} + t_{cs} + t_b,$$

- ahol  $t_{cs}$  = a csengetési átlagidő a sikeres hívásoknál.  
 A kapcsolófokozat  $Y_1$  terhelése két részből tevődik össze:

$$Y_1 = Y_{nf} + Y_s, \tag{23}$$

- ahol  $Y_{nf} = c_{n2} \cdot t_{nf}$  a hívott miatt nem sikerült,  
 $Y_s = c_s \cdot t_s$  a sikeres hívások terhelése.

A kapcsolófokozaton túljutó összes hívás ( $c_1$ ) átlagos  $t_m$  tartásidejére igaz, hogy  $t_m < t_s$ .  
 Ezen  $t_m$  felhasználásával:

$$Y_1 = c_1 \cdot t_m. \tag{24}$$

A korábbiakban is alkalmazott Erlang-féle veszteségi formula tulajdonsága, hogy a kínálatot mindig ugyanolyan átlagos tartásidővel tételezi fel, mint az átvitt forgalmat. A veszteséget már nem a (15) egyenlet szerinti látszólagos kínálat határozza meg, hanem egy olyan jellemző, amely a  $t_m$ -től függ. Erre vezessük be a fiktív kínálat fogalmát. Definíciószerűen:

$$A^* = c \cdot t_m = \frac{Y_1}{1 - B_N(A^*)}, \tag{25}$$

ahol tehát  $B_N(A^*)$  az Erlang-veszteségi képlet  $N$  vonalszámra és  $A^*$  kínálatra.

Bevezetve a  $\Theta = \frac{t_{nf}}{t_s}$  időhányadost, a kétféle kínálat közötti összefüggés:

$$A^* = A[1 - p(1 - \Theta)]. \tag{26}$$

A rendszer teljes vesztesége:

$$P = 1 - [1 - B_N(A^*)] (1 - p). \tag{27}$$

Az egy elsődleges hívásra eső kísérletek átlagos száma a (7) és (27) összefüggések felhasználásával:

$$\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \{1 - [1 - B_N(A^*)](1 - p)\}^j \prod_{i=0}^j H(i). \tag{28}$$

Most is fennáll, hogy

$$A = A_0 \cdot \beta, \tag{29}$$

továbbá a (26) felhasználásával:

$$A^* = A_0 [1 - p(1 - \Theta)] \beta. \tag{30}$$

Ezek után valamennyi forgalmi jellemző  $A^*$ -gal, illetve  $A$ -val kifejezhető, hasonlóan a (18)–(22) összefüggésekhez.

A sikeres hívások terhelése a kapcsolófokozaton:

$$Y_s = A(1 - P), \tag{31}$$

a beszédforgalom:

$$Y_b = Y_s \frac{t_b}{t_s}, \tag{32}$$

a meddő forgalom:

$$Y_m = Y_1 - Y_b, \tag{33}$$

ahol  $Y_1$ -et a (25) kifejezés adja meg, és így tovább.

### 3. A jellemzők meghatározása és az eredmények bemutatása

Látható, hogy a független paraméterek ( $\Theta$ ,  $p$ ,  $A_0$ ,  $N$  és  $H(i)$ ) a fiktív kínálaton,  $A^*$ -on keresztül fejtik ki hatásukat a többi forgalmi jellemzőre. Elsődleges feladat tehát minden esetben az adott független paraméterhez tartozó  $A^*$  meghatározása. Ennek ismeretében számítható azután a többi forgalmi jellemző.

#### 3.1 A fiktív kínálat ( $A^*$ ) meghatározása

A  $\beta$ -ra kapott (28) kifejezést a (30) egyenletben felhasználva, a következő –  $A^*$ -ra nézve implicit – egyenlet adódik:

$$A^* = A_0 [1 - p(1 - \Theta)].$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{\infty} \{1 - [1 - B_N(A^*)](1 - p)\}^j \prod_{i=0}^j H(i), \tag{34}$$

ahol  $A_0 > 0$ ,  $N$  természetes szám,

$$0 \leq p < 1, 0 \leq \Theta \leq 1,$$

$$H(0) = 1, 0 \leq H(i) \leq \delta < 1 (i = 1, 2, \dots),$$

és

$$B_N(A^*) = \frac{A^{*N}}{N!} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{A^{*k}}{k!}.$$

Ennek megoldását keressük az  $A^* \geq 0$  halmazon, rögzített  $A_0$ ,  $N$ ,  $p$ ,  $\Theta$  és  $\{H(i)\}_{i=0}^{\infty}$  esetén.

Megjegyezzük, hogy  $p=0$  esetén (34) éppen a (17) egyenlettel azonos, így az itt ismertetett módszer az

utóbbi megoldásra is alkalmazható. Továbbá látható, hogy ha  $p=1$ , akkor  $A^* = A_0 \cdot \theta$ .

Vezessük be a  $q(A^*) = 1 - [1 - B_N(A^*)] (1-p)$  jelölést. Belátható, hogy  $B_N(A^*)$  monoton növekvő, a  $(0, \infty)$  intervallumot a  $(0, 1)$  intervallumra leképező függvény. Ebből következik, hogy  $q(A^*)$  is monoton növekvő és  $p \leq q(A^*) < 1$  minden  $A^* \geq 0$  esetén. Így a (34) egyenlet jobb oldalán szereplő végtelen sor egyenletesen konvergens, hiszen

$$1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} q^j(A^*) \cdot \prod_{i=0}^j H(i) < < 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j H(i) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j = \frac{1}{1-\delta} \quad (35)$$

A (34) egyenlet jobb oldalát jelöljük  $\varphi(A^*)$ -gal. A  $\varphi(A^*)$  függvény — mivel folytonos függvények egyenletesen konvergens sora — folytonos. Továbbá, a fentiek alapján nyilvánvaló, hogy  $\varphi(A^*)$  monoton növekvő. Legyen  $B = A_0[1 - p(1-\theta)]$ . Ekkor a (35) egyenlőtlenség alapján

$$\varphi(B) = B \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q^j(B) \prod_{i=0}^j H(i) \geq B \quad (36)$$

Hasonlóan  $C = \frac{B}{1-\delta}$  esetén

$$\varphi(C) < C \quad (37)$$

A (35) egyenlőtlenségből kiolvasható az is, hogy

$$B \leq \varphi(A^*) < C \text{ (minden } A^* \geq 0 \text{-ra)} \quad (38)$$

A (36) és (37) egyenlőtlenségekből folytonosságuk miatt következik, hogy a (34) egyenletnek van megoldása a  $(B, C)$  intervallumban, továbbá (38)-ból adódik, hogy azonkívül nincs.

Most definiáljuk a következő számsorozatot:

$$X_0 = B, \quad (39) \\ X_n = \varphi(X_{n-1}),$$

amely a (38) egyenlőtlenség miatt korlátos. Másrészt a (36) egyenlőtlenség alapján

$$X_0 = B \leq \varphi(B) = \varphi(X_0) = X_1,$$

amiből teljes indukcióval,  $\varphi$  monotonitása miatt adódik, hogy

$$X_n = \varphi(X_{n-1}) \leq \varphi(X_n) = X_{n+1}.$$

A (39) definícióval megadott  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  számsorozat tehát korlátos és monoton növekvő, így szükségképpen konvergens.

A  $\varphi$  függvény folytonossága biztosítja, hogy az  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  sorozat határértéke a (34) egyenlet megoldása, hiszen:

$$\xi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(X_{n-1}) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} X_{n-1}) = \varphi(\xi_0).$$

A (34) egyenletet megvizsgálva megmutattuk, hogy a  $B = A_0[1 - p(1-\theta)]$  pontból induló iteráció alkalmas módszer ennek megoldására. A számítás tehát számítógéppel könnyen elvégezhető. Ez még egyszerűsíthető annak alapján, hogy a

$$\frac{\varphi(A^*)}{B}$$

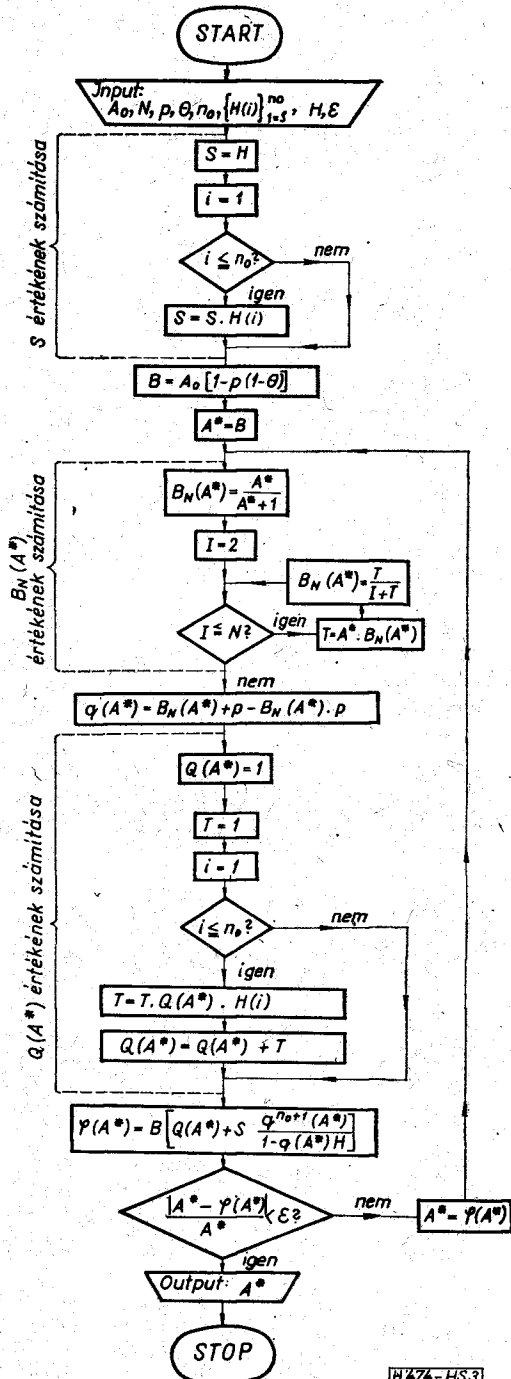
végtelen sor a gyakorlatban szóba jövő esetekben zárt alakra hozható.

Az eddigi mérési eredmények alapján (lásd [16]) nyert  $H(i)$  függvények mindig a következő tulajdonságúak:

$$H(i) \neq H(j), \text{ ha } i \neq j \text{ és } i, j \leq n_0$$

és  $H(n_0 + k) = H$  (konstans) minden  $k$  természetes számra.

Ez más szóval azt jelenti, hogy a  $\{H(i)\}$  sorozatnak csak az első  $n_0$  eleme különböző, az  $(n_0 + 1)$ -edikről kezdve valamennyi egyenlő.



3. ábra. A fiktív kínálat ( $A^*$ ) számításának folyamatábrája

Számítógép által készített táblázat  $A^*$ -ról ( $p=0,3$   $\Theta=0,2$  és  $H(i)=\text{Kerebel}$  szerint)

$A^*$ -táblázat

$N/A_0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1.06	2.03	4.74	7.23	9.94	12.80	15.75	18.76	21.82	24.90
3	0.97	2.16	3.74	5.74	8.06	10.60	13.31	16.12	19.01	21.96
4	0.94	1.97	3.23	4.82	6.74	8.95	11.37	13.96	16.65	19.44
5	0.94	1.90	2.98	4.29	5.87	7.75	9.87	12.20	14.69	17.29
6	0.93	1.88	2.88	4.00	5.38	6.91	8.75	10.81	13.07	15.48
7	0.93	1.87	2.83	3.86	5.01	6.36	7.93	9.74	11.76	13.96
8	0.93	1.87	2.81	3.79	4.84	6.02	7.38	8.95	10.73	12.71
9	0.93	1.87	2.80	3.76	4.75	5.83	7.03	8.40	9.96	11.72
10	0.93	1.87	2.80	3.74	4.71	5.72	6.81	8.03	9.41	10.96
11	0.93	1.87	2.80	3.74	4.68	5.66	6.68	7.79	9.03	10.41
12	0.93	1.87	2.80	3.74	4.68	5.63	6.61	7.56	8.78	10.02
13	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.61	6.57	7.57	8.62	9.76
14	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.61	6.55	7.52	8.53	9.59
15	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.61	6.55	7.50	8.47	9.48
16	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.60	6.54	7.48	8.44	9.42
17	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.60	6.54	7.48	8.42	9.33
18	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.60	6.54	7.47	8.41	9.36
19	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.60	6.54	7.47	8.41	9.35
20	0.93	1.87	2.80	3.74	4.67	5.60	6.54	7.47	8.41	9.35

Ekkor  $\varphi(A^*)/B$  zárt alakra hozható, amint azt a következő levezetés mutatja:

$$\frac{\varphi(A^*)}{B} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j(A^*) \prod_{i=0}^j H(i) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n_0} q^j(A^*) \prod_{i=0}^j H(i)}_{Q(A^*)} + \frac{1}{H^{n_0+1}}$$

$$S = \underbrace{H \prod_{i=1}^{n_0} H(i)}_S \sum_{j=n_0+1}^{\infty} [q(A^*)H]^j = Q(A^*) + S \frac{q^{n_0+1}(A^*)}{1 - q(A^*)H}$$

Tehát

$$\varphi(A^*) = B \left[ Q(A^*) + S \frac{q^{n_0+1}(A^*)}{1 - q(A^*)H} \right],$$

ahol  $Q(A^*) = \sum_{j=0}^{n_0} q^j(A^*) \prod_{i=0}^j H(i),$

és  $S = H \prod_{i=1}^{n_0} H(i).$

A (34) egyenletet kielégítő  $A^*$  kiszámításának algoritmusát ezek után a 3. ábrán látható folyamat-ábra írja le.

A folyamatábrán a jobb áttekinthetőség érdekében megtartottuk a fentebb bevezetett jelöléseket, amelyek itt értelemszerűen változó azonosítók. Így például  $\varphi(A^*)$  a folyamatábrában annak a változónak a neve, amely a  $\varphi$  függvény aktuális értékét hordozza. Az előző pontban nem szereplő  $I$  és  $T$  segédváltozók,  $\varepsilon$  pedig az alkalmazott számítógép pontosságának figyelembevételével választandó pozitív szám, amely az algoritmust beállítja, ha az aktuális  $A^*$  és  $\varphi(A^*)$  eltérésének abszolút értéke  $\varepsilon$ .  $A^*$ -nál kisebbé válik.

PDP 8/E típusú számítógépre olyan FOCAL nyelvű programot készítettünk, amely különböző

$A_0, N, p, \Theta, n_0, \{H(i)\}_{i=1}^{n_0}$  és  $H$  értékek esetén, az itt ismertetett eljárással kiszámítja  $A^*$  értékeit. Ezeket és a többi forgalmi jellemzőket táblázatos formában szolgáltatja (1. az 1. táblázatot).

3.2 A modell tulajdonságainak bemutatása a számítási eredmények alapján

Az ismertetett módszerrel végeztünk számításokat az  $A^*, A, \beta, B_N(A^*), Y_1$  és  $Y_s$  jellemzőkre, kétféle

2. táblázat

A számításokhoz felhasznált, mérési adatok alapján kapott kitartásfüggvények

Az egy igényhez tartozó kísérletek sorszáma (i)	A kitartásfüggvény értéke	
	Kerebel szerint $(H(i)_k)$	Myskja-Walman szerint $(H(i)_{M-w})$
1	0,60	0,45
2	0,70	0,63
3	0,75	0,68
4	0,80	0,72
5	0,82	0,75
6	0,83	0,77
7	0,84	0,80
8	0,85	0,89
9	0,86	0,80
10	0,87	.
11	0,88	.
12	0,89	.
13	0,90	.
.	.	.
.	.	.
20	0,90	.

Megjegyzés: a  $H(i)_{M-w}$  értéke nagy kísérletszámok esetén a kis mintavétel miatti mérési bizonytalanság következtében ingadozik.

mérési adatokból nyert kitartási függvényrel (melyeket a 2. táblázat ad meg),  $\Theta$  és  $p$  0,1, 0,2 és 0,3 értékeinél  $N=2 \div 20$  és  $A_0=1 \div 10$  esetében.

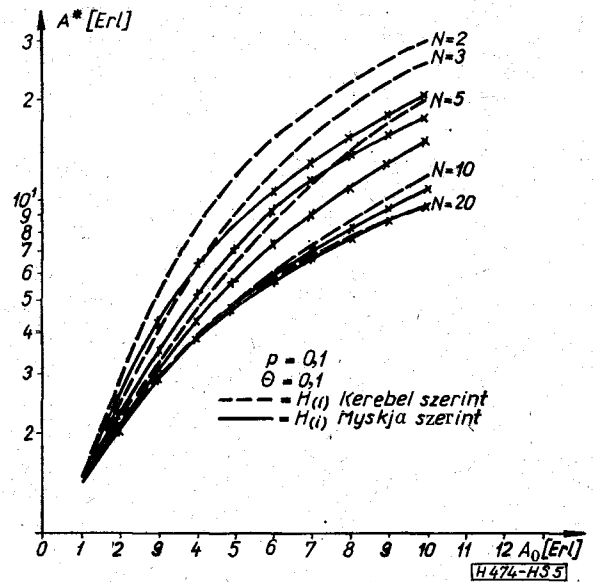
Az eredményekből a következő lényeges tulajdonságok olvashatók ki:

— a vizsgált tartományban  $A_0$  növekedésével,  $N$ =konstans esetén valamennyi jellemző monoton nő (1. 4. ábra) úgy, hogy az  $A_0$ -val szembeni érzékenység egyre csökken (megjegyezzük, hogy elképzelhető olyan  $\Theta$ - $p$  számpár, amelynél  $Y_s$  görbéje egy ideig növekvő, majd csökkenő jellegű (ld. [21]);

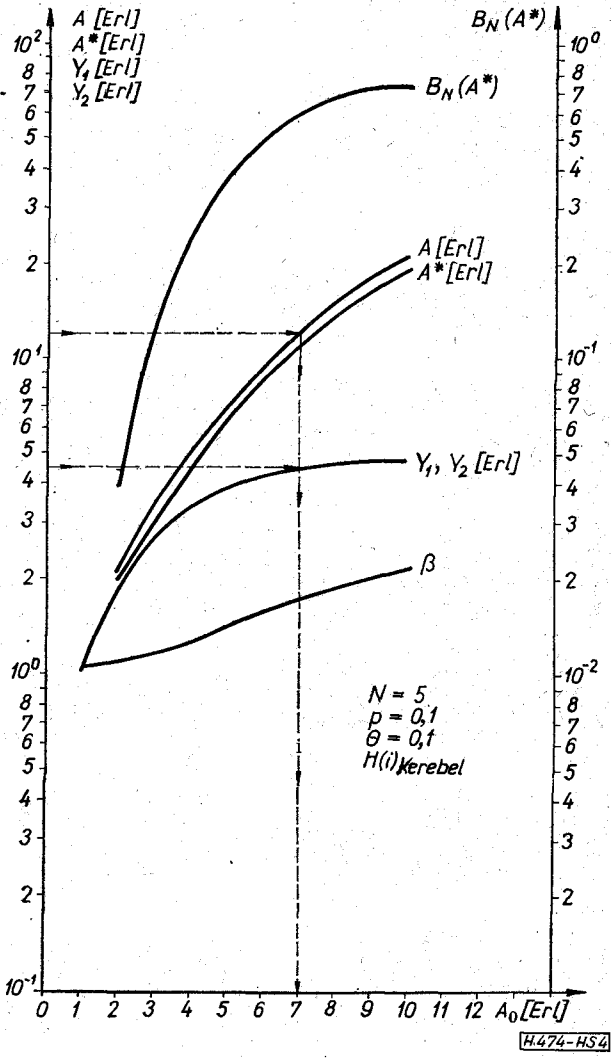
— kis veszteségeknél (kb. 5% alatt)  $A^* < A_0$ , amiből következik, hogy  $B_N(A^*) < B_N(A_0)$ , tehát a hívott előfizető okozta veszteségek miatt csökken a kapcsolófokozat vesztesége (ld. az 5. és 6. ábrákat, valamint az 1. táblázatot);

— a hívott által okozott veszteség ( $p$ ) erősebben hat a jellemzők értékeire, mint az így elvesztett hívások átlagos tartásideje (melynek  $\Theta$  a mértéke).  $p$  hatása a 7. ábrán jól megfigyelhető;

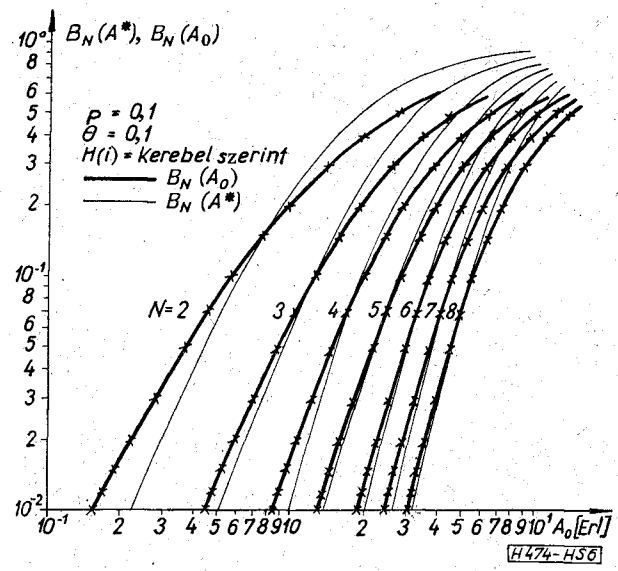
— valamennyi jellemző — kivéve  $A$ -t —  $A_0$ -val szembeni érzékenysége csökken akár  $p$ , akár  $\Theta$  értékei növekednek;



5. ábra. A fiktív kínálat ( $A^*$ ) függése a tényleges kínálattól ( $A_0$ ) kétfajta kitartási függvényénél



4. ábra. A vizsgált forgalmi jellemzők változása  $A_0$  függvényében



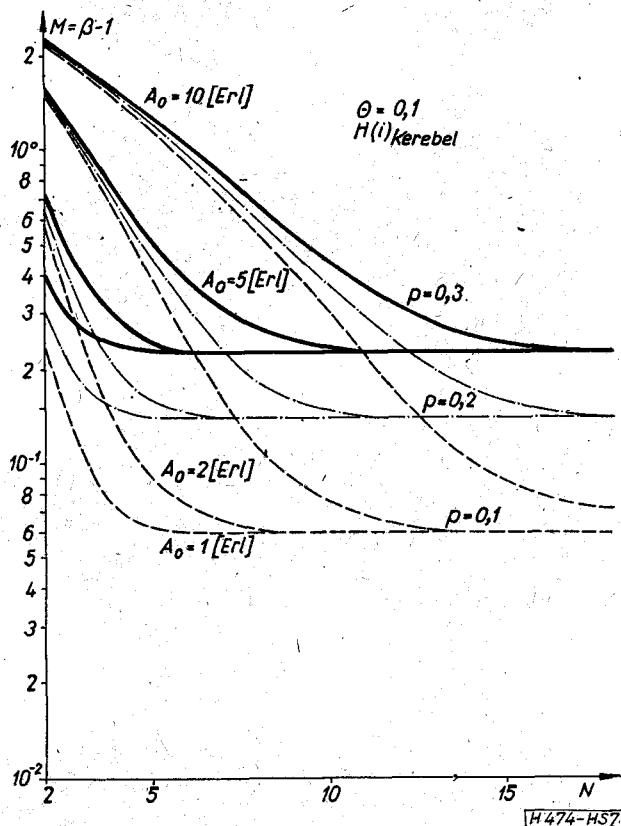
6. ábra. A kapcsolófokozat veszteségének ( $B_N(A^*)$ ) változása  $A_0$  függvényében, összehasonlítva a nem ismétléses modell alapján számított veszteségértékekkel ( $B_N(A_0)$ )

— a kitartás csökkenése esetén — ha a független paraméterek változatlanok — csökken minden jellemző értéke, közülük  $A^*$ ,  $A$  és  $\beta$  jelentős mértékben (5. ábra);

— a kapcsolófokozat veszteségét ( $B_N(A^*)$ ) rögzített  $N$ -nél  $A_0$ -n kívül lényegesen semmi sem befolyásolja,  $A_0$  hatása viszont sokkal nagyobb, mint az ismétlés nélküli modellben (6. ábra).

4. A modell felhasználása és továbbfejlesztési lehetőségei

Célkitűzésünk egy olyan forgalomtechnikai modell alkotása volt, amely a valóságot a gyakorlat számára megfelelő pontossággal közelíti, mérhető jellemzőket



7. ábra. Az egy igényhez átlagosan tartozó többlet kísérletszám ( $M$ ) függése a tényleges kínálattól ( $A_0$ ) és a hívott előfizető okozta veszteségektől ( $p$ )

használ alapfogalmaknak, és a méretezéshez könnyen kezelhető módszert ad. A 2.3 pontban bemutatott modell jellemzőinek egy része mérhető, s a számítási módszer felhasználásával nyert táblázatokból és görbeseregekből a többi paraméter is meghatározható. A méretezés módja a modell alkalmazásával igen egyszerű: a  $P$ , és  $H(i)$  értékeit, valamint  $Y_1$ ,  $Y_2$  vagy  $A$  közül valamelyiket a mérési adatokból kiszámítjuk (1.: 2. fejezet), s a megfelelő  $Y_1$ ,  $Y_2$  vagy  $A$  függvényt megadó görbesereg, vagy táblázat alapján,  $N_{regi}$  ismeretében meghatározzuk  $A_0$ -át (ld. pl. a 4. ábra szaggatott vonalait),  $A_0$ -val mint forgalomigénnyel ezután már a hagyományos módon végezhetjük el az áramkórszámítást ( $N_{új}$ ).

Ami a modell pontosságát illeti, arról még korai volna egyértelműen nyilatkozni. A feladat megoldása során ugyanis egyszerűsítéseket hajtottunk végre amelyek azután befolyásolhatják a pontosságot. Ennek szimulációs vizsgálata jelenleg is tart a BHG-ban, egy BHG-PKI közös kutatási terv keretein belül. Az eddigi eredmények biztatóak, de a modell alkalmazási területének behatárolására még további vizsgálatokat folytatunk.

Bár az elmélet — a fentiek szerint — még néhány szempontból igazolást vár, ennek ellenére már látszik a továbbfejlesztés lehetőségei, amelyekkel egyrészt a valósághoz jobban közelíthetjük a modellt, másrészt felhasználási körét terjeszthetjük ki. A valóság jobb megközelítésének irányába hat, ha a hívott miatti veszteségeknél külön kezeljük a hívott nem válaszol és a hívott foglalt eseteket. A mé-

rések szerint a  $p$  veszteségi valószínűség értékében ugyanis ezek más-más súllyal szerepelnek, s ugyanakkor a hívó előfizető reakciója is különböző a két jelenség észlelése esetén, tehát különböző a kitarási függvény is ([21], [22]). A modell felhasználási területét bővíthetjük, ha az itt alkalmazott „visszacsatolási elvet” másfajta bemeneti folyamatra és kapcsolási elrendezésre is adaptáljuk. A továbbfejlesztés lehetőségeit a modell magában rejt, a megbízható szinten való kidolgozáshoz azonban még további mérési eredményekre és számos vizsgálatra van szükség.

### Köszönetnyilvánítás

Ezúton is kifejezzük köszönetünket dr. Lajtha Györgynek, dr. Gosztöny Gézának és Mazgon Sándornak, akik munkánkat kezdettől fogva támogatták és sok hasznos tanáccsal segítettek, valamint Gránásy Sándornak és dr. Körmendi Istvánnak, akik a kézirat gondos átnézésével nyújtottak hathatós segítséget.

### IRODALOM

- [1] Horváth Gy: Sorozatos vonalcsoportok méretezése. Híradástechnika, 2. 1969. 7—8. pp. 261—281.
- [2] Cohen, J.: Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls. Philips Telecommunication Review, 1957. aug.
- [3] Ellđin, A.: Approach to the Theoretical Description of Repeated Call Attempts. Ericsson Technics, 1967. 3.
- [4] Le Gall, P.: Sur l'écoulement dirigé du trafic dans les grands réseaux téléphoniques interurbains. Commutation et Electronique, Janvier 1968. p. 61—68.
- [5] Le Gall, P.: On a theory repetition of telephone calls. Annales des Télécommunications, Paris Vol. 24. No. 7—8. July—August, 1969.
- [6] Le Gall, P.: Sur le modèle du trafic téléphonique avec répétitions d'appels. Commutation et Electronique, No. 28. Janvier 1970. pp. 66—88.
- [7] Le Gall, P.: Sur l'influence des répétitions d'appels dans l'écoulement du trafic téléphonique. VI. ITC, pp. 432/1 és Annales des Telecommunication, No. 25. 9—10. 1970.
- [8] Le Gall, P.: Sur le qualité d'écoulement de trafic des réseaux téléphoniques. Commutation et Electronique, No. 31. October 1970.
- [9] Le Gall, P.: Sur le taux d'efficacité et la stationnativité du trafic téléphonique. Commutation et Electronique, No. 35. Octobre 1971. pp. 7—36.
- [10] Le Gall, P.: Sur l'utilisation et l'observation du taux d'efficacité du trafic téléphonique. Commutation et Electronique, No. 42. Juillet 1973. pp. 7—19 és ITC 7, pp. 134/1—8.
- [11] Jonin, G. M.—Sedol, J. J.: Telephone systems with repeated calls. VI. ITC, Genf, pp. 435/1—5.
- [12] Ионин, Г. М.—Седол Я. Я.: Таблицы вероятностных характеристик полностью доступного пука при повторных вызовах. Издательство «Наука», Москва, 1970 г.
- [13] Jonin, G. M.—Sedol, J. J.: Fully-availability groups with repeated calls and time of advanced service. VII, ITC, Stockholm, pp. 137/1—4.
- [14] Shneps, M.—Shneppe: The effect of repeated Calls on Communication system. VI. ITC, Genf, pp. 433/1—5.
- [15] Bretschneider, G.: Repeated Calls with Limited Repetition Probability. VI. ITC, pp. 434/1—5.
- [16] Bretschneider, G.: Repeated Calls with Limited Repetition Probability. AEU, Band 25. (1971) H. 9/10.
- [17] Корньшее, Ю. Н.: Расчет полностью доступной коммутационной системы с повторными вызовами. Электросвязь № II. 1969 г.
- [18] Корньшее, Ю. Н.: Повторные вызовы при междугородной связи. Электросвязь, № 1 1974 г.



[19] *Корньшее, Ю. Н.* Комплекты ожидания для перегруженных направлений. Электросвязь, № 7, 1974 г.

[20] *Honi, G.:* Some Macro-Models for Discussing Repeated Call Attempts. Budavox Telecommunication Review, 1975/2, pp. 21—39.

[21] *Ágostházi M.—Dr. Gosztonyi G.:* A megismételt telefon-

hívások jellemző vonásai. Híradástechnika, XXVI. évf. 4. sz. pp. 109—119.

[22] *Henneberg, P.:* Die Wiederholung von Aufrufersuchen als besondere Form der Wechselwirkung zwischen Fernsprechteilnehmer und Fernmeldenetz. Der Fernmelde Ingenieur, 28. 1974. 7. pp. 1—38.

---