DR. FERENCZ CSABA
Űrkutatási Kormánybizottság

Elektromágneses hullámterjedés; a csoportsebesség analízise

ETO 537.871.124

Az elektromágneses hullámterjedési vizsgálatok egyik alapvető kérdése — a mindenkori hullámkép meghatározása mellett — az energia (jel, jelzés, hullámcsomag stb.) haladásának vizsgálata a hullámképben. Ennek közismert gyakorlati fontossága mellett emlékeztetni kell elméleti jelentőségére is, mivel az energiaterjedés leírása közvetlenül kapcsolódik az elektromágneses tér energiaimpulzus tenzora felírásának véglegesen nem lezárt kérdéséhez.

A korábbi vizsgálatokban kialakított „inhomogén alapmódusok módszere" segítségével [1] a szokásostól eltérő módon, közvetlenül a Maxwell-egyenletekből származtathatjuk az energia terjedését jellemző sebességet; szokásos nevén „csoportsebességet" — $\overline{v}_g$. Ehhez mindenekelőtt vizsgáljuk meg az elektromágneses energia leírásának és terjedése jellemzésének szokásos módszerét.

1. A feladat és a kiindulás

Az elektromágneses tér energiáját ugyanúgy a tapasztalatból absztrahált alapvető Maxwell-egyenletből határozzuk meg, mint a hullámképet, például [1]-gyel összhangban:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}\times\overline{H} &= \varepsilon_0\frac{\partial\overline{D}}{\partial t} \\ \overline{\nabla}\times\overline{E} &= -\mu_0\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}, \\ \overline{\nabla}\overline{B} &= 0 \\ \overline{\nabla}\overline{D} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(1)-ből származtatható az energiaegyenlet; azonban azt, hogy műveleteink eredménye energiasűrűség, illetve energia, a tapasztalat alapján döntöttük el. Ismert módon így, ha

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E} + \bar{\bar{\varkappa}}\overline{H} \\ \overline{B} &= \bar{\bar{\nu}}\overline{E} + \bar{\bar{\mu}}\overline{H}, \end{aligned} \tag{2}$$

az általánosság kedvéért, ahol $\overline{E}$ — az elektromos térerősség, $\overline{D}$ — az eltolási vektor, $\overline{B}$ — a mágneses indukció, H — a mágneses térerősség, $\bar{\bar{\varepsilon}}, \bar{\bar{\varkappa}}, \bar{\bar{\nu}}, \bar{\bar{\mu}}$ — a közegjellemzők (permittivitás, stb.), ε_0 és μ_0 — a vákuum permittivitása és permeabilitása, $\overline{r}$ — a helyvektor, t — az idő, akkor [2]:

$$\oint_A (\overline{E}\times\overline{H})\,d\overline{A} = -\int_V \left(\overline{H}\mu_0\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\varepsilon_0\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right) dV. \tag{3}$$

Beérkezett: 1976. X. 2.

Itt A — felület, V — térfogat. Azt, hogy (1) bármely általános eset leírására is alkalmas, szintén igazolták [5].

Legyen a továbbiakban $\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\varkappa}}$, $\bar{\bar{\nu}}$ és $\bar{\bar{\mu}}$ független az elektromágneses hullám jellemzőitől — szigorúan lineáris közeg, s időben állandó. A közeg ne mozogjon. (Összhangban az [1]-ben közölt vizsgálatok érvényességi körével.) Emellett külön kitérünk majd az időben nem lineáris — más szóval diszperzív stb. közegekre. Bár ilyen módon az időben változó és a mozgó közegeket vizsgálataink köréből kizárjuk, belátjuk, hogy e vizsgálatok egyik közvetlen célja az időben változó és a mozgó közegek esetén tapasztalt nehézségek, illetve súlyos diszkrepánciák feloldásához vezető út keresése.

Ezen túlmenően nem vizsgáljuk a monokromatikus megoldás létezésének a feltételeit, hanem (1) szerint feltesszük, hogy a megoldás

$$\overline{F} = \overline{F}_0 e^{j(\omega_0 t-\varphi)} = \sum_{i,l}(a_{il}e^{-j\varphi_{ai}}\overline{F}_{0\,il})e^{j(\omega_0 t-\varphi_i)}, \tag{4}$$

alakban létezik, ahol $\overline{F}_0$ és φ valamilyen módon változó függvények. Itt $\overline{F}$ — a keresett elektromágneses térjellemző ($\overline{E}$, $\overline{D}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$), ω_0 — a jel körfrekvenciája, φ_i — az inhomogén alapmódusok fázisfüggvényei, i — 1, 2, …, n, az egyes inhomogén alapmódusokat jelenti,

$$\sum_{i,l} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=v}^{k},$$

l=v — valós, k — képzetes komponenst jelent, ez utóbbiba beleértve a j imaginárius számot is, $j^2 = -1a$, φ_a stb. — jelentése ezután (4)-ből értelemszerűen adódik. (4) meghatározásával itt nem foglalkozunk, feltesszük, hogy az [1]-ben közölt megoldási mód és feltételei ismertek. A továbbiakban tehát (4) az (1) Maxwell-egyenletek ismert megoldása.

Az energiaeloszlást leíró (3) egyenlet részletesebben is kiírható, s így analizálni lehet, hogy az adott V térfogatba zárt energia megváltozása milyen részfolyamatokból áll, azaz mi a kapcsolata az egyes részeknek az A felületen átáramló energiával:

$$\oint_A (\overline{E}\times\overline{H})\,d\overline{A} =$$

$$= -\int_V \left(\varepsilon_0\overline{E}\bar{\bar{\varepsilon}}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t} + \varepsilon_0\overline{E}\bar{\bar{\varkappa}}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t} + \mu_0\overline{H}\bar{\bar{\nu}}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t} + \mu_0\overline{H}\bar{\bar{\mu}}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}\right) dV. \tag{5}$$

A bal oldalon álló integrandus vektorteret szokás Poynting-vektornak nevezni, azaz

$$\overline{S} = \overline{E}\times\overline{H}. \tag{6}$$

Fizikai jelentése vákuumban bármely esetben könynyen megadható [2], anyag jelenlétében már nehezebben, míg mozgó stb. közegekben komoly problémákat vet fel [3].

Az eddigiek alapján látjuk, hogy közismert módon az energia terjedését (6) —$\overline{S}$ — illetve $\overline{S}$ megváltozása, mint „detektálható, terjedő jelenség" írja le. (4) alakja miatt azonban azonnal belátható, hogy $\overline{S}$ és megváltozása értelmezése átlagolási problémákat vet fel, s ezért foglalkoznunk kell az átlagos energia egyértelmű megadhatóságának a kérdésével is.

2. A csoportsebesség szokásos tárgyalása

Mivel első ránézésre úgy tűnik, hogy az energia terjedése csak $\overline{S}$ tényleges megváltoztatásával követhető nyomon, ezért a szokásos eljárásnál abból indulunk ki, hogy az elektromágneses hullámnak mindig van eleje és vége [4], s így minden esetben (még az ily módon hipotetikussá váló „monokromatikus" esetben is) hullámvonulatot, hullámcsomagot vizsgálunk. Ezzel egyben az átlagos energiafogalom használatától is eltekinthetünk, ami nagy könnyebbség.

A hullámcsomag szokásos felírása homogén közegben

$$\overline{F}(\overline{r}, t)=$$

$$=e^{j(\omega_0 t-\overline{k}_0\overline{r})}\int\limits_{\overline{k}_0-\Delta\overline{k}}^{\overline{k}_0+\Delta\overline{k}}\overline{F}_0(\overline{k}, \overline{k}_0)e^{j\left\{\overline{(\overline{k}-\overline{k}_0)}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\overline{k}}\right)_0 t-\overline{r}\right]\right\}}\,d\overline{k}, \tag{7}$$

ahol $\overline{k}$ — terjedési vektor

$$\omega(\overline{k})=\omega(\overline{k}_0)+(\overline{k}-\overline{k}_0)\left(\frac{\partial\omega}{\partial\overline{k}}\right)_0+\dots$$

$$\omega(\overline{k}_0)\equiv\omega_0, \tag{8}$$

és a hullámcsomag spektrumát olyan szűknek veszszük, hogy a (8) lineáris közelítés elegendően pontos legyen. Ekkor a (7)-tel megadott „csoport" fázisát az integrálból kiemelt exp. $j(\omega_0 t-\overline{k}_0\overline{r})$ írja le. E kiemelés formailag önkényes, azaz a sorfejtés helyének megválasztása nem szigorúan határozott. Az energiára jellemző amplitúdó terjedését (7)-ben az integrál állandó értékeiből adódó felületek haladásából ítélhetjük meg. Ha $\overline{F}_0(\overline{k}, \overline{k}_0)$ lassan változó függvény, ami az adott esetben reális feltételezés, akkor ezen felületeket a

$$(\overline{k}-\overline{k}_0)\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\overline{k}}\right)_0 t-\overline{r}\right]=\text{állandó} \tag{9}$$

egyenlet adja meg. Innen a felületek terjedési sebessége tehát:

$$\frac{d\overline{r}}{dt}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial\overline{k}}\right)_0=\overline{v}_g, \tag{10}$$

a csoportsebesség. Megállapítható, hogy ha $\omega(\overline{k})\sim\overline{k}$, akkor — mint az közismert —

$$\overline{v}_g=\overline{v}_f, \quad \text{ahol} \quad v_f=\omega_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^{-1}, \tag{11}$$

a fázissebesség és s az ívhossz a fázisút mentén. (Ugyanez levezethető az ismert „állandó fázis elve" alapján [4] stb.)

Ez a definíció önmagában korrekt, de néhány kérdést felvet:

— Nem válaszol általában az energiaáramlás sebességének a kérdésére a fenomenológiai leírás teljes érvényességi tartományán belül, ahol az esetek egy igen nagy részében folyamatos és sok esetben szigorúan monokromatikus jelekkel dolgozunk.

— A csoportsebesség e definiálása a felvett megoldási alakon és nem a Maxwell-egyenleteken keresztül történik!

— A (10) egyenlet alakja nem alkalmas arra, hogy a sokféle lehetséges közegben való terjedést összehasonlító módon vizsgáljuk, hiszen a közegjellemzők már önmagukban bonyolult módon bújtatva szerepelnek (10)-ben.

Következmény: A $\overline{v}_g$ klasszikus tárgyalása nem tekinthető teljes vizsgálatnak, s ezért meg kell vizsgálni az energia megadásának kérdéseit, s terjedése Maxwell-egyenletek segítségével való vizsgálatának a lehetőségét.

3. Az elektromágneses energia meghatározása

Ahhoz tehát, hogy valamilyen általános és áttekinthető vizsgálatot kezdjünk az energiaterjedés analízisére, mindenekelőtt meg kell vizsgálni a terjedő energia — (5), illetve (6) — tulajdonságait a (4) megoldások esetén. E megoldások érvényességi tartományát ismerjük [1]. Ennél általánosabb vizsgálatot (nagyon inhomogén terek, mozgó vagy időben változó, inhomogén terek stb.) csak e vizsgálatokra építve kezdhetünk, mivel jelenleg számos homogén vagy inhomogén [2] esetben is sok megoldatlan kérdéssel találkozunk.

Mint az (5)-ből is kiderül, a fizikai mérésekben és vizsgálatokban nem $\overline{S}$ szerepel közvetlenül, hanem valamely mérési felületen ($\overline{A}$ vagy $\Delta\overline{A}$) valamely idő (Δt) alatt áthaladó energia vagy annak megváltozása, azaz az $\overline{S}$ integrálja. Ezt esetleg azután egységnyi felületre vagy időre vonatkoztatjuk — átlagoljuk. Ilyen módon eredményünk nem csupán a hullámképtől, hanem az integrálási, illetve átlagolási felület és időtartam megválasztásától is függ.

Tehát alapvetően fontos kérdés: Milyen feltételek mellett kapunk a „mérési" felülettől és időtől független energia-átlagértéket? Függ-e az átlagolás eredménye attól, hogy az idő és felület szerinti átlagolás sorrendje milyen? Milyen tényezők érintik az energia-átlagolásra vonatkozó vizsgálatok egyértelműségét?

(6) alapján, (4)-et figyelembe véve a pillanatnyi Poynting-vektor felírható:

$$\overline{s}(\overline{r}, t)=\overline{E}(\overline{r}, t)\times\overline{H}(\overline{r}, t) \tag{12}$$

(12) segítségével megoldhatjuk már a $\Delta\overline{A}$ felületen időegység alatt átáramló, Δt mérési időtartamra vonatkoztatott, átlagos $\tilde{W}$ energiát. (Az átlagértékjel $\sim$ legyen.)

Ez:

$$\tilde{W}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{\Delta \bar{A}}\bar{s}(\bar{r},t)\,d\bar{A}\right]dt. \quad (13)$$

Azonban átlagenergiát kaphatunk más módon is:

$$\tilde{W}^0=\int_{\Delta \bar{A}}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2}\bar{s}(\bar{r},t)\,dt\right]d\bar{A}. \quad (14)$$

(13) és (14) már lehetőséget ad a feltett kérdések egzakt megfogalmazására. Vizsgálatainkban addig beszélhetünk egyértelműen energiáról és átlagenergiáról, amíg

$$\tilde{W}=\tilde{W}^0, \quad (15)$$

és mellékfeltételként valamely $(\bar{r}_0, t_0)$ egyértelmű és elegendően kis környezetében

$$\frac{\partial\tilde{W}}{\partial(\Delta t)}\cong 0 \quad \text{és} \quad \overline{\mathrm{grad}_{\Delta A}}\,\tilde{W}\cong \text{const.}, \quad (16)$$

a közegre és a megoldásra tett eddigi feltételeink egyidejű teljesülése mellett. Tekintve, hogy (4) stancioner megoldás [1], ezért

$$\frac{\partial\bar{F}_0}{\partial t}\equiv 0. \quad (17)$$

Így, ha az energiaterjedés vizsgálata valamilyen perturbáció alkalmazását kívánja meg, akkor is teljesülnie kell annak, hogy

$$\frac{\partial\bar{F}_0(\text{pert.})}{\partial t}\cong 0 \ll \frac{\partial\bar{F}}{\partial t}. \quad (18)$$

(18)-at a további vizsgálatokban mindig szem előtt kell tartani! Ekkor (13) és (14) számításánál a Δt időtartam alatt $\bar{F}_0$ (pert.) $\cong$ áll.

A (13)—(17) egyenletek összevetése mutatja, hogy e vizsgálat indításánál már felhasználjuk, hogy időben nem változó közegben, monokromatikus, állandósult megoldás esetén vizsgáljuk az energiaanalízis lehetőségét és egyértelműségének a feltételeit. Ezért minden újabb esetben az új feltételek mellett az energia ilyen vagy hasonló elemzése újra elvégzendő.

3.1. A feladat analízise

Végezzük vizsgálatainkat az $(\bar{e}_m, \bar{e}_n, \bar{e}_p)$ koordináta egységvektorokkal leírt, derékszögű koordináta rendszerben, ahol k=m, n, p (illetve 1, 2, 3). Ekkor (4) alapján a fizikailag létező megoldás:

$$\bar{F}=\sum_i\{\sum_k a_i F_{0ik}\bar{e}_k \sin(\omega_0 t-\varphi_i-\varphi_{ai}+\varphi_{0iFk})\}, \quad (19)$$

ahol az l indexnek (4) kifejtésénél fellépő automatikus eltűnése miatti változásokat (a_iF_{0ik}) és φ_{0iFk} hordozzák. A triviálisan teljesülő (17) ekkor részletezhető is:

$$\frac{\partial a_iF_{0ik}}{\partial t}\equiv 0, \quad \frac{\partial\omega_0}{\partial t}\equiv 0, \quad \frac{\partial(\varphi_i+\varphi_{ai}-\varphi_{0iFk})}{\partial t}\equiv 0. \quad (17a)$$

Innen (12) aktuális alakja:

$$\begin{aligned}\bar{s}(\bar{r},t)&=\sum_i[\sum_k a_i E_{0ik}\bar{e}_k \sin(\omega_0 t-\varphi_i-\varphi_{ai}+\varphi_{0iEk})]\times\\ &\times\sum_i[\sum_k a_i H_{0ik}\bar{e}_k \sin(\omega_0 t-\varphi_i-\varphi_{ai}+\varphi_{0iHk})]=\\ &=\sum_k E_{0k}\bar{e}_k \sin(\omega_0 t-\varphi+\varphi_{0Ek})\times\\ &\times\sum_k H_{0k}\bar{e}_k \sin(\omega_0 t-\varphi+\varphi_{0Hk}). \quad (20)\end{aligned}$$

(20) áttekintése után látható, hogy formailag azonos a vizsgálat:

— egymódusú ($i\equiv 1$) esetben és

— az egyébként szükséges feltételek teljesülése mellett [1] az általános, eredő tér esetén.

Az általános, eredő tér inhomogén alapmódusokra felbontott alakjának vizsgálata ehhez képest a (15) és (16) egyenletekben feltett kérdések megválaszolásánál elvileg újat nem adhat. Lényeges részleteket tisztázhat azonban az energia belső mozgásainak, a módusok közti csatolásoknak stb. a feltárásával, és ezen keresztül esetleg utat nyit az inhomogén alapmódusokból felépülő „terjedő" alapmódusok (együttmozgó energiarészek) definiálásához és az [1]-ben megadott megoldási eljárás továbbfejlesztéséhez. (Ennek szükségességét a módszer távvezetékekre való alkalmazása [18] alátámasztotta.)

Fentiek alapján a továbbiakban elvégezzük a vizsgálatokat az általános, eredő tér (és automatikusan az egymódusú tér) esetére. Ezzel a csoportsebességi vizsgálatokhoz szükséges válaszokat megkapjuk. A többmódusú eset részletekbe menő analízise más elemzésekben kerül majd sorra.

Egyidejűleg (20) ezen áttekintése azt is mutatja, figyelembe véve az (1), (2) és (5) egyenleteket is, hogy a használni kívánt fenomenológiai tárgyalás esetén, ahhoz, hogy $\bar{S}$, illetve (20) létezzen, mindenekelőtt igaznak kell lenni, hogy az összes közeg—elektromágneses tér kölcsönhatás $\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\mu}}$, $\bar{\bar{\varkappa}}$ és $\bar{\bar{\nu}}$ szerint úgy és olyan gyorsan játszódik le, hogy beszélhetünk $\bar{E}$-ről és $\bar{H}$-ról stb. egyidejűleg. Külön vizsgálat tárgyát képezné ettől eltérő esetek analízise.

Ide kívánkozik még az a megjegyzés, hogy azokban az esetekben, amelyekben a (4) szerinti „hullámszerű" megoldás nem létezik vagy oly bonyolulttá válik, hogy például a terjedés, terjedési irány stb. fogalmak értelmetlenné válnak, valószínű, hogy az egyetlen energiacsomag szétszóródásának vizsgálata (II. pont) legalább annyi információt nyújt, mint valamely stacionárius megoldás analízise.

Ezzel vizsgálataink érvényességi körét meghatároztuk.

3.2 Az integrálási sorrend felcserélhetősége

Első lépésként részletesen megvizsgálandó $\bar{s}$ — (20) egyenlet. Az x egyszerű kifejthetősége érdekében legyen a k=1, 2, 3 index ciklikus, azaz a $(k+1)$ és $(k-1)$ bármely k értékre legyen értelmezhető. (Például: k=3 esetén $k+1$=1.)

Ekkor:

$$\bar{s}(\bar{r},t)=\bar{E}\times\bar{H}=\sum_k(E_{k+1}H_{k-1}-E_{k-1}H_{k+1})\bar{e}_k \quad (21)$$

(21) felhasználásával (20) a (13) és (14) kifejtéséhez alkalmas alakúra írható át. Legyen

$$\psi_0(t)=\omega_0 t-\varphi,$$

és akkor:

$$\bar{s}(\bar{r},t)=\sum_k[E_{0k+1}H_{0k-1}\sin\varphi_{0Ek+1}\sin\varphi_{0Hk-1}-$$
$$-E_{0k-1}H_{0k+1}\sin\varphi_{0Ek-1}\sin\varphi_{0Hk+1}]\bar{e}_k+$$
$$+\sum_k\{E_{0k-1}H_{0k+1}\sin[\psi_0(t)+\varphi_{0Ek+1}+\varphi_{0Hk-1}]-$$
$$-E_{0k-1}H_{0k+1}\sin[\psi_0(t)+\varphi_{0Ek+1}+$$
$$+\varphi_{0Hk-1}]\}\sin\psi_0(t)\bar{e}_k, \quad (22)$$

azaz:

$$\bar{s}(\bar{r},t)=\bar{S}_0+\bar{s}_*(t)\sin\psi_0(t), \quad (22a)$$

ahol (17a) miatt:

$$\frac{\partial\bar{S}_0}{\partial t}\equiv 0.$$

(22) további kifejtésénél az $\bar{r}$ és t szerinti függés teljes szétválasztása a cél. További célszerű rövidítés, hogy:

$$E_{0k+1}H_{0k-1}=A_{EH\pm 1} \quad \text{és} \quad E_{0k-1}H_{0k+1}=A_{EH\mp 1},$$

időtől független tényezők. A kézenfekvő átalakítások után:

$$\bar{s}_*(t)\sin\psi_0(t)=$$
$$=\sum_k\{[A_{EH\mp 1}\sin\varphi_{EH\mp 1}-A_{EH\pm 1}\sin\varphi_{EH\pm 1}]\sin\varphi+$$
$$+[A_{EH\pm 1}\sin(\omega_0 t+\Phi_{\pm 1})-$$
$$-A_{EH\mp 1}\sin(\omega_0 t+\Phi_{\mp 1})]\sin\omega_0 t\}\bar{e}_k=\bar{S}_{*0}+\bar{s}_{**}(t)\sin\omega_0 t, \quad (23)$$

ahol:

$$\varphi_{EH\pm 1}=\varphi_{0Ek+1}+\varphi_{0Hk-1}-\varphi;$$
$$\varphi_{EH\mp 1}=\varphi_{0Ek-1}+\varphi_{0Hk+1}-\varphi; \quad \Phi_{\pm 1}=\varphi_{EH\pm 1}-\varphi;$$
$$\Phi_{\mp 1}=\varphi_{EH\mp 1}-\varphi \quad \text{és} \quad \frac{\partial\bar{S}_{*0}}{\partial t}=0.$$

Tehát:

$$\bar{s}(\bar{r},t)=(\bar{S}_0+\bar{S}_{*0})+\bar{s}_{**}(t)\sin\omega_0 t=\bar{S}_*+\bar{s}_{**}(t)\sin\omega_0 t, \quad (24)$$

ahol: $\partial\bar{S}_*/\partial t=0$.

(24) segítségével mind a (13), mind a (14) egyenlet kiszámítható. Ekkor:

$$\tilde{W}=\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}\left[\int_{\Delta A}(\bar{S}_*+\bar{s}_{**}(t)\sin\omega_0 t)\,\overline{dA}\right]dt=$$
$$=W_0+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}\left[\int_{\Delta A}\bar{s}_{**}(t)\,\overline{dA}\right]\sin\omega_0 t\,dt, \quad (25)$$

és

$$\tilde{W}^0=W_0+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta A}\left[\int_{\Delta t}\bar{s}_{**}(t)\sin\omega_0 t\,dt\right]\overline{dA}, \quad (26)$$

ahol:

$$W_0=\int_{\Delta A}(\bar{S}_0+\bar{S}_{*0})\,\overline{dA}, \quad (27)$$

(25) és (26) összevetése $\bar{s}_{**}(t)$ felbontását kívánja. Mivel:

$$\bar{s}_{**}(t)=\sum_k[(A_{EH\pm 1}\cos\Phi_{\pm 1}-A_{EH\mp 1}\cos\Phi_{\mp 1})\sin\omega_0 t+$$
$$+(A_{EH\pm 1}\sin\Phi_{\pm 1}-A_{EH\mp 1}\sin\Phi_{\mp 1})\cos\omega_0 t]\bar{e}_k=$$
$$=\sum_k(\mathcal{A}_{\cos}\sin\omega_0 t+\mathcal{A}_{\sin}\cos\omega_0 t)\bar{e}_k=$$
$$=\bar{\mathcal{A}}_{\cos}\sin\omega_0 t+\bar{\mathcal{A}}_{\sin}\cos\omega_0 t \quad (28)$$

s a jelölések értelemszerűek.

Innen:

$$\tilde{W}=W_0+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}\left[\left(\int_{\Delta A}\bar{\mathcal{A}}_{\cos}\overline{dA}\right)\sin^2\omega_0 t+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{\Delta A}\bar{\mathcal{A}}_{\sin}\overline{dA}\right)\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\right]dt,$$

és

$$\tilde{W}^0=W_0+$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta A}\left[\int_{\Delta t}(\bar{\mathcal{A}}_{\cos}\sin^2\omega_0 t+\bar{\mathcal{A}}_{\sin}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t)\,dt\right]\overline{dA}.$$

Feltétel: Bármilyen vizsgálatban csak olyan perturbációkat engedünk meg, illetve Δt és ΔA-t úgy választjuk meg (elegendően kicsire), hogy:

$$\frac{\partial\left(\int_{\Delta A}\bar{\mathcal{A}}\,\overline{dA}\right)}{\partial t}\cong 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial\bar{\mathcal{A}}}{\partial t}\cong 0, \quad (29)$$

valamint:

$$\overline{\mathrm{grad}}\left(\int_{\Delta t}\sin^2\omega_0 t\,dt\right)\cong\overline{\mathrm{grad}}\left(\int_{\Delta t}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\,dt\right)\cong 0.$$

legyen. [Δt és ΔA alsó korlátját majd a (16) feltételek kielégítése szabja meg, hogy egyáltalán értelme legyen $\tilde{W}$-nak.]

Legyen továbbá:

$$\int_{\Delta t}\sin^2\omega_0 t\,dt=F_{ss}(t) \quad \text{és} \quad \int_{\Delta t}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\,dt=F_{sc}(t);$$

valamint:

$$\int_{\Delta A}\bar{\mathcal{A}}_{\cos}\,\overline{dA}=W_{\cos} \quad \text{és} \quad \int_{\Delta A}\bar{\mathcal{A}}_{\sin}\,\overline{dA}=W_{\sin}.$$

Ekkor, a (29) feltételcsoport teljesülése következtében a kifejtés tovább folytatható, és

$$\tilde{W}=W_0+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}W_{\cos}\sin^2\omega_0 t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} W_{\sin}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\,dt$$

és

$$\tilde{W}^0=W_0+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta A}[\mathcal{A}_{\cos}F_{ss}(t)+\mathcal{A}_{\sin}F_{sc}(t)]\,\overline{dA}.$$

Innen pedig látható, hogy a tett feltevések mellett

$$\tilde{W}\equiv\tilde{W}^0=W_0+\frac{1}{\Delta t}[W_{\cos}F_{ss}(t)+W_{\sin}F_{sc}(t)] \qquad (30)$$

Ezzel beláttuk, hogy a (15) követelmény az adott körülmények között kielégül. Az átlagenergia meghatározásánál az eredmény nem függ az integrálás sorrendjétől.

E vizsgálatban Δt és ΔA-ra felső korlátot kaptunk (esetleges perturbációkra is gondolva). Azonban elemi úton belátható, hogy a hullámhosszhoz és a periódusidőhöz képest igen kis Δt és $\sqrt{\Delta A}$ választásával $\tilde{W}$-ra tág határok közt tetszőleges értéket kaphatunk. Ezért Δt és ΔA-ra alsó korlátot is kell adni.

3.3 $\tilde{W}$ vizsgálata

Ez esetben a közvetlen célunk a (16) feltételek kielégítésének vizsgálata, amely feltételek teljesülése esetén beszélhetünk állandó vagy egyértelmű átlagenergiáról.

a) Az idő — függés vizsgálata

Tekintve, hogy az időtől való függés még pertubált esetben is — (18) — alapvetően periodikus, legyen

$$\Delta t=n\frac{\pi}{\omega_0}+\Delta T, \qquad (31)$$

ahol $n=0, 1, 2, \ldots$, természetes egész szám és $0\leq\Delta T\leq\frac{\pi}{\omega_0}$. Tudjuk továbbá, hogy

$$F_{ss}(t)=\frac{\Delta t}{2}-\frac{\sin 2\omega_0\Delta t}{4\omega_0},$$

és

$$F_{sc}(t)=\frac{1-\cos 2\omega_0\Delta t}{4\omega_0},$$

ha a Δt tartományra a $t(0, \Delta t)$ szakaszon integrálunk, ami nem jelenti az általánosság megszorítását, megtehetjük.

(31)-et behelyettesítve belátható, hogy

$$0\leq F_{sc}(\Delta T, n)\leq\frac{1}{2\omega_0} \qquad (32)$$

és

$$\left[\frac{1}{2}\left(n\frac{\pi}{\omega_0}+\Delta T\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{2\omega_0}\right]\leq F_{ss}(\Delta T, n)\leq$$
$$\leq\left[\frac{1}{2}\left(n\frac{\pi}{\omega_0}+\Delta T\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{2\omega_0}\right]$$

továbbá, ha

$$n=0 \quad \text{és} \quad \Delta T\ll\pi/\omega_0,$$

akkor

$$F_{ss}(\Delta T, 0)\cong 0 \quad \text{és} \quad F_{sc}(\Delta T, 0)\cong 0. \qquad (33)$$

Következmény: A (32) és (33) összefüggések bizonyítják az időtartományban — és analóg módon belátható a tér-tartományban is —, hogy a „mérhető" energia értéke függ a mérési időtől (felülettől), ingadozik, s $\tilde{W}$ érdemben csak várható értékként adható meg valamekkora szórással. A szórás például a Δt függvénye. — Részletes (mérés-) analízisnél ettől nem lehet eltekinteni! — Esetünkben, amikor a csoportsebesség tanulmányozása a célunk, nem szükséges e statisztikus analízis, hiszen csak azt vizsgáljuk, hogy értelmezhető-e $\tilde{W}$ és az egyértelműen összekapcsolható-e a jelamplitúdóval, ha értelmezhető a jelamplitúdó.

(33) miatt külön kikötésként érvényesíteni kell, hogy $n\neq 0$ a továbbiakban. Ekkor, (31)-et és (32)-t felhasználva és n értékét növelve:

$$\frac{1}{\Delta t}F_{ss}(\Delta T, n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n\frac{\pi}{\omega_0}+\Delta T}\,\frac{\sin 2\omega_0\Delta T}{4\omega_0}\cong\frac{1}{2} \qquad (34)$$

és

$$\frac{1}{\Delta t}F_{sc}(\Delta T, n)=\frac{1}{n\frac{\pi}{\omega_0}+\Delta T}\,\frac{1-\cos 2\omega_0\Delta T}{4\omega_0}\lessapprox\frac{1}{2n\pi}\ll 1$$

ahol $n\gg 1$. n értékét a megkívánt pontosság szabja meg. Ezzel Δt-re alsó korlátot is kaptunk! Ez a jelen számítás menete ($\omega_0 t$ kiemelt kezelése) miatt adódott ebben a sorrendben. Ha φ-t kezeljük analóg módon kiemelve — amit $(\omega_0 t-\varphi)$ szerkezete miatt megtehetünk —, akkor analóg megkötés (korlát) adódik ΔA-ra.

b) A felület — függés vizsgálata

A (27) és a (30) egyenletekből tudjuk, hogy $\tilde{W}$ függését a ΔA felülettől az

$$\int_{\Delta A}(\bar{S}_0+\bar{S}_{*0})\,\overline{dA};\quad \int_{\Delta A}\mathcal{A}_{\cos}\,\overline{dA} \quad \text{és} \quad \int_{\Delta A}\mathcal{A}_{\sin}\,\overline{dA}$$

integrálok tartalmazzák.

Ezek részletes elemzésénél W_0-t hagyjuk utolsónak és definiáljunk valamilyen $\overline{\Delta A}$ felületet.

Legyen

$$\overline{\Delta A}=\Delta a_1\bar{e}_{a1}\times\Delta a_2\bar{e}_{a2}=\Delta a_1\Delta a_2\bar{e}_A, \qquad (35)$$

ahol $\bar{e}_{a1}$ és $\bar{e}_{a2}$ nem $\|$ és nem feltétlenül $\perp$. Továbbá $\bar{e}_A=\sum_k\xi_k\bar{e}_k$. Tudjuk továbbá, hogy (28) alapján használhatjuk az egyértelmű $\mathcal{A}_{\cos}=\mathcal{A}_{\cos\pm}-\mathcal{A}_{\cos\mp}$ és $\mathcal{A}_{\sin}=\mathcal{A}_{\sin\pm}-\mathcal{A}_{\sin\mp}$ jelöléseket. Ekkor a $W_{\cos}$-t és $W_{\sin}$-t meghatározó tagok szerkezetét elegendő egy példán vizsgálni. Így elegendő az

$$\int_{\Delta A}\mathcal{A}_{\cos\pm}\,\overline{dA}=\int_{\Delta A}\sum_k(A_{EH\pm 1}\cos\Phi_{\pm 1})\xi_k\,da_1\,da_2 \qquad (36)$$

vizsgálata.

Feltétel: — (36) értékének megbecslése érdekében, tekintve, hogy (4)-re eleve vannak változási sebességkorlátozások [1], tegyük fel, hogy van értelme „amplitúdóról" beszélni és $\overline{\Delta A}$ csak akkora, hogy $\overline{\Delta A}_{max}$-hoz tartozó

$$\frac{\Delta a_i \bar{e}_{ai} \overline{\text{grad}}\, A_{EH\pm1}}{A_{EH\pm1}} \ll 1 \qquad (37a)$$

azaz a felület mentén az amplitúdót sorbafejtve az a felület mentén felvett valamely értékével helyettesíthető.

— Ha időben is változik (lassan) a jel, például perturbáció miatt, — $(\omega_0 t)$-én kívül — akkor (37*a*)-val analóg feltétel adódik Δt_{max}-ra.

— Legyen továbbá a kiválasztott $\overline{\Delta A}$ felület kis darabon síkkal jól közelíthető, azaz

$$\frac{|\overline{\text{grad}}\, \xi_k|}{\xi_k} \ll 1. \qquad (37b)$$

Ilyen módon $A_{EH\pm1}$ és ξ_k a ΔA mentén (36)-ban az integrálból kiemelhető, azaz:

$$\int\limits_{\Delta A} \mathcal{A}_{\cos\pm} \overline{dA} \cong \sum_k \xi_k A_{EH\pm1} \int\limits_{\Delta a_1} \int\limits_{\Delta a_2} \cos(\varphi_{EH\pm1} - \varphi)\, da_1\, da_2.$$

Továbbá, (4) alapján figyelembe véve a szereplő mennyiségek jelentését és (37)-t,

$$\int\limits_{\Delta A} \mathcal{A}_{\cos\pm} \overline{dA} \cong \sum_k \xi_k A_{EH\pm1} [\cos(\varphi_{0Ek+1} + \varphi_{0Hk-1}) \int\limits_{\Delta a_1} \int\limits_{\Delta a_2} \cos 2\varphi\, da_1\, da_2 + \sin(\varphi_{0Ek+1} + \varphi_{0Hk-1}) \int\limits_{\Delta a_1} \int\limits_{\Delta a_2} \sin 2\varphi\, da_1\, da_2]. \qquad (38)$$

Ezzel a felületre vonatkozóan is — a hullámhosszhoz képest (φ) — alsó korlátot kaptunk.

Legyen

$$\Delta a_0 \to \varphi|_{\Delta a_0} = \pi \quad \text{és} \quad \Delta a_1 \sim \Delta a_2 \gg \Delta a_0, \qquad (39)$$

ami a (31) időbeni kötöttség analógja. Ekkor elemi módon belátható, hogy (38) Δa_1 és Δa_2-től független kis várható érték körül ingadozik (32) analógjaként, azaz

$$\int\limits_{\Delta A} \mathcal{A}_{\cos\pm} \overline{dA} \cong \sum_{k,q} \xi_k A_{EH\pm1} \frac{\alpha_{\pm q} f_q(\varphi_{0E}, \varphi_{0H})}{2\|\varphi\| a_1\, a_2},$$

ahol $0 \leqq |\alpha_{\pm q}| \leqq 1$, s a többi értelemszerűen adódik (38)-ből. Ez a felülettel arányos W_0 mellett elhanyagolható, illetve ΔA^{-1}-gyel szorozva $\ll 1$.

c) Az átlagenergia:

Az előzőek alapján

$$\tilde{W} = W_0 + \frac{1}{\Delta t} F_{ss}(t) W_{\cos} + \frac{1}{\Delta t} F_{sc}(t) W_{\sin} \cong W_0 + \left[\frac{1}{2} - O(\Delta t)\right] O(\Delta A) + O(\Delta t) O(\Delta A) \cong W_0. \qquad (40)$$

Ezek után a $W_0 = \int\limits_{\Delta A} (\bar{S}_0 + \bar{S}_{*0}) \overline{dA}$-t a ***3.3.b.*** pontban látott módon kifejtjük és a (39) megkötést is érvényesítjük.

Az energia „bőrözésére" jellemző tagokat — (32) és (38) megfelelőit — elhagyjuk. Ezt addig tehetjük meg, amíg a tett feltévések igazak.

Megjegyzés: Ezen energiaingadozásra jellemző tagok analízise mind méréstechnikai, mind az ún. „meddő teljesítmény" vizsgálati szempontból fontos. Jelen esetben célunk eléréséhez elegendő volt az adott feltételek mellett való elhanyagolhatóság igazolása az átlag számításánál és csak itt és ebből a szempontból.

Így belátható, hogy

$$\int\limits_{\Delta A} \bar{S}_0 \overline{dA} \cong \sum_k (A_{EH\pm1} \sin\varphi_{0Ek+1} \sin\varphi_{0Hk-1} - A_{EH\mp1} \sin\varphi_{0Ek-1} \sin\varphi_{0Hk+1}) \xi_k \Delta a_1\, \Delta a_2,$$

és

$$\int\limits_{\Delta A} \bar{S}_{*0} \overline{dA} \cong \frac{1}{2} \sum_k \xi_k [A_{EH\pm1} \cos(\varphi_{0Ek+1} + \varphi_{0Hk-1}) - A_{EH\mp1} \cos(\varphi_{0Ek-1} + \varphi_{0Hk+1})] \Delta a_1\, \Delta a_2.$$

Innen, elemi átalakítások és összevonások után adódik, hogy:

$$\tilde{W} \cong \frac{1}{2} \sum_k \xi_k [(A_{EH\pm1} \cos\varphi_{0Ek+1} \cos\varphi_{0Hk-1} - A_{EH\mp1} \cos\varphi_{0Ek-1} \cos\varphi_{0Hk+1}) + (A_{EH\pm1} \sin\varphi_{0Hk+1} \sin\varphi_{0Hk-1} - A_{EH\mp1} \sin\varphi_{0Ek-1} \sin\varphi_{0Hk+1})] \Delta a_1\, \Delta a_2, \qquad (41)$$

azaz visszatérve a (4)-ben látott, szokásos $\exp j(\omega_0 t - \varphi)$ írásmódra.

$$\tilde{W} \cong \frac{1}{2} \overline{\Delta A} [(\mathrm{Re}\bar{E}_0 \times \mathrm{Re}\bar{H}_0) + (\mathrm{Im}\bar{E}_0 \times \mathrm{Im}\bar{H}_0)]. \qquad (42)$$

(42) alapján aztán már — formalitásként — bevezethetünk komplex energia és Poyting-vektor fogalmat. Külön ellenőrzendő minden esetben nemcsak a $\tilde{W}$, hanem a komplex energia képzetes részének jelentése, kapcsolata az energia „bőrözésével", az egész átlag szórása stb.

Megállapítás: (42) alapján belátható, hogy az inhomogén alapmódusokkal leírt megoldás léte és a tett kiegészítő feltételek mellett az átlagenergia értelmezhető és azt a jel általános amplitúdója $(\bar{F}_0)$ határozza meg. Az energia terjedése tehát vizsgálható az $\bar{F}_0$ változásának haladásaként.

Kiegészítés: — (42) alapján a várható értékekre bevezethető az átlagos és a komplex Poynting-vektor, azaz — ha $\bar{b}^*$ a $\bar{b}$ komplex konjugáltját jelöli ez esetben — triviális, hogy:

$$\bar{\bar{S}} \cong \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\bar{E}_0 \times \bar{H}_0^*) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^*).$$

Legyen

$$_k\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^*,$$

és

$$_k\tilde{W} = \int\limits_{\Delta A} {_k\bar{S}}\, \overline{dA}, \qquad \tilde{W} = \mathrm{Re}_k W.$$

— Nyitott maradt összes feltett és adódott kérdésünk a tett feltevések körén kívül eső jelenségekre. E téren célszerű további vizsgálatok végzése.

— Amennyiben az integrálási tartományok alsó és felső korlátaira tett feltevések ütköznek, átlagenergia nem értelmezhető.

4. A csoportsebesség egy megadási lehetősége az inhomogén alapmódusok módszere segítségével

Az amplitúdó elemien kicsi és lassú [lásd a korábbi feltételeket — (17), (18) stb.] megváltozásának a terjedését az eredetileg az inhomogén alapmódusok módszere kiindulásaként használt Maxwell-egyenlet alakból [1] ismételten elindulva meg lehet határozni, a (4) szerinti megoldás létét elfogadva.

A továbbiakban tehát az amplitúdót pertubáljuk (moduláljuk): $(a_{il}+\delta)$, illetve $(a_{il}+\delta_i)$ alakban, ahol δ elemien kicsiny.

A más lehetséges perturbációkkal (modulációkkal):

$(\varphi_{ai}+\delta)$, illetve $(\varphi_{ai}+\delta_i)$ fázismodulációval,

$(\omega_0+\delta)$, illetve $(\omega_0+\delta_i)$ frekvenciamodulációval,

$(\bar{F}_{0il}+\delta)$, illetve $(\bar{F}_{0il}+\delta_i)$ polarizáció-modulációval

később, külön foglalkozunk.

Az eredeti, perturbálatlan megoldásunk alakja (4) szerinti. Így, ha a perturbáció $(a_{il}+\delta_i)$ alakú, akkor:

$$\bar{F}_\delta=\sum_{i,l}(1+f_{il})\bar{F}_{il}=\sum_{i,l}\bar{F}^\delta_{il}=$$

$$=\sum_{i,l}[(1+f_{il})a_{il}e^{-j\varphi_{ai}}\bar{F}_{0il}]e^{j(\omega_0 t-\varphi_i)}, \qquad (43)$$

ahol:

$$f_{il}=\delta_i/a_{il}\ll 1.$$

A Maxwell-egyenleteket nemcsak a (4) megoldásnak, hanem a (43) perturbált megoldásnak is ki kell elégítenie. A Maxwell-egyenleteket az [1]-ben már megszokott alakra törekedve fejtjük ki. Figyelembe vesszük, hogy $\ln(1+f_{il})\cong f_{il}$. Így:

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}+f_{il}-j\varphi_{al})\times\bar{H}^\delta_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{TH0il}\bar{H}^\delta_{il}-j\bar{K}_l\times\bar{H}^\delta_{il}]=$$

$$=\sum_{i,l}\varepsilon_0\left[\left(\frac{\partial\bar{\bar{\varepsilon}}}{\partial t}\bar{E}^\delta_{il}+\frac{\partial\bar{\bar{\varkappa}}}{\partial t}\bar{H}^\delta_{il}\right)+(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{\bar{\nabla}}_{tE0il}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{\bar{\nabla}}_{tH0il}\bar{H}^\delta_{il})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial(\ln a_{il}+f_{il}-j\varphi_{ai})}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}^\delta_{il})\right],$$

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}+f_{il}-j\varphi_{al})\times\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{TE0il}\bar{E}^\delta_{il}-j\bar{K}_l\times\bar{E}^\delta_{il}]=$$

$$=-\sum_{i,l}\mu_0\left[\left(\frac{\partial\bar{\bar{\nu}}}{\partial t}\bar{E}^\delta_{il}+\frac{\partial\bar{\bar{\mu}}}{\partial t}\bar{H}^\delta_{il}\right)+(\bar{\bar{\nu}}\bar{\bar{\nabla}}_{tE0il}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{\bar{\nabla}}_{tH0il}\bar{H}^\delta_{il})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial(\ln a_{il}+f_{il}-j\varphi_{al})}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}^\delta_{il})\right],$$

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}+f_{il}-j\varphi_{ai})(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}^\delta_{il})+$$

$$+(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varepsilon}}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varkappa}}}\bar{H}^\delta_{il})+(\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\varepsilon il}\bar{E}^\delta_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\varkappa il}\bar{H}^\delta_{il}\rangle)-$$

$$-j\bar{K}_i(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}^\delta_{il})]=0 \qquad (44)$$

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}+f_{il}-j\varphi_{al})(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}^\delta_{il})+$$

$$+(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\nu}}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\mu}}}\bar{H}^\delta_{il})+(\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\nu il}\bar{E}^\delta_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\mu il}\bar{H}^\delta_{il}\rangle)-$$

$$-j\bar{K}(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}^\delta_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}^\delta_{il})]=0,$$

ahol:

$$\bar{K}_i=\overline{\mathrm{grad}}\,\varphi_i;$$

$$\bar{\bar{\nabla}}_{TH0il}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial\ln H_{20il}}{\partial z} & \dfrac{\partial\ln H_{30il}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\ln H_{10il}}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial\ln H_{30il}}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial\ln H_{10il}}{\partial y} & \dfrac{\partial\ln H_{20il}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix};$$

$\bar{\bar{\nabla}}_{TE0il}$ analóg $\bar{\bar{\nabla}}_{TH0il}$-lel;

$$\bar{\bar{\nabla}}_{tH0il}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\ln H_{10il}}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial\ln H_{20il}}{\partial t} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\ln H_{30il}}{\partial t} \end{bmatrix};$$

$\bar{\bar{\nabla}}_{tE0il}$ analóg $\bar{\bar{\nabla}}_{tH0il}$-lel;

$$\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varepsilon}}}=\bar{\nabla}\bar{\bar{\varepsilon}}, \quad \bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varkappa}}}=\bar{\nabla}\bar{\bar{\varkappa}}, \quad \bar{\nabla}_{\bar{\bar{\nu}}}=\bar{\nabla}\bar{\bar{\nu}} \quad \text{és} \quad \bar{\nabla}_{\bar{\bar{\mu}}}=\bar{\nabla}\bar{\bar{\mu}};$$

$$(\bar{\bar{\nabla}}_{\varepsilon il})_{jk}=\varepsilon_{jk}\frac{\partial\ln E_{0ilk}}{\partial x_j};$$

$\bar{\bar{\nabla}}_{\varkappa il}$, $\bar{\bar{\nabla}}_{\nu il}$ és $\bar{\bar{\nabla}}_{\mu il}$ értelemszerűen analóg $\bar{\bar{\nabla}}_{\varepsilon il}$-lel;

$$\langle\bar{u}\rangle\equiv u_1+u_2+u_3.$$

Ezen túlmenően kihasználjuk a továbbiakban, hogy (44)-be $f_{il}=0$-t helyettesítve $\bar{F}_{il}$-re kapunk egyenletet, amelyet $\bar{F}_{il}$, mivel megoldása a Maxwell-egyenleteknek, kielégít.

4.1. A közegjellemzőkről

Mielőtt (44) megoldási lehetőségeit vizsgálnánk, szót kell ejteni a (2)-ben definiált $\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\varkappa}}$, $\bar{\bar{\nu}}$ és $\bar{\bar{\mu}}$ közegjellemzőkről.

— Eleve feltettük [2, 1], hogy a közegjellemzőket kialakító energia nagyságrendileg nagyobb, mint a vizsgált, monokromatikus, kis energiasűrűségű jel. Így következik, hogy $\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\varkappa}}$, $\bar{\bar{\nu}}$ és $\bar{\bar{\mu}}$ nem függ $\bar{F}_0$-tól, a jel amplitúdójától. Ez azt jelenti, holy lineáris összefüggésekkel leírható (közelíthető) közegekkel dolgozunk. Ha szükséges a nemlineáris tárgyalás, ezen vizsgálatok általánosításával kell megpróbálni. Lehetséges út δ_i, illetve f_{il} kicsiny volta miatt a közegjellemző sorfejtése az a_{il} „pont" δ_i kicsiny körzetében stb.

— A lineárisnak tekintett — (2)-vel leírható — közegek két fontos nagy csoportja a szigorúan lineáris és a diszperzív közegek.

Először a szigorúan lineáris közegekkel foglalkozunk, amelyeknél:

$$\frac{\partial\bar{\bar{\varepsilon}}}{\partial\omega_0}=\frac{\partial\bar{\bar{\varkappa}}}{\partial\omega_0}=\frac{\partial\bar{\bar{\nu}}}{\partial\omega_0}=\frac{\partial\bar{\bar{\mu}}}{\partial\omega_0}=0, \tag{45}$$

vagy ez az összefüggés az éppen aktuális ω_0 elegendően nagy környezetében a kívánt pontossággal teljesül. Ekkor a közegjellemzők szóban forgó frekvenciasávban a jel minden paraméterétől függetlenek.

— Teljesen külön esetként vizsgáljuk meg a diszperzív közegeket, ahol legalább egy közegjellemző függ ω_0-tól, például

$$\frac{\partial\bar{\bar{\varepsilon}}}{\partial\omega_0}\neq 0.$$

Ezekben az esetekben azonban megállapíthatjuk — tekintve a diszperzív közegek közegjellemzői közismert levezetéseit [4, 6—8 stb.] —, hogy a (44) egyenletek szempontjából elvileg hibás lenne például az

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\bar{\bar{\varepsilon}}(\omega_0) \tag{46a}$$

összefüggés használata. A (43) jel esetén $\bar{\bar{\varepsilon}}\neq\bar{\bar{\varepsilon}}(\omega_0)$, hanem új $\bar{\bar{\varepsilon}}^*$-gal kell számolnunk. (A *, hacsak külön fel nem tüntetjük, nem jelent komplex konjugáltat, csak egyszerű jelzést!) Mivel (44)-ből azonnal, elemi úton belátható, hogy f_{il} léte esetén f_{il} térbeli és időbeli deriváltjai is léteznek, azaz:

$$f_{il}=f_{il}(\bar{r},t),$$

ezért

$$\varepsilon^*=\bar{\bar{\varepsilon}}(\omega_0,f_{il}) \tag{46}$$

összefüggéssel kell számolni.

(46) miatt először csak a (45) esetet vizsgáljuk, majd teljesen különálló fejezetben a (46) esetet, beleértve a linearitás értelmezhetőségét diszperzív közegekben.

4.2. A csoportsebesség lineáris közegekben

Feladatunk jelenleg a (44) egyenlet megoldása szigorúan lineáris közegek esetén f_{il} meghatározása illetve az f_{il} terjedési sebessége meghatározása céljából. Kihasználjuk, hogy $\sum_{i,l}\bar{F}_{il}$ az inhomogén alapmódusok módszere segítségével kapott megoldás, azaz kielégíti az [1]:

$$\begin{aligned}
\bar{K}_i\times\bar{H}_{il}&=-\omega_0\varepsilon_0(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}_{il})\\
\bar{K}_i\times\bar{E}_{il}&=\omega_0\mu_0(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}_{il})\\
\bar{K}_i(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}_{il})&=0\\
\bar{K}_i(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H})&=0,
\end{aligned} \tag{47}$$

és

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})\times\bar{H}_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{THo il}\bar{H}_{il}]=0$$

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})\times\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{TEo il}\bar{E}_{il}]=0$$

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}_{il})+(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varepsilon}}}\bar{E}_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varkappa}}}\bar{H}_{il})+(\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\varepsilon il}\bar{E}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\varkappa il}\bar{H}_{il}\rangle)]=0$$

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}_{il})+(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\nu}}}\bar{E}_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\mu}}}\bar{H}_{il})+(\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\nu il}\bar{E}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\mu il}\bar{H}_{il}\rangle)]=0, \tag{48}$$

egyenletrendszereket külön-külön. Figyelembe veszszük ezenkívül a közegre tett összes feltevéseinket; szigorúan lineáris, időben nem változik, nem mozog stb. Felhasználjuk, hogy a (47) egyenletrendszer módusonként külön-külön is teljesül. Tudjuk, hogy (4) monokromatikus, stacioner megoldás.

Mindezeket felhasználva (44) egyszerűsíthető és átrendezhető.

Így:

$$\sum_{i,l}\{f_{il}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})\times\bar{H}_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{THo il}\bar{H}_{il}]+\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times(1+f_{il})\bar{H}_{il}\}=\sum_{i,l}\varepsilon_0(1+f_{il})\frac{\partial f_{il}}{\partial t}(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}_{il}),$$

$$\sum_{i,l}\{f_{il}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})\times\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{TEo il}\bar{E}_{il}]+\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times(1+f_{il})\bar{E}_{il}\}=$$

$$=-\sum_{i,l}\mu_0(1+f_{il})\frac{\partial f_{il}}{\partial t}(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}_{il}). \tag{49}$$

$$\sum_{i,l}\{f_{il}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}_{il})+(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varepsilon}}}\bar{E}_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varkappa}}}\bar{H}_{il})+(\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\varepsilon il}\bar{E}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\varkappa il}\bar{H}_{il}\rangle)]+(1+f_{il})\,\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}(\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}_{il})\}=0,$$

$$\sum_{i,l}\{f_{il}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}_{il})+(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\nu}}}\bar{E}_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\mu}}}\bar{H}_{il})+(\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\nu il}\bar{E}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}_{\mu il}\bar{H}_{il}\rangle)]+(1+f_{il})\,\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}(\bar{\bar{\nu}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}_{il})\}=0.$$

(47) ismételten figyelembe vehető, mivel:

$$\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\bar{H}_{il}=-\frac{1}{\varepsilon_0\omega_0}\bar{K}_i\times\bar{H}_{il},$$

$$\bar{\bar{\nu}}\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\bar{H}_{il}=\frac{1}{\mu_0\omega_0}\bar{K}_i\times\bar{E}_{il}.$$

Ezek alapján a (49) rot és div egyenletek egyaránt átírhatók és f_{il} könnyebben határozható meg. Azonban már a jelenlegi alakból is sok értékes információ nyerhető. Azonnal belátható például, hogy $\partial f_{il}/\partial t\equiv 0$, vagy $\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\equiv 0$ esetben érdemben a (4) megoldást kapjuk vissza.

Ezek után a csoportsebességet — így, közvetlenül a Maxwell-egyenletekből levezetve — a

$$|v_{gil}|=\left|\frac{\partial f_{il}}{\partial t}\right|\Big/|\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}|, \tag{50}$$

adja meg, mivel most a_{il}-t perturbáltuk. (Gyorsan kaphatunk érdekes eredményeket, ha $\bar{\bar{\varepsilon}}$, stb. inhomogenitását úgy választjuk, hogy ismert megoldásokkai rendelkező differenciálegyenlet-típusokhoz jussunk. [18])

Mivel ez az elemzési mód még szokatlan, a továbbiakban nézzük meg néhány egyszerűbb, de fontos eset konkrét eredményeit.

4.3. A csoportsebesség lineáris, homogén közegben

A közeg homogén

$$\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\varepsilon}}}=\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\varkappa}}}=\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\lambda}}}=\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\mu}}}=0.$$

Továbbá homogén közegben az alapjel — (4) — is állandó, tekintve monokromatikus voltát stb. [1]. A jel stacioner, azaz $\overline{\overline{\nabla}}_{tE0il}=0$ stb. teljesül; amiből $\overline{\nabla}_{rH0il}=0$ stb. következik ez esetben. (49) átírható és néhány vektoralgebrai átalakítást is végrehajtva

$$\sum_{i,l}(1+f_{il})\,\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{H}}_{il}=-\frac{1}{\omega_0}\sum_{i,l}(1+f_{il})\frac{\partial f_{il}}{\partial t}\overline{\mathrm{K}}_i\times\overline{\mathrm{H}}_{il}$$

$$\sum_{i,l}(1+f_{il})\,\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{E}}_{il}=-\frac{1}{\omega_0}\sum_{i,l}(1+f_{il})\frac{\partial f_{il}}{\partial t}\overline{\mathrm{K}}_l\times\overline{\mathrm{E}}_{il}$$

$$\sum_{i,l}[(1+f_{il})\,\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{H}}_{il}]\overline{\mathrm{K}}_i=0 \qquad (51)$$

$$\sum_{i,l}[(1+f_{il})\,\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{E}}_{il}]\overline{K}_l=0,$$

tetszőleges bianizotóp esetben! Tudjuk továbbá, hogy $f_{il}\ll 1$. Ezért (51) igen pontosan megfelel az alábbi egyenleteknek:

$$\sum_{i,l}\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{H}}_{il}=-\sum_{i,l}\frac{\partial f_{il}}{\partial t}\frac{\overline{\mathrm{K}}_i}{\omega_0}\times\overline{\mathrm{H}}_{il}$$

$$\sum_{i,l}\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{E}}_{il}=-\sum_{i,l}\frac{\partial f_{il}}{\partial t}\frac{\overline{\mathrm{K}}_i}{\omega_0}\times\overline{\mathrm{E}}_{il}$$

$$\sum_{i,l}(\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{H}}_{il})\overline{\mathrm{K}}_i=0$$

$$\sum_{i,l}(\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}\times\overline{\mathrm{E}}_{il})\overline{\mathrm{K}}_l=0. \qquad (52)$$

Mivel $(\overline{\mathrm{E}}_{il},\ \overline{\mathrm{H}}_{il})$ ismert, létező, nem triviális megoldásai a Maxwell-egyenleteknek, tudjuk [1], hogy például:

$$\overline{\mathrm{E}}_{il}=-\frac{1}{\varepsilon_0\omega_0}\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\overline{\overline{\mathrm{K}}}_i+\omega_0 e_0\bar{\bar{\varkappa}})\overline{\mathrm{H}}_{il}=\bar{\bar{\alpha}}_i\overline{\mathrm{H}}_{il},$$

ahol:

$$\overline{\overline{\mathrm{K}}}_i\bar{\mathrm{u}}=\overline{\mathrm{K}}_i\times\bar{\mathrm{u}} \quad \text{és} \quad \bar{\bar{\alpha}}_i\neq\bar{\bar{\mathrm{I}}}.$$

Tehát $\overline{\mathrm{E}}_{il}\not\parallel\overline{\mathrm{H}}_{il}$ stb. Ezzel lehetővé vált bármelyik konkrét esetben v_g meghatározása. Általánosan nem léphetünk tovább, mert az inhomogén alapmódusok között fellépő „csatolás" minden konkrét feladat sajátságaitól függ.

A peremfeltételeket is figyelembe véve adódik a teljes hullámkép a perturbációval együtt, s ebből az adott — homogén — esetben (szabadtéri terjedéstől a csőtápvonalakig) az energia terjedési sebessége a vizsgált monokromatikus jelben.

Speciális esetek:

a) Homogén esetben az inhomogén alapmódusok általában ortogonális, függetlenül terjedő módusokat jelentenek, például [7]. Ezt feltételezve (52)-ből a függetlenül terjedő módusokra, illetve az egymódusú jelre ($i\equiv 1$) adódik,

hogy

$$\overline{\mathrm{E}}_{il}\not\parallel\overline{\mathrm{H}}_{il} \quad \text{miatt} \quad \overline{\mathrm{grad}\,f_{il}}\parallel\overline{\mathrm{K}}_i, \qquad (53)$$

és az egyenletek l mindkét esetére nézve azonosak, mivel K_i azonos, l-től független. Tehát $f_{iv}\equiv f_{ik}\equiv f_i$, vagy

$$f_{ik}=0.$$

Innen:

$$\overline{\mathrm{grad}}\,f_i+\frac{\overline{\mathrm{K}}_i}{\omega_0}\frac{\partial f_i}{\partial t}=0. \qquad (54)$$

Tehát

$$\frac{\overline{\mathrm{grad}}\,f_i}{(-\partial f_i/\partial t)}=\frac{\overline{\mathrm{K}}_i}{\omega_0} \quad \text{és} \quad \frac{|\overline{\mathrm{grad}}\,f_i|}{|\partial f_i/\partial t|}=\frac{\mathrm{K}_i}{\omega_0}$$

vagyis ebben az esetben

$$v_{gi}\equiv v_{fi} \quad \text{és} \quad \overline{\mathrm{v}}_{gi}\parallel\overline{\mathrm{v}}_{fi} \qquad (55)$$

ahol

$$v_{fi}=\omega_0/\mathrm{K}_i \quad \text{és} \quad \overline{\mathrm{v}}_{fi}\parallel\overline{\mathrm{K}}_i.$$

b) Egyetlen, önmagában terjedő módus esetén ($i\equiv 1$) külön feltételek nélkül is mindig (55) adódik.

Állítás:

A fázis és a csoportsebesség monokromatikus síkhullámban még bianizotróp esetben is azonos!

4.4. Megjegyzés a mozgó közegekben való terjedéshez

A *4.3.* pontot lezáró állításnak alapvető, elvi jelentősége van a mozgó közegekben való elektromágneses hullámterjedésre vonatkozó vizsgálatokban.

Közismert és máig véglegesen lezártnak nem tekinthető kérdés, hogy a homogén, mozgó közegekben terjedő monokromatikus síkhullám fázissebessége még a legegyszerűbb esetben sem ($\bar{\bar{\varepsilon}}=e\bar{\bar{\mathrm{I}}}$, $\bar{\bar{\varkappa}}=\bar{\bar{\nu}}=\bar{\bar{0}}$, $\bar{\bar{\mu}}=\bar{\bar{\mathrm{I}}}$) követi az Einstein-féle sebességtranszformációt [9—12].

Az ellentmondás feloldására számos kísérlet történt, amelyek e specifikus fizikai jelenség energiaimpulzus tenzorának analízisén alapultak, és amelyek szerint ez esetben a fázissebesség nem azonos a csoportsebességgel, $v_g\neq v_f$ [12—14].

Más vizsgálatokban viszont a Maxwell-egyenletekből kiindulva [15—17] a terjedés tárgyalásánál formálisan a „sebesség-paramétert" is tartalmazó bianizotróp közegjellemzőket vezetnek be és a mozgó közeget bianizotróp „álló" közeggel ekvivalens módon kezelik. Például:

Ha a V sebességgel $+x$ irányban mozgó közeggel együttmozgó rendszerben (K') — és c a fénysebesség vákuumban —

$$\overline{\mathrm{D}}'=\varepsilon\overline{\mathrm{E}}' \quad \text{és} \quad \overline{\mathrm{B}}'=\overline{\mathrm{H}}'$$

akkor a laboratóriumi rendszerben (K)

$$\overline{\mathrm{D}}=\varepsilon\bar{\bar{\mathrm{A}}}\overline{\mathrm{E}}+\bar{\bar{\mathrm{B}}}\overline{\mathrm{H}} \quad \text{és} \quad \overline{\mathrm{B}}=\bar{\bar{\mathrm{A}}}\overline{\mathrm{H}}-\bar{\bar{\mathrm{B}}}\overline{\mathrm{E}} \qquad (56)$$

ahol:

$$\bar{\bar{A}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{bmatrix};\qquad \bar{\bar{B}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -B\\ 0 & B & 0\end{bmatrix};$$

$$A=\frac{1-V^2/c^2}{1-eV^2/c^2};\qquad B=\frac{V}{c}\,\frac{e-1}{1-eV^2/c^2}.$$

Ezzel egyidőben formálisan eltűnik e tárgyalásból az $\bar{E}(\bar{E}')$ stb. kapcsolat. Így nemcsak a Doppler-effektust stb. tüntetik el, illetve figyelembe vételét tetszőlegessé minősítik — mint arról már korábban szóltunk [5] — hanem biztosan ellentmondásba kerülnek az energia-impulzus tenzoron alapuló vizsgálatokkal a csoportsebesség szempontjából.

Ennek oka, hogy az (56)-nak megfelelően és más esetekben analóg módon kiadódó bianizotróp közegjellemzők függetlenek a jelparaméterektől, szigorúan lineáris, bianizotróp kapcsolatot adnak.

Ekkor pedig (55) alapján biztos, hogy $v_g=v_f$!

Állítás:

A mozgó közegek esetén a fázis és csoportsebesség transzformációja miatt már korábbról ismert problémát a jelen vizsgálat hangsúlyozottá teszi. Feloldása elvi jelentőségű és nem tehető meg a hullámkép — az előzőek alapján triviálisan geometriai típusú — sajátosságainak figyelembe vétele nélkül. (Az ellentmondás feloldását más cikkben adjuk meg.)

4.5. Kiegészítések

a) A homogén közegben terjedő jel elemi perturbációjának haladását egyetlen monokromatikus síkhullám (egyetlen terjedő módus) esetén más formában is meg lehet adni, (44) alapján.

Legyen például e és μ a közeg jellemzője. Ekkor az elemi perturbáció végigfutását a jelen az alábbiak szerint kaphatjuk meg:

Az alapmegoldás kielégíti a

$$K^2=k_0^2e\mu$$

diszperziós egyenletet, ahol $k_0^2=\omega_0^2\varepsilon_0\mu_0$. Így a csoportsebességet, amely a jel valamilyen elemi perturbációjának a haladását adja, az alábbi egyenletből nyerhetjük:

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{\nabla}}_{rH_0}\bar{H}=\varepsilon_0 e\bar{\bar{\nabla}}_{tE_0}\bar{E}\\
&\bar{\bar{\nabla}}_{rE_0}\bar{E}=-\mu_0\mu\bar{\bar{\nabla}}_{tH_0}\bar{H}\\
&\langle\bar{\bar{\nabla}}_\mu\bar{H}\rangle=0\\
&\langle\bar{\bar{\nabla}}_\varepsilon\bar{E}\rangle=0,
\end{aligned}\tag{57}$$

és figyelembe kell venni a peremfeltételeket is! Más esetre hasonló egyenletek írhatók fel. Innen, például x irányú terjedésre:

$$\frac{\partial H_0}{\partial x}=-k_0\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial H_0}{\partial t}\tag{58}$$

egyenlet jelenti a perturbáció haladását, azaz — természetes módon — (54) egy speciális esetéhez jutottunk. Polarizációingazodás stb. közvetlen vizsgálatára (57) sokszor kedvezőbb.

b) Az eddigiek alapján e vizsgálatok továbbfejleszthetők. Célszerű például a periodikus vagy hatvány függvényekkel leírható inhomogén esetekre, néhány fontos peremfeltételre (csőtápvonalak) is megvizsgálni a csoportsebesség alakulását. Fontos arra tekintettel lenni, hogy az elemi perturbáció végigfutása a teljes interferencia képen az inhomogén alapmódusokon való terjedés eredője. Tehát nem az inhomogén alapmódusokon való elemi perturbációterjedés meghatározása a cél, az csak a fentiek szerint jól használható út.

5. Csoportsebesség diszperzív közegekben

Ebben az esetben is a (44) egyenletekből indulunk ki. Figyelembe vesszük azonban, hogy ekkor a szereplő közegjellemzők (46) szerintiek (44)-ben, míg (46*a*) szerinti „alapértékükkel" szerepelnek a (47) és (48) egyenletekben!

Tekintve, hogy számos szempontból a vizsgálat elvileg is új, ezért a részletes kifejtés, az áttekinthetőség és az eredmények összehasonlíthatóságának biztosítása érdekében szorítkozzunk a továbbiakban az egy terjedő módusú esetek vizsgálatára. Emellett tudjuk, hogy a 4. pontban látottakkal analóg módon az eredmények általánosíthatók.

E vizsgálatok módszereit és eredményeit felhasználva választ adhatunk a diszperzív közegekben a hullámfront-felépülés kérdésére, a nyalábkialakulás menetére, stb. E kérdések sok helyen (whistler terjedési út vizsgálatok, lézer-fénynyaláb haladása, stb.) alapvetően fontosak.

5.1. Az egyenletek diszperzív esetekben

Az előzőek szerint, néhány célszerű átalakítást elvégezve, az egyenleteink a következő alakúak lesznek:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,l}\{f_{il}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})\times\bar{H}_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{TH0il}\bar{H}_{il}]+\\
&\qquad+[\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}-j\bar{K}_i]\times\bar{H}_{il}(1+f_{i.})\}=\\
&\qquad=\varepsilon_0\sum_{i,l}(1+f_{il})\left[\left(\frac{\partial\bar{\bar{\varepsilon}}^*}{\partial t}\bar{E}_{il}+\frac{\partial\bar{\bar{\varkappa}}^*}{\partial t}\bar{H}_{il}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial f_{il}}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{e}}^*\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}^*\bar{H}_{il})\right],\\
&\sum_{i,l}\{f_{il}[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{al})\times\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\nabla}}_{TE0il}\bar{E}_{il}]+\\
&\qquad+[\mathrm{grad}\,f_{il}-j\bar{K}_i]\times\bar{E}_{il}(1+f_{il})\}=\\
&\qquad=-\mu_0\sum_{i,l}(1+f_{il})\left[\left(\frac{\partial\bar{\bar{\nu}}^*}{\partial t}\bar{E}_{il}+\frac{\partial\bar{\bar{\mu}}^*}{\partial t}\bar{H}_{ii}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial f_{il}}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{\nu}}^*\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}^*\bar{H}_{il})\right],
\end{aligned}\tag{59}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,l}\{[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})+\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}-j\bar{K}_l]\cdot\\
&\cdot(e^*\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}^*\bar{H}_{il})(1+f_{il})+[(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varepsilon}}^*}\bar{E}_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\varkappa}}^*}\bar{H}_{il})+
\end{aligned}$$

$$+(\langle\bar{\nabla}^*_{\varepsilon il}\bar{\bar{E}}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}^*_{\varkappa il}\bar{H}_{il}\rangle)](1+f_{il})\}=0,$$

$$\sum_{i,l}\{[\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})+\overline{\mathrm{grad}}\,f_{il}-f\bar{K}_i]\cdot$$

$$\cdot(\bar{\bar{\nu}}^*\bar{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}^*\bar{H}_{il})(1+f_{il})+[(\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\nu}}^*}\bar{E}_{il}+\bar{\nabla}_{\bar{\bar{\mu}}^*}\bar{H}_{il})+$$

$$+(\langle\bar{\bar{\nabla}}^*_{\nu il}\bar{E}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\nabla}}^*_{\mu il}\bar{H}_{il}\rangle)](1+f_{il})\}=0,$$

ahol a * jelentését (46) adja. (59)-ből kiindulva a fontos vagy érdekes gyakorlati esetekben, ha ismerjük az arra az esetre érvényes * közegjellemzőket, a csoportsebesség vizsgálható.

a) A számunkra a továbbiakban az egy módusú (homogén) esetek a fontosak. (59)-ből adódik, hogy ekkor:

$$(\overline{\mathrm{grad}}\,f-f\bar{K})\times\bar{H}=\varepsilon_0\left[\left(\frac{\partial\bar{\bar{\varepsilon}}^*}{\partial t}\bar{E}+\frac{\partial\bar{\bar{\varkappa}}^*}{\partial t}\bar{H}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{\varepsilon}}^*\bar{E}+\bar{\bar{\varkappa}}^*\bar{H})\right]$$

$$(\overline{\mathrm{grad}}\,f-f\bar{K})\times\bar{E}=-\mu_0\left[\left(\frac{\partial\bar{\bar{\nu}}^*}{\partial t}\bar{E}+\frac{\partial\bar{\bar{\mu}}^*}{\partial t}\bar{H}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{\nu}}^*\bar{E}+\bar{\bar{\mu}}^*\bar{H}\right]$$

$$[(\overline{\mathrm{grad}}\,f-f\bar{K})+\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a-j\varphi_a)](\bar{\bar{\varepsilon}}^*\bar{E}+\bar{\bar{\varkappa}}^*\bar{H})=0$$

$$[(\overline{\mathrm{grad}}\,f-f\bar{K})+\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a-j\varphi_a)](\bar{\bar{\nu}}^*\bar{E}+\bar{\bar{\mu}}^*\bar{H})=0 \tag{60}$$

Látható, hogy mindenekelőtt a * közegjellemzők analízisét kell elvégezni, tekintve, hogy ezek ismerete nélkül érdemben továbblépni nem lehet.

Ha feltesszük, hogy $\partial\bar{\bar{\varepsilon}}^*/\partial t=0$ stb. teljesül, és figyelembe vesszük, hogy stacioner, homogén megoldásban $\overline{\mathrm{grad}}\,(\ln a-j\varphi_a)=0$, akkor látszik, hogy a két második egyenlet automatikusan kielégül. Így:

$$(\overline{\mathrm{grad}}\,f-f\bar{K})\times\bar{H}=\varepsilon_0\left(\frac{\partial f}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{\varepsilon}}^*\bar{E}+\bar{\bar{\varkappa}}^*\bar{H})$$

$$(\overline{\mathrm{grad}}\,f-f\bar{K})\times\bar{E}=-\mu_0\left(\frac{\partial f}{\partial t}+j\omega_0\right)(\bar{\bar{\nu}}^*\bar{E}+\bar{\bar{\mu}}^*\bar{H}) \tag{61}$$

Legyen továbbá

$$\omega_f=f'+j\omega_0;$$

$$f'=\partial f/\partial t;$$

$$\bar{\bar{K}}_f\bar{u}=(\overline{\mathrm{grad}}\,f-f\bar{K})\times\bar{u}=(\bar{\bar{\mathcal{F}}}-f\bar{\bar{K}})\bar{u} \tag{62}$$

Ekkor (61) a szokásos módon [5] átalakítható, $\bar{E}$-re, vagy $\bar{H}$-ra kifejthető. $\bar{E}$-re kifejtve:

$$[(\bar{\bar{K}}_f-\varepsilon_0\omega_f\bar{\bar{\varkappa}}^*)\bar{\bar{\mu}}^{*-1}(\bar{\bar{K}}_f+\mu_0\omega_f\bar{\bar{\nu}}^*)+\varepsilon_0\mu_0\omega_f^2\bar{\bar{\varepsilon}}^*]\bar{E}=0. \tag{63}$$

A $\bar{H}$-ra kifejtett alak ekvivalens értékű, újat nem mond [5].

Fontos azonban itt észrevenni, hogy (63)-hoz nem rendelhetünk diszperziós egyenletet. $\bar{E}$ és $\bar{H}$ ugyan nem nulla, de más diszperziós egyenlet sajátértékéhez tartozó megoldást jelentenek. Tehát esetünkben $\bar{E}$ adott és a [ ]-ben levő tenzorra kell ennek fényében megállapításokat tenni.

Ezért tovább alakítjuk (63)-at és figyelembe vesszük, hogy $\bar{E}$ (analóg módon $\bar{H}$) milyen eredeti diszperziós egyenlet által leírt megoldás. Továbbá figyelembe vesszük, hogy f és f változásai csak igen kicsinyek lehetnek, így szorzatuk elhanyagolható, másodrendűen kicsiny mennyiségnek minősül.

Ekkor:

$$\{f[(\bar{\bar{K}}+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varkappa}}^*)\bar{\bar{\mu}}^{*-1}(\bar{\bar{\mathcal{F}}}+\mu_0f'\bar{\bar{\nu}}^*)-k_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}f'\bar{\bar{\varepsilon}}^*]+$$

$$+j[(\bar{\bar{\mathcal{F}}}-\varepsilon_0f'\bar{\bar{\varkappa}}^*)\bar{\bar{\mu}}^{*-1}(\bar{\bar{K}}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}}^*)-k_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}f'\bar{\bar{\varepsilon}}^*]+$$

$$+[(\bar{\bar{K}}+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varkappa}}^*)\bar{\bar{\mu}}^{*-1}(\bar{\bar{K}}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}}^*)+k_0^2\bar{\bar{\varepsilon}}^*]\}\bar{E}=0. \tag{64}$$

Ezen egyenlettel is, mint az előzőekben is minden lépésnél, olyan alakhoz jutottunk, hogy érdemi diszkussziója a *-gal jelölt közegjellemzők pontos ismeretét igényli.

b) Mielőtt erre rátérnénk, ellenőrzésként nézzük meg a (64) egyenlet megoldását nem-diszperzív esetben. Ekkor $\bar{\bar{\varepsilon}}^*=\bar{\bar{\varepsilon}}$ stb. Ezen túlmenően az ω_0-f' nem 0 és nem ∞ mennyiséggel szorozzuk végig az egyenletet. Így

$$\left[(\bar{\bar{K}}+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varkappa}})\bar{\bar{\mu}}^{-1}\left(\omega_0\frac{\bar{\bar{\mathcal{F}}}}{-f'}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\omega_0\frac{\bar{\bar{\mathcal{F}}}}{-f'}+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varkappa}}\right)\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\bar{\bar{K}}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}})+2k_0^2\bar{\bar{\varepsilon}}\right]\bar{E}=0. \tag{65}$$

Ismerve, hogy $\bar{E}$ korábbi megoldás, amely a [5]

$$[(\bar{\bar{K}}+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varkappa}})\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\bar{\bar{K}}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}})+k_0^2\bar{\bar{\varepsilon}}]\bar{E}=0$$

egyenlethez tartozik a kiadódó $\bar{K}$, illetve φ sajátérték és sajátfüggvény mellett, (65) csak úgy teljesülhet bármelyik létező $\bar{E}$ esetén, ha

$$\omega_0\left(\frac{\bar{\bar{\mathcal{F}}}}{-f'}\right)=\bar{\bar{K}}, \tag{66}$$

ami (54)-gyel azonos állítás.

5.2. A perturbált közegjellemzők

Általános vizsgálatokra nem vállalkozunk e cikk keretében. A számunkra szemléletesnek és fontosnak tűnő esetek közül három konkrét példát ragadunk ki.

a) Semleges gáz és izotróp, ionizált gáz egyszerű közelítése:

— Semleges gáz egyszerű közelítése:

A szokásos módon ekkor feltesszük, hogy $\bar{\bar{\varkappa}}=\bar{\bar{\nu}}=\bar{\bar{0}}$, $\bar{\bar{\mu}}=\bar{\bar{1}}$ és $\bar{\bar{\varepsilon}}=\varepsilon\bar{\bar{1}}$, ahol $\varepsilon=n^2$ és n a törésmutató. Ilyen esetben a gázt szokásosan nem tekintjük diszperzívnek.

Tehát:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega_0}\equiv 0,$$

és ugyanennek a következtében

$$\varepsilon^*\equiv\varepsilon \tag{67}$$

— Izotróp, ionizált gáz egyszerű közelítése:

Most sem törődünk a közegjellemző tényleges szerkezetével, hanem a már ismert [6 stb.] eredményeket átvéve feltesszük, hogy $\bar{\bar{\varkappa}}=\bar{\bar{\nu}}=\bar{\bar{0}}$, $\bar{\bar{\mu}}=\bar{\bar{1}}$ és $\bar{\bar{\varepsilon}}=\varepsilon\bar{\bar{1}}$, ahol:

$$\varepsilon\leqq 1, \quad \text{azaz} \quad \varepsilon=1-\varepsilon.$$

Tekintve, hogy $\varepsilon\cong\omega_p^2/\omega_0^2$, ahol ω_p a plazma frekvencia [4, 6 stb.] és (62)-t is ismerjük:

$$\varepsilon^*=1-\frac{\omega_p^2}{(\omega_0-jf')^2}\cong\varepsilon-j2\varepsilon\frac{f'}{\omega_0}, \tag{68}$$

— Ezen egyszerű közelítések összehasonlító vizsgálódásra lesznek jók. Azonban a közegjellemzők pontos analízise érdekesebb összefüggéseket tár fel.

b) Semleges gáz pontos analízise:

Egyszerű semleges gázban tudjuk, hogy $\bar{\bar{\varkappa}}=\bar{\bar{\nu}}=\bar{\bar{0}}$, $\bar{\bar{\mu}}=\bar{\bar{1}}$. A permittivitás meghatározásához pedig a polarizáció esetén fellépő mozgásegyenletből indulunk ki. Közismert, hogy:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}=-a\bar{r}+q\bar{E},$$

ahol m a részecske tömege, $\bar{v}$ a sebesség, a a rugalmas visszahúzó erő jellemző állandója (kis kitérésekről van szó) és q a töltés. Tehát:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}+\frac{a}{m}\bar{r}=\frac{q}{m}\bar{E}, \tag{69}$$

és az állapot stacioner volta miatt csak az időben állandósuló megoldás érdekel bennünket. $\bar{E}=\bar{E}_0e^{j\omega_0t}$

$$\bar{r}=\bar{A}e^{j\sqrt{\frac{a}{m}}t}+\frac{q}{m}\bar{E}_0\frac{1}{\frac{a}{m}-\omega_0^2}e^{j\omega_0t},$$

ahol (a stacioner állapot miatt) jogos az $\bar{A}\equiv 0$ megoldás elfogadása a szokásos módon. Innen, mivel

$$\bar{D}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int^t\bar{J}\,dt+\bar{E},$$

[5], adódik

$$\bar{D}=\left[1+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q^2N}{a-m\omega_0^2}\right]\bar{E}_0e^{j\omega_0t},$$

ahol $\bar{J}$ az áramsűrűség, N a részecskesűrűség.

Tehát:

$$\varepsilon=1+\frac{q^2N}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\frac{a}{m}-\omega_0^2}. \tag{70}$$

Fontos: Amíg $\omega_0^2\ll a/m$, addig

$$\varepsilon\cong 1+\frac{q^2N}{\varepsilon_0 a}=\text{állandó}. \tag{70a}$$

Azonban a rezonancia környékén, illetve felette a közeg diszperzív lesz. Ekkor például, ha $\omega_0^2\gg a/m$, akkor:

$$\varepsilon\cong 1-\frac{q^2N}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2}. \tag{70b}$$

Ezért általános esetben, semleges gázban $\varepsilon^*\neq\varepsilon$!

A perturbált ε^* meghatározásakor $\bar{E}^*=(1+f)\bar{E}_0\varepsilon^{j\omega_0t}$ gerjesztő térrel számolunk. (69) megoldását próbáljuk meg a (61) és (62) egyenletek sugallta alakban keresni, azaz $\bar{r}^*$-ban $\bar{A}=0$ és $\omega_0\to\omega_0^*=\omega_0\left(1+\frac{f'}{j\omega_0}\right)$ helyettesítéssel éljünk. Belátható, hogy a

$$\frac{d^2\bar{v}^*}{dt^2}+\frac{a}{m}\bar{r}^*=\frac{q}{m}\bar{E}^*,$$

egyenletnek az

$$\bar{r}^*=\frac{q}{m}\frac{(1+f)\bar{E}_0}{\frac{a}{m}-\omega_0^2\left(1+\frac{f'}{j\omega_0}\right)^2}\varepsilon^{j\omega_0t},$$

stacioner megoldása, ha

$$\partial\omega_0^*/\partial t=0.$$

$$\partial\omega_0^*/\partial t=-jf''\cong 0, \tag{71}$$

a korábban tett feltevéseink értelmében. Az ellenőrzésnél a másodrendűen kicsiny mennyiségeket elhanyagoljuk.

Tehát a linearitás diszperzív esetben (az adott példában) nem a jel paramétereitől való teljes függetlenséget jelenti, hanem az általános értelemben vett frekvenciától (ω_0^*) való függés mellett a (71) egyenlet teljesülését! Ez esetben a diszperzív, semleges gáz még lineáris.

Így:

$$\varepsilon^*=1+\frac{q^2N}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\frac{a}{m}-\omega_0^2\left(1+\frac{f'}{j\omega_0}\right)^2} \tag{72}$$

(70) és (72) felhasználásával analizálni fogjuk a v_g alakulását semleges gázban.

Fontos: Pontosabb vizsgálatokban sem a belső veszteségek, sem a több gázkomponens hatása nem hanyagolható el, sem az $\bar{A}=0$ feltétel nem érvényesíthető (legalábbis külön elemzés nélkül — lásd a *3.1.* pont utolsó megjegyzését).

c) Anizotróp plazma analízise:

Tudjuk, hogy anizotróp plazmában $\bar{\bar{\varkappa}}=\bar{\bar{\nu}}=\bar{\bar{0}}$, és $\bar{\bar{\mu}}=\bar{\bar{1}}$, továbbá a permittivitás $\bar{\bar{\varepsilon}}$ [6, 7]. Ezen túlmenően

$$\bar{D}=\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int^t\bar{J}\,dt+\bar{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int^t\bar{\bar{\sigma}}\bar{E}\,dt+\bar{E},$$

ahol $\bar{\bar{\sigma}}$ a vezetés tenzora [5].

— A nem-perturbált permittivitás:

A szokásos módon [6, 7], temperált plazmában, az ütközési tagokat elhanyagolva, figyelembe véve, hogy a pozitív részecskék és a negatív részecskék (elektronok) tömege sok nagyságrenddel eltér

($m_+ \gg m_-$) és az anizotrópiát okozó mágneses tér a jelhez képest állandó, azaz

$$\frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} \cong 0 \ll \frac{\partial \bar{E}}{\partial t},$$

akkor a mozgásegyenlet, amit csak az elektronokra kell felírnunk ezen egyszerűbb közelítésben

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}_0),$$

$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{j\omega_0 t}$ és csak stacioner megoldást keresünk. Ezért:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 e^{j\omega_0 t}, \quad d\bar{v}/dt = j\omega_0 \bar{v}$$

feltételezéssel élünk. (Itt is érvényes az *5.2b* pont zárómegjegyzése.) Legyen továbbá:

$$-\frac{q}{m}\bar{B}_0 \times \bar{v} = \bar{\omega}_b \times \bar{v} = \bar{\bar{\Omega}}_B \bar{v}.$$

Így:

$$(j\omega_0 \bar{\bar{1}} - \bar{\bar{\Omega}}_B)\bar{v} = \frac{q}{m}\bar{E} \quad \text{és}$$

$$\bar{J} = \frac{q^2 N}{m}(j\omega_0 \bar{\bar{1}} - \bar{\bar{\Omega}}_B)^{-1}\bar{E} = qN\bar{v}.$$

Az irodalomban leghasználatosabb [2–8] $\bar{B}_0(0, 0, B_0)$ koordinátarendszer-választással éljünk. Ekkor

$$\bar{J} = \frac{q^2 N}{m}\begin{bmatrix} j\omega_0 & -\omega_b & 0 \\ \omega_b & j\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega_0 \end{bmatrix}^{-1} \bar{E} = \frac{q^2 N}{m}\bar{\bar{I}}^{-1}\bar{E} \quad (73)$$

Elvégezve (73) kifejtését és figyelembe véve az előzőek alapján, hogy

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J} + j\omega_0 \varepsilon_0 \bar{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}}{\partial t},$$

adódik, hogy:

$$\bar{J} + j\omega_0\varepsilon_0\bar{E} = j\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E} = j\omega_0\varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_\perp & -j\varepsilon_x & 0 \\ j\varepsilon_x & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{bmatrix} \bar{E}, \quad (74)$$

ahol a tett feltevések mellett:

$$\varepsilon_\perp = 1 - \frac{\alpha^2}{1-\beta^2}; \qquad \alpha^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_P^2} = \frac{q^2 N}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2};$$

$$\varepsilon_\parallel = 1 - \alpha^2; \qquad \beta = \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{qB_0}{m\omega_0}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{\alpha^2\beta}{1-\beta^2};$$

Látható, hogy $\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}(\omega_0)$, a közeg anizotróp és diszperzív.

— A perturbált permittivitás:

A fentiekkel teljesen analóg utat járjunk végig az $\bar{E}^* = (1 + f)\bar{E}_0 e^{j\omega_0 t}$ gerjesztés esetén. A megoldandó egyenlet ekkor:

$$\left(\frac{d}{dt}\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{\Omega}}_B\right)\bar{v}^* = \frac{q}{m}\bar{E}^*. \quad (75)$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{d\bar{E}^*}{dt} \cong j\omega_0\left(1 + \frac{f'}{j\omega_0}\right)\bar{E}^* = j\omega_0^*\bar{E}^*,$$

valamint a nem-perturbált eset levezetésének részeredményeit. Ezek alapján keressük a megoldást a

$$\frac{d}{dt} \to j\omega_0^* \quad (76)$$

operátorcserével, vagyis a $\bar{v}^* = \bar{v}_0^* e^{j\omega_0 t}$ hipotézissel tudva, hogy $\bar{v}^*$ ugyanúgy nem állandó, mint $(1 + f)\bar{E}_0$. Ez az út járható, ha teljesül a

$$\left(\frac{d}{dt}\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{\Omega}}_B\right)\bar{v}^* = \frac{q}{m}(1 + f)\bar{E}_0 e^{j\omega_0 t} \quad (77)$$

egyenlet

$$\bar{v}_0^* = \frac{q}{m}(j\omega_0^*\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{\Omega}}_B)^{-1}(1 + f)\bar{E}_0$$

mellett.

Innen:

$$\bar{\bar{I}}^{*-1} = \frac{1}{j\omega_0^*(\omega_b^2 - \omega_0^{*2})}\begin{bmatrix} -\omega_0^{*2} & -j\omega_0^*\omega_b & 0 \\ j\omega_0^*\omega_b & -\omega_0^{*2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_b^2 - \omega_0^{*2} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Ezeket felhasználva ellenőrizhető, hogy a

$$\bar{v}^* = \frac{q}{m}\bar{\bar{I}}^{*-1}(i + f)\bar{E}_0 e^{j\omega_0 t} \quad (79)$$

megoldása-e az eredeti (75) egyenletünknek. Behelyettesítés és kifejtés után

$$\frac{\partial \bar{\bar{I}}^{*-1}}{\partial t} + (j\omega_0^*\bar{\bar{1}} - \bar{\bar{\Omega}}_B)\bar{\bar{I}}^{*-1} = \bar{\bar{1}}. \quad (80)$$

(78)-ból látható, hogy $\bar{\bar{I}}^{*-1}$-ben csak ω_0^* az időfüggő és (71) alapján a korábban tett feltevésekkel összhangban

$$\partial\omega_0^*/\partial t \cong 0.$$

Hiszen e vizsgálatok elvégzésével alapfeltételei között szerepelt az $f \ll 1$, $f \ll \omega_0$ is.

Állítás: Az anizotróp (homogén) plazma addig tekinthető lineárisan diszperzív közegnek, amíg a

$$\frac{\partial \bar{\bar{I}}^{*-1}}{\partial t} \cong 0 \quad (81a)$$

feltevéssel a (80) egyenletben élhetünk. Ez a linearitás feltétele!

Ekkor viszont (80) az $\bar{\bar{I}}^*\bar{\bar{I}}^{*-1} \equiv \bar{\bar{1}}$ azonossággá válik, s így (79) megoldása (75)-nek.

Tehát $\bar{\bar{\varepsilon}}^*$ formailag azonos a (74)-ben megadott $\bar{\bar{\varepsilon}}$-nal, csak az $\omega_0 \to \omega_0^* = \omega_0(1 + f'/j\omega_0)$ cserét kell alkalmazni.

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^* = \bar{\bar{\varepsilon}}(\omega_0 \to \omega_0^*) \quad (81b)$$

d) Megjegyzés: Jelen pontban az $\bar{\bar{\varepsilon}}^*$ meghatározásán kívül sikerült objektív kritériumot adni, hogy a jel időbeli változásait leíró paraméterektől függő közegjellemzők mennyiben és milyen határokon belül tekinthetők lineárisnak.

5.3. A csoportsebesség diszperzív esetekben

Az *5.2.* pontban meghatározott közegjellemzők felhasználásával nézzük meg e gyakorlatilag is fontos esetekben a monokromatikus, egy módusú jelben a v_g alakulását. A kapott eredmények bármilyen irányban — más homogén közeg, inhomogén közeg, diszperzív távvezeték stb. — könnyen általánosíthatók.

Az *5.2.* pontban olyan eseteket szemeltünk ki példaként, ahol $\overline{\overline{\varkappa}}=\overline{\overline{\nu}}=\overline{\overline{0}}$ és $\overline{\overline{\mu}}=\overline{\overline{1}}$, azaz $\overline{\overline{\varkappa}}^*=\overline{\overline{\nu}}^*=\overline{\overline{0}}$ és $\overline{\overline{\mu}}^*=\overline{\overline{1}}$ egyidejűleg. Innen kiindulva (64) egyenletünk új alakja, (65*a*)-t is felhasználva:

$$\left[\overline{\overline{K}}\,\overline{\overline{\mathcal{F}}}+\overline{\overline{\mathcal{F}}}\,\overline{\overline{K}}-2k_0^2\frac{f'}{\omega_0}\overline{\overline{\varepsilon}}^*-jk_0^2(\overline{\overline{\varepsilon}}^*-\overline{\overline{\varepsilon}})\right]\overline{E}=0. \quad (82)$$

Figyelembe véve, hogy $k_0^2=\omega_0^2/c^2$, értelemszerű rövidítésekkel élve és tudva, hogy $\overline{\overline{K}}=k_0\overline{\overline{\mathcal{K}}}$ megengedett és célszerű átírás [1, 5], legyen.

$$\overline{\overline{\mathcal{K}}}\,\overline{\overline{\mathcal{F}}}+\overline{\overline{\mathcal{F}}}\,\overline{\overline{\mathcal{K}}}=\overline{\overline{k}}_{KF}.$$

Innen (82), ha

$$\overline{\overline{A}}_\varepsilon=2(-f')\overline{\overline{\varepsilon}}^*-f\omega_0(\overline{\overline{\varepsilon}}^*-\overline{\overline{\varepsilon}})$$

akkor a

$$\left(\overline{\overline{k}}_{KF}+\frac{1}{c}\overline{\overline{A}}_\varepsilon\right)\overline{E}=0 \quad (83)$$

egyenlet határozza meg a csoportsebességet a minket érdeklő esetekben, ahol $\overline{E}$ a Maxwell-egyenletek ismert monokromatikus (síkhullám) alapmegoldása.

a) Semleges és izotróp, ionizált gáz összehasonlítása:

E példában a (67) és (68) összefüggéseket használjuk fel (83) további kifejtésénél. A közeg izotróp volta miatt felvehetünk az általánosság megszorítása nélkül

$$\overline{K}=Ki \quad \text{és} \quad K=k_0\sqrt{\varepsilon}=\omega_0\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}$$

x-irányban terjedő jelet. Tudjuk, hogy $\overline{E}(0, E_y, E_z)$ a megoldás alakja.

— Semleges gáz esetén emellett (67) teljesül. Innen (83), célszerűen átalakítva:

$$\left[\left(\frac{\overline{\overline{K}}}{\omega_0}\,\frac{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}{(-f')}+\frac{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}{(-f')}\,\frac{\overline{\overline{K}}}{\omega_0}\right)+2\frac{\varepsilon}{c^2}\overline{\overline{1}}\right]\overline{E}=0.$$

Innen adódik, hogy

$$\frac{\varepsilon}{c^2}E_x=0$$

ami triviálisan teljesül. Az $E_y\neq 0$, $E_z\neq 0$ miatt pedig a

$$\frac{K}{\omega_0}\,\frac{(\partial f/\partial x)}{(-\partial f/\partial t)}=\frac{\varepsilon}{c^2} \quad (84)$$

azaz

$$v_g=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (84a)$$

helyes eredmény.

— Általában is izotróp elemi úton belátható innen, hogy $\overline{K}$ és $\overline{\text{grad}\, f}$ $\parallel$ vektorok.

— Izotróp, ionizált gáz esetén (68)-at használjuk fel a kifejtésnél. Ekkor:

$$\left[\left(\frac{\overline{\overline{K}}}{\omega_0}\,\frac{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}{(-f')}+\frac{\overline{\overline{\mathcal{F}}}}{(-f')}\,\frac{\overline{\overline{K}}}{\omega_0}\right)-\frac{2}{c^2}\overline{\overline{1}}\right]\overline{E}=0.$$

Innen:

$$\frac{K}{\omega_0}\,\frac{(\partial f/\partial x)}{(-\partial f/\partial t)}=\frac{1}{c^2} \quad (85)$$

azaz

$$v_g=c\sqrt{\varepsilon} \quad (85a)$$

— Kihasználva a $\overline{K}$ $\parallel$ $\overline{\text{grad}\, f}$ tényt, kaphatunk (82)-ből a két gáztípusra közös kifejezést is. Ekkor már a levezetés során felhasználjuk a

$$K/\omega_0=1/v_f=\sqrt{\varepsilon}/c \quad \text{és} \quad \mathcal{F}/(-f')=1/v_g$$

jelöléseket. Így a feltételi egyenlet (82)-ből,

$$v_g=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon^*-j\dfrac{\omega_0}{f'}\,\dfrac{\varepsilon^*-\varepsilon}{2}}\,c. \quad (86)$$

Mivel monokromatikus jelet vizsgálunk és f' igen kicsiny, ha szükséges, figyelembe vesszük az $f'/\omega_0\ll 1$ egyenlőtlenséget is.

Semleges gázban innen — (67) —

$$v_g=c\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Izotróp plazmában innen — (68) —

$$v_g=c\sqrt{\varepsilon}.$$

Vákuumban ellenőrzésként:

$$v_g=c.$$

Állítás: Eddigi eredményeink alapján látható, hogy a különféle közegek összehasonlító elemzése e módszer segítségével igen jól és áttekinthetően végezhető el.

b) Semleges gáz részletes vizsgálata:

A (70) és (72) összefüggések mutatták, hogy az izotrópia megmaradt. Ezért ez esetben is vizsgáljunk x-irányú terjedést, ahol:

$$\overline{\overline{\mathcal{K}}}_2=\overline{\overline{\mathcal{K}}}_3=E_1=0$$

és

$$\overline{\overline{\mathcal{K}}}_1=\overline{\overline{\mathcal{K}}}=\sqrt{\varepsilon}$$

(83) alakja ekkor, ha $\overline{\overline{\varepsilon}}^*-\overline{\overline{\varepsilon}}\equiv\overline{\overline{\varepsilon}}^*$ jelölést is használunk:

$$\left\{\sqrt{\varepsilon}\begin{bmatrix}0 & \mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_3\\ \mathcal{F}_2 & -2\mathcal{F}_1 & 0\\ \mathcal{F}_3 & 0 & -2\mathcal{F}_1\end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\left[2(-f')\overline{\overline{\varepsilon}}^*-f\omega_0\overline{\overline{\varepsilon}}^*\right]\right\}\begin{bmatrix}0\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}=0. \quad (87)$$

Vegyük az általános, azaz $\omega_0^2\ll a/m$ és $\omega_0^2\lesssim a/m$

közé eső „átmeneti" szakaszra vonatkozó ε és ε^* értéket. Ekkor $\bar{\bar{A}}_\varepsilon$ meghatározható:

$$\bar{\bar{A}}_\varepsilon=\frac{\bar{\bar{1}}}{c}\left[2(-f')\varepsilon^*-j\omega_0 e^*\right].$$

Ezen túlmenően a (70) szerint $\varepsilon=1+\varepsilon$ kifejezés szakadási helyének elkerülése érdekében tegyük fel, hogy ω_0 és ω_0^* egyaránt elég távol van a rezonanciahelytől. Így még jogos (70) használata, elhanyagolhatók a belső súrlódási stb. veszteségek. (Ez esetünkben nem elvi megszorítás, egyszerűen számítási kényelem.) Ekkor pedig az $\bar{\bar{A}}_\varepsilon$ kifejtésénél fellépő

$$\frac{2f}{\frac{a}{m\omega_0^2}-1}\,\frac{f'^2}{\omega_0}\cong 0,$$

mivel másodrendűen kicsinynek tekinthető 1 mellett. Így (70) és (72) alapján:

$$\varepsilon^*\cong -2j\omega_0 f'\frac{\varepsilon}{\frac{a}{m}-\omega_0^2},$$

$$\varepsilon^*\cong\varepsilon+\varepsilon^*.$$

Innen:

$$\bar{\bar{A}}_\varepsilon=\frac{\bar{\bar{1}}}{c}A=\frac{\bar{\bar{1}}}{c}\left[2(-f')\varepsilon+2j\omega_0 f'\frac{\varepsilon-1}{\frac{a}{m}-\omega_0^2}(j\omega_0+2f')\right].$$

$\bar{\bar{A}}_\varepsilon$ kapott értékét felhasználva (87) kifejthető:

$$\begin{bmatrix}\frac{A}{c\sqrt{\varepsilon}} & \mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_3\\ \mathcal{F}_2 & \frac{A}{c\sqrt{\varepsilon}}-2\mathcal{F}_1 & 0\\ \mathcal{F}_3 & 0 & \frac{A}{c\sqrt{\varepsilon}}-2\mathcal{F}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}=0, \qquad (88)$$

(88)-ból elemi úton adódik, hogy:

$$\mathcal{F}_2=\mathcal{F}_3=0, \quad \text{azaz} \quad \bar{\mathcal{F}}\|\bar{K}.$$

Továbbá:

$$\frac{A}{c\sqrt{\varepsilon}}-2\mathcal{F}_1=0. \qquad (89)$$

(89) v_g-re kifejthető és a tett felvételek mellett

$$v_g=c\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon-1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{j\omega_0}{\frac{a}{m}-\omega_0^2}(j\omega_0+2f')}. \qquad (90)$$

Fontos: (90)-ből megállapíthatjuk, hogy már a legegyszerűbb közegekben is a $v_g\neq v_f$ általában, s a legváratlanabb jelenségekre számíthatunk a terjedésnél!

(90) diszkussziójához vezessük be az

$$\omega_p^2=\frac{q^2N}{\varepsilon_0 m} \quad \text{és} \quad \omega_D^2=\frac{a}{m}$$

jelöléseket. Tudjuk továbbá, hogy $v_f=c/\sqrt{\varepsilon}$.

— Ha igen távol vagyunk a rezonanciától, akkor:

$$\omega_0^2\ll\omega_D^2 \quad \text{és}$$

$$v_g\cong v_f\frac{1}{1+\frac{\omega_0^2}{\omega_D^2}\,\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2+\omega_D^2}}\cong v_f. \qquad (91a)$$

— Ha távol vagyunk még a rezonanciától, de a nevező második tagja már nem hanyagolható el, ami az ω_D/ω_p viszonytól is függ, akkor

$$v_g\cong v_f\frac{1}{1+\frac{\omega_0^2}{\omega_D^2}\,\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2+\omega_D^2}}\neq v_f. \qquad (91b)$$

— Végül, a feltételeink megengedte mértékben közeledve a rezonancia felé:

$$v_g\cong v_f\frac{1}{1+\frac{\omega_0^2}{\omega_D^2-\omega_0^2}\,\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2+\omega_D^2-\omega_0^2}}\neq v_f. \qquad (91c)$$

c) Anizotróp plazma analízise:

Mivel korábban $\bar{B}_0(0, 0, B_0)$-hoz illeszkedő koordináta rendszert választottunk, az általánosság megszorítása nélkül választhatunk:

$$\bar{\bar{K}}=\begin{bmatrix}0 & -K_3 & 0\\ K_3 & 0 & -K_1\\ 0 & K_1 & 0\end{bmatrix}$$

megoldást. Ekkor (83) a

$$\left\{c\bar{\bar{\mathcal{K}}}\left(\frac{\bar{\bar{\mathcal{F}}}}{-f'}\right)+c\left(\frac{\bar{\bar{\mathcal{F}}}}{-f'}\right)\bar{\bar{\mathcal{K}}}+\left[2\bar{\bar{\varepsilon}}^*-j\frac{\omega_0}{(-f')}(\bar{\bar{\varepsilon}}^*-\bar{\bar{\varepsilon}})\right]\right\}\bar{E}=0. \qquad (92)$$

Mindenekelőtt az $\bar{\bar{\varepsilon}}^*$ egyes komponenseinek elemzését végezzük el, s a megtehető elhanyagolások után:

$$\varepsilon_\perp^*\cong 1-\frac{\alpha^2}{1-\beta^2}\left(i-2\frac{f'}{j\omega_0}\,\frac{1}{1-\beta^2}\right)=\varepsilon_\perp+e_\perp^*,$$

$$\varepsilon_\|^*\cong 1-\alpha^2\left(1-2\frac{f'}{j\omega_0}\right)=\varepsilon_\|+e_\|^*, \qquad (93)$$

$$\varepsilon_x^*\cong\varepsilon_x\left(1-\frac{f'}{j\omega_0}\,\frac{3-\beta^2}{1-\beta^2}\right)=\varepsilon_x-e_x^*.$$

(93) felhasználásával belátható, hogy

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^*-\bar{\bar{\varepsilon}}=\bar{\bar{e}}^*=\begin{bmatrix}e_\perp^* & je_x^* & 0\\ -je_x^* & e_\perp^* & 0\\ 0 & 0 & e_\|^*\end{bmatrix}\sim f'. \qquad (94)$$

Innen az $\bar{\bar{A}}_\varepsilon$ megadható:

$$\bar{\bar{\mathrm{A}}}_{\varepsilon}=(-2f')\begin{bmatrix}\left(1-e_{\perp}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) & j\varepsilon_x\frac{2}{1-\beta^2} & 0\\ -j\varepsilon_x\frac{2}{1-\beta^2} & \left(1-e_{\perp}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(-2f')\bar{\bar{a}}_{\varepsilon}. \tag{95}$$

Ha a plazma izotróp ($B_0\equiv 0$), akkor $\bar{\bar{\mathrm{A}}}_{\varepsilon iz}=(-2f')\bar{\bar{\mathrm{I}}}$. Ebben az esetben rövid úton belátható, hogy visszajutunk a (85) és (85*a*) eredményekhez.

Esetünkben tehát a csoportsebességet megadó egyenlet:

$$\left\{\frac{c}{2}\frac{1}{(-f')}\begin{bmatrix}-2\mathcal{K}_3\mathcal{F}_3 & \mathcal{K}_1\mathcal{F}_2 & (\mathcal{K}_1\mathcal{F}_3+\mathcal{K}_3\mathcal{F}_1)\\ \mathcal{K}_1\mathcal{F}_2 & -2(\mathcal{K}_3\mathcal{F}_3+\mathcal{K}_1\mathcal{F}_1) & \mathcal{K}_3\mathcal{F}_2\\ (\mathcal{K}_1\mathcal{F}_3+\mathcal{K}_3\mathcal{F}_1) & \mathcal{K}_3\mathcal{F}_2 & -2\mathcal{K}_1\mathcal{F}_1\end{bmatrix}+\bar{\bar{a}}_{\varepsilon}\right\}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix}=0. \tag{96}$$

Innen az anizotróp plazmában ismert [6—8] valamely $\bar{\mathrm{E}}$ megoldást kivéve a hozzátartozó $\bar{\mathrm{K}}$ (K_1, 0, K_3)-mal, azt (96)-ba visszahelyettesítve, felírhatók és diszkutálhatók a komponens egyenletek. Ezek alapján adódik a konkrét terjedési irányra vonatkozó $\bar{\mathcal{F}}/(-f')$ „energiaterjedési tényező" és $v_g=|-f'|/\mathcal{F}$ is.

Ezek az eredmények alapvetően fontosakká válnak például a whistlerek terjedési útja elemzésében és számos más űrkutatási, csillagászati és mérnöki vizsgálatban!

5.4. Összegezve

A diszperzív esetekben is sikeresen alkalmaztuk a v_g meghatározására javasolt eljárást és bemutattuk az eljárás gyakorlati alkalmazását is egyidejűleg új eredményeket nyerve.

6. Az egyéb perturbációk terjedése

A 4. pont bevezetőjében felvázoltuk, hogy stacioner megoldásunkat

$$(a_{il}+\delta_i);\quad (\varphi_{ai}+\delta_i);\quad (\omega_0+\delta_i)\quad \text{és}\quad (\bar{\mathrm{F}}_{0il}+\delta_i)$$

módon lehet perturbálni. A 3. pont alapján indokoltuk, miért az $(a_{il}+\delta_i)$ perturbációval vizsgáljuk v_g-t. Most röviden vizsgáljuk meg a többi perturbáció viselkedését is. Ez különösen a különféle modulációs eljárások terjedése szempontjából érdekes!

Alapkifejezésünk a (43) egyenlet. Ezzel összevetve vizsgáljuk a többi elemi „moduláció" viselkedését.

6.1. Fázis-perturbáció

Ebben az esetben a perturbált tényező az

$$e^{-j(\varphi_{ai}+\delta_i)}=e^{-j\varphi_{ai}\left(1+\frac{\delta_i}{\varphi_{ai}}\right)}\cong\left[\left(1+\frac{\delta_i}{\varphi_{ai}}\right)e\right]^{-j\varphi_{ai}},$$

tekintve, hogy $\frac{\delta_i}{\varphi_{ai}}\ll 1$. Innen:

$$e^{-j(\varphi_{ai}+\delta_i)}\cong 1-j\delta_i e^{-j\varphi_{ai}}.$$

Tehát a fázis-moduláció (perturbáció) az

$$f_i\to(-j\delta_i) \tag{97}$$

analógiával *az amplitúdó-perturbációra vezethető vissza*. Azzal azonos módon terjed.

6.2. Polarizáció-perturbáció

Ebben az esetben a perturbált tényező az

$$(\bar{\mathrm{F}}_{0il}+\delta_i)=\mathrm{F}_{0il}(\bar{\mathrm{e}}_{0il}+f_{il}\bar{\mathrm{e}}_{\delta i}).$$

Legyen

$$\bar{\mathrm{e}}_{\delta i}=\bar{\bar{\mathrm{T}}}_{\delta i}\bar{\mathrm{e}}_{0il},\quad \text{azaz}$$

$$\bar{\bar{f}}_{il}=f_{il}\bar{\bar{\mathrm{T}}}_{\delta i}.$$

Tehát

$$\bar{\mathrm{F}}_{\delta}=\sum_{i,l}(\bar{\bar{1}}+\bar{\bar{f}}_{il})\bar{\mathrm{F}}_{il}. \tag{98}$$

(98) értékeléséhez diszkutáljuk az $\bar{\mathrm{F}}_{\delta}=(\bar{\bar{1}}+f\bar{\bar{\mathrm{T}}}_{\delta})\bar{\mathrm{F}}_1$ egymódusú megoldását. Az $\bar{\mathrm{F}}_{\delta}$-val végzendő műveletek a Maxwell-egyenletekbe való behelyettesítés után rot, div és $\partial/\partial t$. Megvizsgálhatók ezek $\bar{\mathrm{F}}_1$-re és $f\bar{\bar{\mathrm{T}}}_{\delta}\bar{\mathrm{F}}_1$-re egyaránt.

A részletszámítások elvégzése után belátható, hogy az egyenletek két független részre esnek szét, s innen

$$\bar{\bar{\mathrm{T}}}_{\delta}\bar{\mathrm{F}}_1=\bar{\mathrm{F}}_2, \tag{99}$$

az ugyanazon a φ-hez tartozó, más polarizációjú, független megoldás. Tehát ekkor:

$$\bar{\mathrm{F}}_{\delta}=\bar{F}_1+f\bar{\mathrm{F}}_2.$$

Tehát polarizáció-moduláció esetén a perturbáció új módust hoz be, s az alapjel és az új összetevő csoportsebessége nem szükségképpen azonos.

Polarizáció-moduláció esetén ezért járulékos terjedési hatások (zavarok) felléptével kell számolni.

6.3. Frekvencia-perturbáció

Ebben az esetben a perturbált tényező az

$$e^{j(\omega_0+\delta_i)t}\cong(1+j\delta_i t)e^{j\omega_0 t}, \tag{100}$$

a szokott módon átírva. (100)-at csak akkor lehet az eddigi eredmények felhasználásával kezelni, ha a $\delta_i\ll\omega_0$ mellett a

$$\delta_i t\ll 1 \tag{101}$$

is teljesül. (101) teljesülése esetén eddigi eredményeink átvehetők.

Általában azonban t miatt (101) nem teljesül.

Tehát a frekvencia-moduláció alapvetően eltér az eddigi esetektől. Terjedése külön elemzendő nem monokromatikusként kezelve a jelet.

Kiegészítés:

Kíséreljük meg csak a szigorúan és gyorsan 0-hoz tartó perturbációkat kiválasztva szigorúan monokromatikus esetben külön megszorításokkal előző eredményeink esetleges érvényességi körét megkeresni.

Az előzőeket szem előtt tartva azt mondhatjuk, hogy ha eredményeink külön megszorításokkal alkalmazhatók, akkor — esetleg másodrendűen kicsiny δ_i mellett — értelmezni tudjuk a

$$\overline{\overline{\mathcal{D}}}=jt\overline{\overline{\Delta}} \text{ tenzort, ahol}$$

$$\overline{\overline{\Delta}}\to\overline{\text{grad}\,\delta}\times\ldots\text{-hoz tartozik.}$$

Nem-diszperzív esetben ekkor érvényesnek kell lenni például a

$$\frac{\mathrm{K}}{\omega_0}=\frac{|\overline{\text{grad}\,\delta}|}{|-\delta'|} \tag{102}$$

összefüggésnek. Azonban esetünkben

$$\frac{\overline{\overline{K}}}{\omega_0}=\frac{\overline{\overline{\mathcal{D}}}}{(-d')}, \tag{103}$$

ahol $(-d')=(-jt)(\delta'+\delta/t)$. Innen pedig, mivel (103)-ból

$$\frac{K}{\omega_0}=\frac{|\overline{\text{grad}\,\delta}|}{|-\delta'-\delta/t|}, \tag{104}$$

adódik, (102) teljesüléséhez a

$$\delta\ll\delta' t \tag{105}$$

járulékos feltételnek kell teljesülni.

Tehát érvényesek korábbi eredményeink, ha egyidejűleg teljesül a

$$\begin{aligned}&\delta\ll\omega_0,\\ &\delta t\ll 1,\\ &\delta\ll\delta' t\end{aligned} \tag{106}$$

feltétel.

Azonban δ perturbáció, a hely és idő függvénye, amint azt korábban beláttuk. Perturbáció volta miatt δ kiindulási (δ_0) értéke biztosan 0 és igen kicsiny, térben és időben lassan változó volta miatt általában közelíthetjük sorfejtéssel, például:

$$\delta(t)_{\bar{r}}\sim\delta_{0\bar{r}}+\delta'_{\bar{r}}t\sim\delta'_{\bar{r}}t \tag{107}$$

alakban.

(105) és (107) *egyszerre* nem teljesülhet.

Fontos:

Részletes vizsgálattal talán találhatnánk olyan $\delta(\bar{r}, t)$ perturbációosztályt, amelyre a korábbi eredmények frekvencia-moduláció esetén is érvényesek. Általában azonban a frekvencia-perturbáció a többitől alapvetően eltérő módon viselkedik.

Úgy tűnik, hogy energetikai szempontból a frekvencia az elektromágneses jel meg nem zavarható sajátja! (E vizsgálatok ezen irányban is tovább vihetők.)

6.4.

Általánosságban az az eredmény adódott, hogy az amplitúdó és a fázismoduláció ugyanazon módus modulációját jelenti, a polarizáció és a frekvenciamoduláció egy, illetve sok (esetleg ∞ sok) új módus jelentkezésével jár.

A fázismoduláció terjedési szempontból az amplitúdó-moduláció párja és nem a frekvencia-modulációé! Ez a hírközlési gyakorlat számára fontos elvi eredmény.

7. Összefoglalás, következmények

7.1.

Megállapítottuk, hogy a csoportsebesség szokásos leírása monokromatikus esetben nem igazán jó és célszerű.

Megállapítottuk, hogy a csoportsebesség szokásos leírása nem a Maxwell-egyenleteken keresztül adja meg v_g-t, hanem a felvett megoldási alakhoz köti azt.

Úgy találtuk, hogy e szokásos leírás nem alkalmas széles körű összehasonlító elemzésre, továbbá nem tekinthető teljesnek.

7.2.

Megvizsgáltuk az átlagenergia értelmezhetőségének a kérdését térben, illetve közegben terjedő elektromágneses hullám esetén, ha a jel az inhomogén alapmódusok módszere segítségével leírható és egyéb tett feltevéseink teljesülnek. Ekkor:

A jel esetleges perturbációja esetén a perturbáció nagyságát és sebességét korlátozó feltételeket kaptunk.

Módszert adtunk az eredő, illetve az egymódusú tér vizsgálatára. Röviden átgondoltuk milyen kiegészítő eredményekkel járna az inhomogén alapmódusokra bontott leírás analízise — megmutatva az utat a „terjedő alapmódusok" megkereséséhez.

Az átlagenergia meghatározásánál az átlagolás felületére és időtartamára alsó és felső korlátokat találtunk.

Igazoltuk, hogy az átlagenergia csak várható értékként, valamekkora szórással együtt, értelmezhető már „klasszikus" esetben is! Úgy találtuk, hogy az átlagérték értelmezhetősége és a szórása a felvett mérőfelülettől és mérésidő-tartamtól függ. Ennek fontos elvi és méréstechnikai következményei vannak. Tovább fejlesztendő e vizsgálat a teljesen statisztikus leírás alkalmazásáig.

Igazoltuk, hogy az átlagenergia értéke nem függ a térbeli és időbeli integrálás sorrendjétől.

Igazoltuk, hogy értelmezhető átlagenergia, illetve átlagos energiasűrűség a mérési időtől, illetve felülettől függetlenül, azaz egyértelműen.

Igazoltuk, hogy ekkor az átlagenergiát egyértelműen az általános (teljes — $\overline{\mathrm{F}}_0$) jelamplitúdó határozza meg.

Utat találtunk az energiaingadozás, „bőrözés" (meddő energia) tanulmányozására bonyolultabb esetekben is.

Igazoltuk, hogy ez esetben definiálhatunk komplex Poynting-vektort, komplex átlagenergiát stb., aminek a valós része a tényleges átlagenergia.

7.3.

Vizsgáltuk a csoportsebességet szigorúan lineáris közegekben:

Módszert adtunk v_g meghatározására a Maxwell-egyenletekből a tett feltevések melletti általános esetben. (A csoportsebességre kapott eredményeket különös gondossággal és körültekintéssel kell átvinni olyan esetekre, amikor a fázis terjedési vektora és értelemszerűen a perturbáció terjedési vektora is komplex, azaz nem tisztán terjedést jellemez [18]).

Módszert adtunk v_g meghatározására homogén esetben is, több módusú jelekre is.

Speciális esetként megadtuk a homogén, egymódusú és homogén, egymástól függetlenül terjedő módusokból álló jelekre, hogy monokromatikus síkhullámban, még bianizotróp esetben is $v_g \equiv v_f$ és $\bar{v}_g \| \bar{v}_f$.

Röviden összehasonlítva a mozgó, homogén közegekre vonatkozó vizsgálatokat igazoltuk, hogy:

— a fázissebesség nem einsteni módon való transzformációja által képviselt diszkrepancia igen fontos és elvi jelentőségű,

— a diszkrepancia feloldásának egyedüli lehetséges útja valamilyen geometriai jellegű vizsgálat.

7.4.

Vizsgáltuk a csoportsebességet diszperzív közegekben.

Megadtuk v_g Maxwell-egyenletekből való meghatározása általános módszerét. Homogén esetben a terjedési vektorort ($\bar{K} = \overline{\text{grad}}\, \varphi$) meghatározó diszperziós egyenlethez hasonló egyenlettel tudtuk leírni a csoportsebességet meghatározó energiaterjedési tényezőt.

Igazoltuk, hogy ezen egyénletek nem diszperzív esetekben a *7.3.* vizsgálatok eredményeit adják vissza.

Meghatároztuk a perturbált közegjellemzőket:

— semleges gáz és izotróp plazma esetén egyszerű közelítéssel,

— semleges gázban pontosabb közelítéssel,

— anizotróp plazmában.

Ezzel egyben megmutattuk a perturbált közegjellemzők meghatározásának általános módszerét.

Megadtuk annak a pontos feltételeit, hogy a diszperzív közeg milyen esetekben tekinthető még lineárisnak.

Megadtuk a v_g-t meghatározó általános egyenletet homogén, diszperzív esetben, ha $\bar{\bar{\varkappa}} = \bar{\bar{\nu}} = \bar{\bar{0}}$ és $\bar{\bar{\mu}} = \bar{\bar{1}}$, továbbá a permittivitás valamilyen izotróp vagy anizotróp közegjellemző.

Összehasonlító elemzést végeztünk égyszerű, semleges gáz és izotróp plazma esetében. Bemutattuk, hogyan megy át $v_g = c/\sqrt{\varepsilon}$ megoldás a $v_g = c\sqrt{\varepsilon}$ megoldásba, miközben $v_f = c/\sqrt{\varepsilon}$ változatlanul.

Igazoltuk, hogy a módszer mind összehasonlító elemzésre, mind valamely kívánatos $\bar{v}_g$ érték keresésére jól alkalmazható.

Részletesen analizáltuk pontosabban leírt, izotróp, semleges gázban a $\bar{v}_g$ és $\bar{v}_f$ kapcsolatát. Megadtuk a $v_g \cong v_f$ teljesülése feltételeit, még más esetekben az eltérés jellegét. Igazoltuk, hogy általában is $\bar{v}_g \| \bar{v}_f$, de $v_g \neq v_f$.

Részletesen vizsgáltuk v_g meghatározását anizotróp plazmában. Megadtuk a meghatározás módját és fontosabb alkalmazási területeit.

7.5.

Megvizsgáltuk a fázis-, polarizáció- és frekvenciaperturbáció jellegét az amplitúdó-perturbációval összevetve. Megadtuk, mely esetben várhatók nagyobb vagy a monokromatikusétól eltérő terjedési zavarok. Javaslatot tettünk az általános híradástechnikai, mérnöki alkalmazásra.

*

Ez úton is köszönetet mondok dr. *Károlyházi Frigyes* professzornak észrevételeiért és tanácsaiért.

IRODALOM

[1] *Ferencz Cs.:* Elektromágneses hullámterjedés inhomogén közegben: Az inhomogén alapmódusok módszere. Híradástechnika, XXVIII., 50, 1977.
[2] *K. Simonyi:* Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutsches Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.
[3] *I. E. Tamm:* Osznovi Teorii Elektricsesztva. Izd. „Nauka" Moszkva, 1966.
[4] *J. J. Brandstatter:* An Introduction to Waves, Rays and Radiation in Plasma Media. McGraw-Hill Book Co., New-York, 1963.
[5] *Ferencz Cs.:* Elektromágneses hullámterjedés inhomogén közegekben: Gyenge és erős inhomogenitások. Híradástechnika, XXVIII., 19, 1977.
[6] *K. G. Budden:* Radio Waves in the Ionosphere. Cambridge at the Univ. Press; 1966.
[7] *W. P. Allis, S. J. Buchsbaam* and *A. Bers:* Waves in Anisotropic Plasmas. M. I. T. Press, Cambridge, Mass, 1963.
[8] *Ferencz Cs.:* Elektromágneses hullámterjedés inhomogén, lineáris közegekben. Kandidátusi értekezés, MTA Könyvtár, Budapest 1970.
[9] *Novobátzky K.:* A relativitás elmélete. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.
[10] *G. Marx:* Das Elektromagnetische Feld in bewegten, anisotropen Medien. Acta Phys. Hung., *III.*, 75. 1953.
[11] *J. L. Synge:* Relativity, the Special Theory. North-Holland Publ. Co.; Amsterdam, 1965.
[12] *M. v. Laue:* Die Relativitätstheorie, I. Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1955.
[13] *H. Ott:* Zum Energie-Impulstensor der Maxwell-Minkowskischen Elektrodynamik. Annalen der Phys. (6), *11*, 33, 1952.
[14] *F. Beck:* Die Allgemeingültigkeit der Trägheitsgesetzes der Energie in der Planckschen Fassung. Zeitschrift für Phys, *134*, 136, 1953.
[15] *I. V. Lindell:* On the Definiteness of the Constitutive Parameters of a Moving Anisotropic Medium. Proc. IEEE; *60*, 638, 1972.
[16] *J. A. Kong and D. K. Cheng:* Modified Reciprocity Theorem for Bianisotropic Media. Proc. IEEE, *117*, 349, 1970.
[17] D. *Censor:* First-Order Propagation in Moving Media. IEEE Trans. on Micr. Theory and Techn.; *MTT—16*, 565, 1968.
[18] *F. Árkos I.:* Az inhomogén távvezetéken terjedő monokromatikus jel általános vizsgálata. Publikálás alatt.