FERENCZ CSABA
Űrkutatási Kormánybizottság

Elektromágneses hullámterjedés inhomogén közegekben: Az inhomogén alapmódusok módszere

ETO 537.876.23

A korábbi vizsgálatokból ismert módon [1] az inhomogén közegek az elektromágneses hullám terjedésének leírása szempontjából három alapvető csoportba sorolhatók:

- kvázi-homogén közegek,
- inhomogén (gyengén inhomogén) közegek,
- erősen inhomogén közegek.

A kvázi homogén eset vizsgálata elvileg tisztázott [1, 2, 3], a diszperziós egyenletek csoportjának teljessé tétele, rendszerzése stb. a még meglevő feladat. Nyitott az erősen inhomogén közegek általános vizsgálata. E téren számos speciális vagy általános igényű módszer született [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], azonban ezek együttese és az áttekintő elemzések [1, 10, 19] mutatják, hogy további alapvető vizsgálatok szükségesek.

Az eddigi vizsgálatok során azonban született olyan megoldási módszer javaslat [3, 4, 11], amely az inhomogén (gyengén inhomogén) közegek vizsgálatára általánosan alkalmas [1]. A jelen cikk feladata, hogy ezt az ún. „inhomogén alapmódusok módszerét" részletesen megvizsgálja, beleértve alkalmazhatósági körének precíz meghatározását. A vizsgálatokat az általánosság érdekében [1] bianizotróp közegekre végezzük el.

A továbbiakban a Maxwell-egyenletek monokromatikus megoldását keressük

$$\overline{F}=\overline{F}_0 e^{j(\omega_0 t-\varphi)}$$

alakban, ahol $\overline{F}$ a keresett elektromágneses térjellemző ($\overline{E}$ — elektromos térerősség, $\overline{D}$ — eltolási vektor, $\overline{B}$ — mágneses indukció, $\overline{H}$ — mágneses térerősség), ω_0 a jel körfrekvenciája, t az idő, φ a fázis.

A monokromatikus jel feltételezésből következik, hogy jelenlegi vizsgálataink köréből az időben változó és a mozgó közegeket kizárjuk [1, 2]! Az eredményeknek ilyen esetekre való átvitele további vizsgálatok feladata, s erre egyfajta módszer már ismert [2, 16].

A megoldás létezésének feltételét a jelen cikkben nem vizsgáljuk, mivel a konkrét feladatok közegjellemző és peremfeltétel függvényeinek a vizsgálata döntheti el, hogy létezik-e a keresett alakú megoldás [2].

Mivel azonban a diszperziós egyenlet léte egyben az egzisztencia igazolása is lehet [12], ezért a valamilyen módon diszperziós egyenletre épülő megoldási módokat keressük [17, 18].

Beérkezett: 1976. X. 2.

Vizsgálataink során ezen túlmenően a közeg-elektromágneses hullám kapcsolatot lineárisnak tekintjük, azaz a permeabilitás, permittivitás stb. közegjellemző mennyiségek nem függenek az elektromágneses hullám amplitudójellenzőitől. Természetesen a frekvenciától és a terjedési iránytól való függés megengedett.

I. Az inhomogén alapmódusok módszere

A megoldás keresésekor az elektromágneses tér komponenseinek kapcsolata bianizotróp, azaz

$$\overline{D}=\overline{\overline{\varepsilon}}\,\overline{E}+\overline{\overline{\varkappa}}\,\overline{H}$$

$$\overline{B}=\overline{\overline{\nu}}\,\overline{E}+\overline{\overline{\mu}}\,\overline{H} \tag{1}$$

Korábbról ismert [1], hogy az általánosság csorbítása nélkül elegendő a Maxwell-egyenletek alábbi alakjával dolgozni:

$$\overline{\nabla}\times\overline{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}=-\mu_0\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla}\,\overline{B}=0 \tag{2}$$

$$\overline{\nabla}\,\overline{D}=0$$

csak $\overline{\overline{\varepsilon}}$, $\overline{\overline{\varkappa}}$, $\overline{\overline{\nu}}$ és $\overline{\overline{\mu}}$ kell, hogy minden közeghatást, áram- és töltéskomponenest tartalmazzon. Itt ε_0 és μ_0 a vákuum permittivitása és permeabilitása.

Keressük (2) megoldását a [3]-ban formálisan indokolt

$$\overline{F}=\sum_{i,l}(a_{il}e^{-j\varphi_{ai}}\overline{F}_{0il})\,e^{j(\omega_0 t-\varphi_i)} \tag{3}$$

alakban, ahol

$$\sum_{i,l}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=\nu}^{k}$$

$l=\nu$-valós, k-képzetes; a képzetes komponensbe beleértve a j szorzótényezőt is; $j^2=-1$;
$i=1, \ldots, n$; az egyes inhomogén alapmódusokat jelenti, amiket pontosabban később definiálunk;
a, φ_a stb. jelentése (3)-ból adódik;
ω_0 a jel körfrekveniája, állandó.

A (3)-ban mutatott felbontás praktikus indoklása a [3]-ban ugyan megtalálható, azonban elvi típusú indoka is van e felbontásnak. Ugyanis korábban [4, 6, 7, 8] részletesen bebizonyították azt az állítást, hogy inhomogén közegben az elektromágneses teret mindig több terjedő módus összege írja le, azaz ezek együttesen kielégítik a Maxwell-egyenleteket. A módusok megválasztása szemléleti, megoldási módszer-függő és célszerűségi szempontoktól függ, s erre látunk az alábbiakban egy szerintünk nagyon célszerű formát.

Mivel φ_{ai} és φ_i lehet komplex is, ezért, ha a megoldást ismert módon Eikonal-egyenletre és transzport-egyenletre egyszerűsítve, a leírást „aszimptotikusan" keressük [7, 19], akkor is eleve az általánosabb „inhomogén síkhullámokat" tartalmazó megoldáshoz jutunk. Ekkor tulajdonképpen energetikailag korrigált, kvázihomogén [1, 2, 7, 19] leírással közelítjük a jelenséget. A jelen cikkben ezt az ismert utat részletesebben nem vizsgáljuk, hanem általánosabb megoldást keresünk.

Írjuk be (2)-be az (1) és (3) összefüggéseket és a kifejtésnél első lépésben ne vegyük figyelembe, hogy kiinduló feltevéseink miatt az egyes mennyiségek idő szerinti deriváltjai nullával egyenlőek.

A kifejtés után (2) az alábbi alakot ölti:

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})\times\overline{\mathrm{H}}_{il}+\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{TH}0\,il}\overline{\mathrm{H}}_{il}-\mathrm{j}\overline{\mathrm{K}}_i\times\overline{\mathrm{H}}_{il}]=$$
$$=\sum_{i,l}\varepsilon_0\left[\left(\frac{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}}{\partial t}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\frac{\partial\overline{\overline{\varkappa}}}{\partial t}\overline{\mathrm{H}}_{il}\right)+(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\overline{\nabla}}_{t\mathrm{E}0\,il}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\,\overline{\overline{\nabla}}_{t\mathrm{H}0\,il}\overline{\mathrm{H}}_{il})+\right.$$
$$+\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\frac{\partial(\ln a_i-\mathrm{j}\varphi_{ai})}{\partial t}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\right.$$
$$\left.\left.+\overline{\overline{\varkappa}}\frac{\partial(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})}{\partial t}\overline{\mathrm{H}}_{il}\right)+\mathrm{j}\omega_0(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})\right]$$

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})\times\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{TE}0\,il}\overline{\mathrm{E}}_{il}-\mathrm{j}\overline{\mathrm{K}}_i\times\overline{\mathrm{E}}_{il}]=$$
$$=-\sum_{i,l}\mu_0\left[\left(\frac{\partial\overline{\overline{\nu}}}{\partial t}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\frac{\partial\overline{\overline{\mu}}}{\partial t}\overline{\mathrm{H}}_{il}\right)+(\overline{\overline{\nu}}\overline{\overline{\nabla}}_{t\mathrm{E}0\,il}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\overline{\nabla}}_{t\mathrm{H}0\,il}\overline{\mathrm{H}}_{il})+\right.$$
$$+\left(\overline{\overline{\nu}}\frac{\partial(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})}{\partial t}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\right.$$
$$\left.\left.+\overline{\overline{\mu}}\frac{\partial(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})}{\partial t}\overline{\mathrm{H}}_{il}\right)+\mathrm{j}\omega_0(\overline{\overline{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il})\right]$$

$$\sum_{i,l}[\mathrm{grad}(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})+(\nabla_{\overline{\overline{\varepsilon}}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\nabla_{\overline{\overline{\varkappa}}}\overline{\mathrm{H}}_{il})+$$
$$+(\langle\overline{\overline{\nabla}}_{\varepsilon il}\overline{\mathrm{E}}_{il}\rangle+\langle\overline{\overline{\nabla}}_{\varkappa il}\overline{\mathrm{H}}_{il}\rangle)-\mathrm{j}\overline{\mathrm{K}}_i(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})]=0 \tag{4}$$
$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})(\overline{\overline{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\mu\overline{\mathrm{H}}_{il})+(\nabla_{\overline{\overline{\nu}}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\nabla_{\overline{\overline{\mu}}}\overline{\mathrm{H}}_{il})+$$
$$+(\langle\overline{\overline{\nabla}}_{\nu il}\overline{\mathrm{E}}_{il}\rangle+\langle\overline{\overline{\nabla}}_{\mu il}\overline{\mathrm{H}}_{il}\rangle)-\mathrm{j}\overline{\mathrm{K}}_i(\nu\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il})]=0$$

A (4)-ben szereplő és eddig még nem használt és nem triviális jelölések jelentése a következő:

$$\overline{\mathrm{K}}_i=\overline{\mathrm{grad}}\,\varphi_i;$$

$$\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{tH}0\,il}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{20\,il}}{\partial z} & \dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{30\,il}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{10\,il}}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{30\,il}}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{10\,il}}{\partial y} & \dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{20\,il}}{\partial x} & 0\end{bmatrix};$$

$\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{TE}0\,il}$ jelentése analóg $\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{TH}0\,il}$-lel;

$$\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{tH}0\,il}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{10\,il}}{\partial t} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{20\,il}}{\partial t} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\ln\mathrm{H}_{30\,il}}{\partial t}\end{bmatrix};$$

$\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{tE}0\,il}$ jelentése analóg $\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{tH}0\,il}$-lel;

$$\nabla_{\overline{\overline{\varepsilon}}}=\nabla\overline{\overline{\varepsilon}},\quad \nabla_{\overline{\overline{\mu}}}=\nabla\overline{\overline{\mu}},\quad \text{stb.};$$

$$(\overline{\overline{\nabla}}_{\varepsilon il})_{jk}=\varepsilon_{jk}\frac{\partial\ln\mathrm{E}_{0\,ilk}}{\partial x_j};$$

$\overline{\overline{\nabla}}_{\varkappa li}$, $\overline{\overline{\nabla}}_{\nu il}$ és $\overline{\overline{\nabla}}_{\mu il}$ jelentése értelemszerűen analóg $\overline{\overline{\nabla}}_{\varepsilon il}$-ievel;

$$\langle\overline{\mathrm{u}}\rangle\equiv\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2+\mathrm{u}_3.$$

A Maxwell-egyenletek (4) szerinti alakját más helyen is majd fel kívánjuk használni. A jelenlegi levezetésben azonban most vegyük figyelembe, hogy monokromatikus megoldást keresünk és — ezért — a közegjellemzők időbeli változását is kizárva [1], stacioner jellegű lesz a megoldás. Ekkor egyenleteink alakja az alábbi:

$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})\times\overline{\mathrm{H}}_{il}+\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{TH}0\,il}\overline{\mathrm{H}}_{il}-\mathrm{j}\overline{\mathrm{K}}_i\times\overline{\mathrm{H}}_{il}]=$$
$$=\varepsilon_0\sum_{i,l}\mathrm{j}\omega_0(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})$$
$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln a_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})\times\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\nabla}}_{\mathrm{TE}0\,il}\overline{\mathrm{E}}_{il}-\mathrm{j}\overline{\mathrm{K}}_i\times\overline{\mathrm{E}}_{il}]=$$
$$=-\mu_0\sum_{i,l}\mathrm{j}\omega_0(\overline{\overline{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il}) \tag{5}$$
$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln \mathrm{a}_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})+(\nabla_{\overline{\overline{\varepsilon}}}\mathrm{E}_{il}+\nabla_{\overline{\overline{\varkappa}}}\overline{\mathrm{H}}_{il})+$$
$$+(\langle\overline{\overline{\nabla}}_{\varepsilon il}\overline{\mathrm{E}}_{il}\rangle+\langle\overline{\overline{\nabla}}_{\varkappa il}\overline{\mathrm{H}}_{il}\rangle)-\mathrm{j}\mathrm{K}_i(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})]=0$$
$$\sum_{i,l}[\overline{\mathrm{grad}}(\ln \mathrm{a}_{il}-\mathrm{j}\varphi_{ai})(\overline{\overline{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il})+(\nabla_{\overline{\overline{\nu}}}\mathrm{E}_{il}+\nabla_{\overline{\overline{\mu}}}\overline{\mathrm{H}}_{il})+$$
$$+(\langle\overline{\overline{\nabla}}_{\nu il}\overline{\mathrm{E}}_{il}\rangle+\langle\nabla_{\mu il}\overline{\mathrm{H}}_{il}\rangle)-\mathrm{j}\overline{\mathrm{K}}_i(\overline{\overline{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il})]=0$$

Definiáljuk (3)-ban φ_i-t a kvázi-homogén esetben érvényes Maxwell-egyenletek és a hozzájuk tartozó diszperziós egyenletek megoldásaként [1].

Ekkor

$$\overline{\mathrm{K}}_i=\overline{\mathrm{grad}}\,\varphi_i$$

változatlanul, továbbá definíciónk szerint teljesülni kell a

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{K}}_i\times\overline{\mathrm{H}}_{il}&=-\omega_0\varepsilon_0(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})\\ \overline{\mathrm{K}}_i\times\overline{\mathrm{E}}_{il}&=\omega_0\mu_0(\overline{\overline{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il})\\ \overline{\mathrm{K}}_i(\overline{\overline{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})&=0\\ \overline{\mathrm{K}}_i(\overline{\overline{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il}+\overline{\overline{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il})&=0\end{aligned} \tag{6}$$

egyenleteknek. (3)-at elemezve és ennek alapján (6)-ban a közös tényezőkkel egyszerűsítve

$$\overline{K}_i\times\overline{H}_{0il}=-\omega_0\varepsilon_0(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}_{0il}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H}_{0il})$$

$$\overline{K}_i\times\overline{E}_{0il}=\omega_0\mu_0(\bar{\bar{\nu}}\overline{E}_{0il}+\bar{\bar{\mu}}\overline{H}_{0il})$$

$$\overline{K}_i(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}_{0il}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H}_{0il})=0 \tag{7}$$

$$\overline{K}_i(\bar{\bar{\nu}}\overline{E}_{0il}+\bar{\bar{\mu}}\overline{H}_{0il})=0 \quad .$$

Miután (7) utolsó két egyenlete automatikusan kielégül, a φ_i-t meghatározó és az $\overline{F}_{0il}$-ket néhány szabadsági fok meghagyása mellett meghatározó egyenletek az alábbiak:

$$\overline{K}_i\times\overline{H}_{0il}=-\omega_0\varepsilon_0(\varepsilon\overline{E}_{0il}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H}_{0il})$$

$$\overline{K}_i\times\overline{E}_{0il}=\omega_0\mu_0(\bar{\bar{\nu}}\overline{E}_{0il}+\bar{\bar{\mu}}\overline{H}_{0il}) \tag{8}$$

és

$$|\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\bar{\bar{\overline{K}}}_i+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varkappa}})\,\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\bar{\bar{\overline{K}}}_i-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}})+k_0^2\bar{\bar{I}}|=0, \tag{9}$$

ahol

$$\bar{\bar{\overline{K}}}_i=\begin{bmatrix} 0 & -K_{i3} & K_{i2} \\ K_{i3} & 0 & -K_{i1} \\ -K_{i2} & K_{i1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad k_0^2=\varepsilon_0\mu_0\omega_0^2$$

A (8)—(9) egyenletekkel definiált függvényeket nevezzük a továbbiakban „inhomogén alapmódusoknak”. E definíciót felhasználva az (5) egyenletekben szereplő j-vel szorzott tagok — miután definíciónk következtében (6) is teljesül — egyenletenként automatikusan kiejtik egymást. A keresett (3) alakú teljes megoldás még hiányzó leíró függvényeit a (8) és (9) megoldása után tehát az alábbi egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$\mathscr{L}_o=\sum_{i,l}[\overline{\text{grad}}(\ln a_{il}-]\varphi_{ai})\times\overline{H}_{il}+\bar{\bar{\overline{\nabla}}}_{\text{TH}0il}\overline{H}_l]=0 \tag{10/a}$$

$$\mathscr{L}_o=\sum_{i,l}[\overline{\text{grad}}(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})\times\overline{E}_{il}+\bar{\bar{\overline{\nabla}}}_{\text{TE}0il}\overline{E}_{il}]=0 \tag{10/b}$$

$$\mathscr{L}_o=\sum_{i,l}[\overline{\text{grad}}(\ln a_{il}-j\varphi_{al})(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H}_{il})+$$

$$+(\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\varepsilon}}}\overline{E}_{il}+\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\varkappa}}}\overline{H}_{il})+(\langle\bar{\bar{\overline{\nabla}}}_{\varepsilon il}\overline{E}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\overline{\nabla}}}_{\varkappa il}\overline{H}_{il}\rangle)]=0 \tag{10/c}$$

$$\mathscr{L}_o=\sum_{i,l}[\overline{\text{grad}}(\ln a_{il}-j\varphi_{al})(\bar{\bar{\nu}}\overline{E}_{il}+\bar{\bar{\mu}}\overline{H}_{il})+$$

$$+(\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\nu}}}\overline{E}_{il}+\overline{\nabla}_{\bar{\bar{\mu}}}\overline{H}_{il})+(\langle\bar{\bar{\overline{\nabla}}}_{\nu il}\overline{E}_{il}\rangle+\langle\bar{\bar{\overline{\nabla}}}_{\mu il}\overline{H}_{il}\rangle)]=0 \tag{10/d}$$

Miután (2) sugallja a div $\overline{D}=0$ és a div $\overline{B}=0$ egyenletek automaikus kielégülését a vizsgálat tárgyát képező összes esetben, s a (7) egyenletek utolsó két tagja is automatikusan teljesül, ezért (10/c) és (10/d) elhagyhatónak tűnik. Ez igazolható — lásd később — s így elegendő (10/a) és (10/b) megoldása.

A (10) egyenletekhez (esetleg már a (8)—(9) egyenletekhez) hozzá kell venni a teljes peremfeltétel rendszert. Ily módon válik csak egyértelművé, illetve minden paraméterében rögzítetté a megoldás.

A megoldás létének vizsgálata esetenként elvégzendő, mert a Floquet-elmélet [12, 18] értelmében (9) teljesülése csak az egyes inhomogén alapmódusok létét biztosítja, s ebből (3) létezése nem következik automatikusan.

II. Az inhomogén alapmódusokkal való megoldás vizsgálata

a) Állítás:

Ha létezik $\overline{F}_x=\overline{F}_{x0}\,e^{j(\omega_0 t-\varphi_x)}$ alakú megoldás, akkor az egyben mindig megkapható az inhomogén alapmódusok segítségével is, megfelelően megválasztva azok szabad paramétereit.

Megjegyzés: A korábbiak [1, és a jelen cikk] alapján látható, hogy e megoldásokra egyetlen diszperziós egyenletet felírni nehéz — eddig még nem sikerült. Más oldalról pedig ezen „egyetlen” megoldás fizikailag mindig valamilyen haladó hullámok eredőjeként kialakuló interferencia-képet jelent. E két ok fontossá teszi az előző állítás igazolását.

Bizonyítás:

Igazolandó, hogy

$$\overline{F}_x=\overline{F}_{x0}e^{-j\varphi_x}e^{j\omega_0 t}=\sum_{i,l}(a_{il}e^{-j\varphi_{ai}}\overline{F}_{0il})e^{-j\varphi_i}e^{j\omega_0 t} \tag{11}$$

felbontás minden esetben elvégezhető, ha $\overline{F}_x$ megoldása a Maxwell-egyenleteknek és $\overline{F}_{il}$ inhomogén alapmódus.

Azt tudjuk, hogy az

$$\overline{F}_x=\overline{F}_{x0}e^{-j\varphi_x}e^{j\omega_0 t}=\sum_{i}(\overline{F}_{x0iv}+j\overline{F}_{x0ik})e^{-j\varphi_{xi}}e^{j\omega_0 t} \tag{12}$$

felbontás elvégezhető, ha az i-vel jelzett komponensek a (12)-t alkotó 12 darab egyenletet ($F_x\to E_x$ és H_x) kielégítik, azaz összesen legalább 12 szabadsági fokkal rendelkeznek.

Jelen esetben azonban ($\overline{E}_x$, $\overline{H}_x$) nem függetlenek, hanem a Maxwell-egyenlet összetartozó megoldásai. Független paramétereik számát így e tény korlátozza [13, 14 stb.]. A Maxwell-egyenletek általános (elvi) megoldását figyelembe véve a független paraméterek száma meghatározható. (A továbbiakban „kötött” paraméter alatt az ($\overline{E}_x$, $\overline{H}_x$) összetartozás által előírt paramétert értsünk, míg „szabad” paraméter alatt azokat, amelyeket a konkrét feladat közeg- és peremfeltétel jellemzői megszabnak ugyan, de az ($\overline{E}_x$, $\overline{H}_x$) kapcsolat nem.) Az általános megoldás szabad paramétere lehet (például):

$\overline{A}$ vektorpotenciál

Φ skalárpotenciál és

$\dfrac{\partial\overline{A}}{\partial t}$ (például: $e^{j(\omega_0 t-\varphi_i)}$) derivált

$\overline{A}$-tól független tényezője.

Ily módon a Maxwell-egyenletek feltételezett, létező megoldása — (E_x, H_x) — 4 amplitúdó jellegű és

1 fázis jellegű, összesen 5 szabadsági fokkal rendelkezhet. Ha komplex (forgó polarizáció stb.) típusú megoldást tételezünk fel, a szabadsági fokok száma max. 10 lehet, mivel az ortogonalitás miatt nem kell a megoldás két (valós és képzetes) része között feltétlenül kényszerkapcsolatnak fennállnia.

A (11) jobb oldalán található inhomogén alapmódusokból legalább két független alapmódus létezik, mivel a diszperziós egyenlet — (9) — másodrendű. Így a Maxwell-egyenlet maradék részének tagjait — (10) — figyelve, a szabadon választható paraméterek (11) jobb oldalán:

$$a_{il},\ \varphi_{ai} \text{ és ami } (\overline{\mathrm{E}}_{il},\ \overline{\mathrm{H}}_{il})\text{-ben,}$$

mint (8)—(9) megoldásában még valóban szabad.

$(\overline{\mathrm{E}}_{il}, \overline{\mathrm{H}}_{il})$ szabad paramétereinek a száma:

(9) meghatározza a φ_i-ket. Az egyes φ_i-khez tartozó $(\overline{\mathrm{E}}_{il}, \overline{\mathrm{H}}_{il})$-t (8) határozza meg. (8) valamelyik vektoregyenletét kiválasztva adott $\overline{\mathrm{E}}_{0il}$-hez egyértelműen meghatározható $\overline{\mathrm{H}}_{0il}$, illetve fordítva. Így megmarad a vagy $\overline{\mathrm{E}}_{0il}$-re, vagy $\overline{\mathrm{H}}_{0il}$-re vonatkozó három komponens egyenlet. Ez a maradék egyenletrendszer azonban homogén és (9) miatt az egyik egyenlet lineárisan nem független, azaz el kell hagyni. Tehát a megmaradt három amplitúdókomponensre két egyenlet vonatkozik! (Azt a további triviális szabadsági fokot, hogy ezen túlmenően az egyenlet mindkét oldala ugyanazon mennyiséggel megszorozható, a_{il} bevezetésekor kihasználtuk, egyidejűleg kihasználva a közegjellemzők linearitását is [2].)

Tehát az inhomogén alapmódusokban (8)—(9) megoldása után nincs előírva:

$$a_{il},\ \varphi_{ai} \text{ és } (\overline{\mathrm{E}}_{0il},\ \overline{\mathrm{H}}_{0il})\text{-ben}$$

még 1 paraméter. Mivel legalább két független alapmódus létezik, az inhomogén alapmódusok szabad paramétereinek a száma összesen:

legalább 6,
komplex (forgó polarizáció stb.) esetben — figyelve, hogy l index hol szerepel — elérheti a 10-et.

(Megjegyzés: A (3) alak elemzése triviálisan mutatja, hogy a legáltalánosabb esetben is vagy $a_{iv} \neq a_{ik}$ és φ_{ai} közös, vagy létezik $\varphi_{aiv} \neq \varphi_{aik}$, de ekkor $a_{iv} = a_{ik}$ választható az általánosság korlátozása nélkül.)

Mivel a leírandó tér paramétereinek a száma 5, komplex esetben max. 10, a fentiek alapján látható, hogy az inhomogén alapmódusoknak együttesen mindig van megfelelő számú szabadon választható paramétere, tehát a (11) szerinti leírás (felbontás) bármely, az állításban szereplő létező megoldás esetén megtehető.

Ezzel az állítást igazoltuk.

(Megjegyzés: Komplex vektoros esetben a megfeleltetés alapesetben — $i_{\max}=2$ — kölcsönösen egyértelmű. Egyéb esetekben a szabad paraméterek számának a megoldás során való „kiegyenlítődése" miatt, azaz a megoldás létezésének feltételeként, további feltételek is jöhetnek be. Például: Nem biztos, hogy $(\overline{\mathrm{E}}_x, \overline{\mathrm{H}}_x)$ síkpolarizált hullám előfordulhat stb.)

b) Kiegészítő megállapítás:

A II./a bizonyítás menete alapján triviálisan látható, hogy az I. pontban mutatott módon diszperziós egyenletre támaszkodó megoldási módok esetén a II./a állítás igaz.

Ezért célszerű — ahol csak lehet — a fenti módon diszperziós egyenletre támaszkodó megoldási módokat keresni.

c) A divergencia-egyenletek vizsgálata:

c/1, A korábbiaknak megfelelően [1] minden közeghatást vizsgálatainkban $\overline{\mathrm{D}}$-be és $\overline{\mathrm{H}}$-ba sűrítünk, azaz a Maxwell-egyenletek (2) alakúak.

Ekkor mindaddig, míg a vegyes másodrendű parciális deriváltak felcserélhetősége teljesül, ami inhomogén (gyengén inhomogén) közegekre definíciószerűen [1] igaz, addig

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{\mathrm{H}}) \equiv 0 = \varepsilon_0 \operatorname{div}\frac{\partial \overline{\mathrm{D}}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\overline{\mathrm{D}}). \tag{13}$$

Ezen esetekben tehát a divergencia-egyenletek automatikusan teljesülnek, ha a rotáció-egyenletek teljesülnek.

c/2. Az inhomogén alapmódusokat leíró (7) egyenletek közül, triviálisan belátható módon, a divergencia egyenleteknek megfelelő utolsó két egyenlet automatikusan kielégül, ha az első kettő teljesül.

c/3. Állítás:

Fentiek alapján belátható, hogy az inhomogén alapmódusokra vonatkozó (10) egyenletek közül, ha (10/*a*) és (10/*b*) teljesül, a (10/*c*) és (10/*d*) egyenletek automatikusan kielégülnek. (Ez esetben a számításokban nem kell figyelembe venni ezen egyenleteket.)

Bizonyítás:

Egyenleteink alakja a szóban forgó esetben (5)-tel azonos, azaz:

$$(\mathscr{L}_a) - \mathrm{j}\sum_{i,l}\overline{\mathrm{K}}_i \times \overline{\mathrm{H}}_{il} = \varepsilon_0 \sum_{i,l} \mathrm{j}\omega_0(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il} + \bar{\bar{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il})$$

$$(\mathscr{L}_b) - \mathrm{j}\sum_{i,l}\overline{\mathrm{K}}_i \times \overline{\mathrm{E}}_{il} = -\mu_0 \sum_{i,l} \mathrm{j}\omega_0(\bar{\bar{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il} + \bar{\bar{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il}) \tag{14}$$

és

$$(\mathscr{L}_c) - \mathrm{j}\sum_{i,l}\overline{\mathrm{K}}_i(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{\mathrm{E}}_{il} + \bar{\bar{\varkappa}}\overline{\mathrm{H}}_{il}) = 0$$

$$(\mathscr{L}_d) - \mathrm{j}\sum_{i,l}\overline{\mathrm{K}}_i(\bar{\bar{\nu}}\overline{\mathrm{E}}_{il} + \bar{\bar{\mu}}\overline{\mathrm{H}}_{il}) = 0 \tag{15}$$

ahol $(\mathscr{L}_\alpha)$ a (10) egyenletek bal oldali kifejezését jelenti értelemszerűen.

Ha $(\overline{\mathrm{E}}_{il}, \overline{\mathrm{H}}_{il})$ inhomogén alapmódus, akkor teljesülni kell még az

$$(\mathscr{L}_a) = 0$$

$$(\mathscr{L}_b) = 0$$

egyenleteknek, hogy a teljes megoldást megkapjuk. (A 6, illetve 12 egyenlet a $\geqq 6$, illetve $\geqq 10$ még rögzítetlen paramétert határozza meg. Így egyes paraméterértékeket vagy a peremfeltételek rögzítenek, vagy csak relatív értékük kötött.)

(14)-ből látszik, hogy a kvázi-homogén esetekben a divergencia-egyenletek teljesülését mutató alak analogonja:

$$\overline{K}_i(\mathcal{L}_a)-j\sum_{i,l}\overline{K}_i(\overline{K}_l\times\overline{H}_{il})\quad \text{stb.}$$

nem létezik.

A további vizsgálatok céljából képezzük egyrészt az inhomogén alapmódusokat meghatározó (6) egyenletek közül az első, másrészt a (10/a) egyenlet divergenciáját. (A bizonyítás második egyenletekre vonatkozó része analóg módon végezhető el.)

Ekkor

$$\operatorname{div}(\overline{K}_l\times\overline{H}_{il})=\omega_0\varepsilon_0\operatorname{div}(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H}_{il}) \tag{16}$$

és

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_a)=0 \tag{17}$$

Ha (16)-ot az összes (i, l)-re összegezzük, ami megtehető

$$\sum_{i,l}\operatorname{div}(\overline{K}_l\times\overline{H}_{il})=\omega_0\varepsilon_0\sum_{i,l}\operatorname{div}(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H}_{il})$$

ahonnan, figyelembe véve $(\overline{E}_{il}, \overline{H}_{il})$ inhomogén alapmódus voltát is,

$$-\sum_{i,l}\overline{K}_i\operatorname{rot}\overline{H}_{il}=\omega_0\varepsilon_0\operatorname{div}\sum_{i,l}(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}_{il}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H}_{il})=\omega_0\varepsilon_0(\mathcal{L}_c) \tag{18}$$

Ha $\operatorname{rot}\overline{H}_{il}$-t kiszámoljuk, akkor (18) átírható. Vegyük figyelembe rögtön, hogy $\overline{K}_i(\overline{K}_l\times\overline{u})\equiv 0$.

$$-\sum_{i,l}\overline{K}_i[\bar{\bar{\nabla}}_{\mathrm{TH0}\,il}\overline{H}_{il}+\overline{\operatorname{grad}}(\ln a_{il}-j\varphi_{al})\times\overline{H}_l]=\omega_0\varepsilon_0(\mathcal{L}_c)$$

A [ ]-ben levő kifejezés a (10/a) egyenlet $\sum_{i,l}$ mögötti tagja. Rövidítsük e leírásban $(\mathcal{L}_a)_{il}$-nek.

Ekkor

$$-\sum_{l,i}\overline{K}_i(\mathcal{L}_a)_{il}=\omega_0\varepsilon_0(\mathcal{L}_c) \tag{19}$$

Fejtsük ki ezek után (17)-et.

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_a)=\sum_{i,l}[\operatorname{div}(\bar{\bar{\nabla}}_{\mathrm{TH0}\,il}\overline{H})-\overline{\operatorname{grad}}(\ln a_{il}-]\varphi_{ai})\operatorname{rot}\overline{H}_{il}] \tag{20}$$

Ha feltesszük, hogy függvényeink második, vegyes parciális deriváltjai léteznek és folytonosak — ami az inhomogén közegek definíciója [1] értelmében megengedhető — azaz

$$f''_{x_1x_2}=f''_{x_2x_1} \tag{21}$$

és

$$(E_{kil}, H_{kil})\subset f,\quad \text{ahol}\quad k=1, 2, 3$$

akkor $\operatorname{div}(\bar{\bar{\nabla}}_{\mathrm{TH0}\,il}\overline{H}_i)$ átírható és

$$\operatorname{div}(\bar{\bar{\nabla}}_{\mathrm{TH0}\,il}\overline{H}_{il})=[\overline{\operatorname{grad}}(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})-j\overline{K}_i](\bar{\bar{\nabla}}_{\mathrm{TH0}\,il}\overline{H}_{il}) \tag{22}$$

Ekkor (20)-ba behelyettesítve (22)-t és $\operatorname{rot}\overline{H}_{il}$-t

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_a)=\sum_{i,l}[-j\overline{K}_i(\bar{\bar{\nabla}}_{\mathrm{TH0}\,il}\overline{H}_{il})]+\sum_{i,l}j\,\overline{\operatorname{grad}}(\ln a_{il}-j\varphi_{ai})(\overline{K}_i\times\overline{H}_{il}) \tag{23}$$

(23) második tagjában a vegyes szorzat átrendezhető. Így, a korábbi rövidítéseket használva (17) új alakja:

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_a)=-j\sum_{i,l}\overline{K}_i(\mathcal{L}_a)=0 \tag{24}$$

Innen, (19) és (24) összevetésével adódik, hogy

$$(\mathcal{L}_c)=0 \tag{25}$$

ha teljesül a (21) feltétel. Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés:

A (21) feltétel az inhomogén (gyengén inhomogén) közegekre definíciószerűen teljesül [1] és egybevág a c. 1. pontban kapott feltétellel. Tehát a (21)-feltétel a megoldási mód szempontjából az inhomogenitás fontos minősítője.

Fontos azonban, hogy például $1(\overline{r})$-egységugrás, $\delta(\overline{r})$-Dirac-delta stb. függvények esetén már nem teljesül. (ide tartoznak a törési-tükrözési törvények, a sugár-követési eljárások stb. is!) Ebben az esetben is alkalmazható a mutatott eljárás formálisan [2, 11, 15], azonban ekkor a (10/c) és (10/d) egyenletek nem hagyhatók el. (Ezen esetekben a formális alkalmazás más, további vizsgálatokat igényel [2, 10].)

III. Kiegészítő megállapítások

Az alábbiakban még két kisebb észrevételt kell tenni az eddigiek alapján.

a) Az Appleton—Hartree egyenletről

Az egyenletet az űrkutatás és a geofizika területein kiterjedten alkalmazzák. Vizsgáljuk meg az I. fejezetben adott megoldási menet fényében:

A szokott feltevések szerint [4, 6] ekkor

$$\varepsilon=\varepsilon f(\Theta),$$

ahol $\Theta=\sphericalangle(\overline{K}, \overline{n}_0)$, és $\overline{n}_0$ például az előmágnesező tér irányába mutató egységvektor. Innen a szóban forgó egyenlet

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=k_0^2\varepsilon f[\Theta\,(\overline{\operatorname{grad}}\,\varphi, \overline{n}_0)] \tag{26}$$

ami (9)-nek kellene megfeleljen. Kvázihomogén esetben önmagában is elegendő lenne, míg pontosabb vizsgálatokban az aszimptotikus módszer [7, 19] vagy az inhomogén alapmódusú pontos elemzés alapját adná. Azonban az előzőekkel összevetve azonnal belátható, hogy (9)-ből (26) semmiképpen nem származtatható, azaz ilyen alakú diszperziós egyenlet nincs.

Ezért ezzel az egyenlettel pontosabb vizsgálatokban megszokottsága ellenére sem dolgozhatunk. Egy hibaelemzése e szemszögből korábbról ismert [15].

b) Az inhomogén alapmódusok módszerének alkalmazása

A jelenlegi cikk keretei közé konkrét alkalmazási példa részletes bemutatása nem fér be. A módszerrel részletesen elemezték az inhomogén távvezetékeken való terjedés általános megoldását (egy dimenziós inhomogén hullámterjedés) [20]. Csak illusztrációképpen idézzük onnan az eredményt:

A teljes áramhullám — és így a feszültséghullám is — két haladó és két reflektált részből áll:

$$i(t)=e^{i\omega_0 t-\int \alpha(Z_0)dx}\Big[\Big(C_{z1+}e^{\int\sqrt{\Delta_2}dx}+C_{z2+}e^{\int\sqrt{\Delta_2}dx}\Big)+$$
$$+\Big(C_{z1-}e^{-\int\sqrt{\Delta_1}dx}+C_{z2-}e^{-\int\sqrt{\Delta_2}dx}\Big)\Big] \qquad (27)$$

ahol $\alpha(Z_0), \Delta_1, \Delta_2$ a távvezeték paraméterfüggvényétől függenek; C_{z1+}, C_{z1-}, C_{z2+} és C_{z2-} a peremfeltételek megszabta állandók. A közismert exponenciális tápvonal esete [13, 17] (27)-ből következik és akkor $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ lép fel.

A példa a módszerrel nyerhető eredmények új, általánosabb voltát kívánta mutatni. Részletesen [20]-ban található meg.

IV. Következtetések

1. Az [1] szerint inhomogén, de nem erősen inhomogén közegekben az elektromágneses hullámterjedést az inhomogén alapmódusok módszerével lehet tárgyalni. A módszerrel az $\bar{F}=\bar{F}_0 e^{j(\omega_0 t-\varphi)}$ alakú megoldások, ha léteznek, megkaphatók.

2. az inhomogén alapmódusok módszerének alkalmazása esetén a divergenciaegyenletek, mivel automatikusan kielégülnek, elhagyhatók.

3. Az Appleton—Hartree egyenletről kimutattuk, hogy nem létezik olyan diszperziós egyenlet (Eikonal-egyenlet), amelynek megfelelne, s így pontosabb vizsgálatok végzésére elvi okokból nem alkalmas.

4. Kiegészítés:

4.1. Az inhomogén alapmódusok módszere (például szukcesszív approximációval stb.) alkalmas a kvázihomogén és inhomogén esetek közé eső „átmeneti" típusú feladatok megoldására.

4.2. A kialakuló elemi hullám-módusok analízisét adja a módszer. A belőlük kialakuló eredő hullámmódusok tanulmányozásához megnyitja az utat.

IRODALOM

[1] *Ferencz Cs.:* Elektromágneses hullámterjedés inhomogén közegekben: Gyenge és erős inhomogenitások; HIRADÁSTECHNIKA, 1977. 1. sz.

[2] *Ferencz Cs.:* Elektromágneses hullámterjedés inhomogén, lineáris közegekben; Kandidátusi értekezés, MTA Könyvtár, Budapest, 1970.

[3] Cs. *Ferencz:* Wave Propagation in Inhomogeneous Linear Media; Acta Technica Hung.; *68,* 215, 1970.

[4] *K. G. Budden:* Radio Waves in the Ionosphere; Cambridge at the Univ. Press; 1966.

[5] *V. L. Ginzburg, A. A. Ruchadze:* Volnü v magnitoaktivnoj plazme; Izd. „Nauka"; Moszkva, 1970.

[6] *J. A. Ratcliffe:* The Magneto-Ionic Theory and its Applications to the Ionosphere; Cambridge at the Univ. Press; 1959.

[7] *L. B. Felsen:* Rays, Modes and Equivalent Networks; Proc. of the Fourth Coll. on Microwave Comm.; ET—9, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

[8] *J. J. Brandstatter:* An Introduction to Waves, Rays and Radiation in Plasma Media; McGraw—Hill Book Co., New York, 1963.

[9] Cs. *Ferencz:* Wave Propagation in Arbitrary Linear Media; Acta Technica Hung., *71,* 109, 1971.

[10] *M. Idemen:* The Maxwell's Equations in the Sense of Distributions; IEEE Trans. on Ant. and Prop.; *AP—21,* 736, 1973.

[11] Cs. *Ferencz, I. Ferencz, Gy. Tarcsai:* Refraction Problems and Wave Propagation in Doppler Geodetical Measurements; Nablj. I. Sz. Z.; *9,* 361, 1970.

[12] *J. A. Arnaud* and *A. A. M. Saleh:* Theorems for Bianisotropic Media; Proc. IEEE; *60,* 639, 1972.

[13] *K. Simonyi:* Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutsches Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.

[14] *I. E. Tamm:* Osznovi Teorii Elektricsestva; Izd. „Nauka" Moszkva, 1966.

[15] D. Drahos, Cs. *Ferencz, I. Ferencz, F. Horváth* and *Gy. Tarcsai:* Some Theoretical Contributions Concerning Doppler Geodetical Measurements; Space Research X., 43. North—Holland Publ. Co., Amsterdam, 1970.

[16] Cs. *Ferencz* and *Gy. Tarcsai:* Theoretical Explanation of the Solar Limb Effect; Planet. Space Sci., *19,* 659, 1971.

[17] *R. E. Collin:* Grundlagen der Mikrowellentechnik; VEB Verlag Technik, Berlin, 1973.

[18] E. *Kamke:* Differentialgleichungen, Lösungsmethoden Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.—G.; Leipzig, 1951.

[19] *S. Choudhary* and *L. B. Felsen:* Asymptotic Theory for Inhomogeneous Waves; IEEE Trans. on Ant. and. Prop. *AP—21,* 827, 1973.

[20] *Ferenczné Árkos I.:* Az inhomogén távvezetéken terjedő monokromatikus jel általános vizsgálata; Publikálás alatt.