DR. FERENCZ CSABA
Űrkutatási Kormánybizottság

# Elektromágneses hullámterjedés inhomogén közegekben: Gyenge és erős inhomogenitások

ETO 537.876.22

Mivel az elektromágneses hullámok inhomogén közegekben való terjedésének vizsgálata nemcsak időszerű, hanem eredményei mellett számos nyitott kérdéshez is vezetett, ezért szükséges a várhatóan általános konzekvenciákkal is járó kérdések további elemzése. A korábbiakhoz hasonlóan [1, 2, 3, 4] továbbra is menokromatikus jelet vizsgálunk, azaz exp $(j\omega t-\varphi)$ típusú megoldást keresünk. E megoldás egzisztenciájának kérdésével nem foglalkozunk, mivel a konkrét feladat közegjellemző és peremfeltétel függvényeinek vizsgálata döntheti el [3], hogy létezik-e a keresett alakú megoldás. Mivel azonban a Floquet-elmélet szerint [5] tisztázott, hogy $\overline{F}(\overline{x}+\overline{p}_i)=\overline{F}(\overline{x})e^{j\varphi_i}$ $i=1,\ 2,\ 3$ alakú megoldás egzisztencia-feltétele az $\omega=f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ diszperziós egyenlet létezése, ezért különös hangsúlyt helyezünk diszperziós egyenleten alapuló vizsgálatokra. A címnek megfelelően — figyelve a diszperziós egyenletekre — megvizsgáljuk az erős és gyenge inhomogenitásokra vonatkozó osztályozást az egyenletek megoldása szempontjából. Ahhoz, hogy ezt megtehessük először elemezni kell a diszperziós egyenleteket.

Vizsgálataink során a közeg-elektromágneses hullám kapcsolatot lineárisnak tekintjük, azaz a permeabilitás, permittivitás, stb. mennyiségek nem függenek az elektromágneses tér nagyságától, fázisától stb., legfeljebb a jel frekvenciájától.

## *I. Az eddigi felosztás vizsgálata*

Az eddigiekben [1, 3, 4, 6] azt az általánosan szokásos módot használtuk az inhomogenitásoknak erős és gyenge osztályba való sorolásnál, amely a Maxwell-egyenletekben szereplő deriváltak alaki vizsgálatán alapul. Ez röviden a következő:

$$\overline{F}=\overline{F}_0 e^{j(\omega_0 t-\varphi)} \tag{1}$$

alakú megoldást keresünk, ahol $\overline{F}$ a keresett elektromos, illetve mágneses térerősség stb. vektora, $\overline{F}_0$ az amplitúdó vektor (általánosan értelmezve), $\omega_0$ a monokromatikus jel frekvenciája, $t$ az idő, $\varphi$ a fázisfüggvény. A közegjellemző (permeabilitás, permittivitás stb.) tenzorok komponenseit jelöljük $a_{ik}$-val. Ekkor a Maxwell-egyenletekben —

$$\overline{\nabla}\times\overline{H}=\overline{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{E}=\mu_0\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla}\overline{B}=0$$

$$\overline{\nabla}\overline{D}=\varrho/\varepsilon_0 \tag{2}$$

ahol $\overline{E}$ az elektromos térerősség, $\overline{H}$ a mágneses térerősség, $\overline{D}$ az eltolási vektor, $\overline{B}$ az indukció, $\varepsilon_0$ és $\mu_0$ a vákuum permittivitása és permeabilitása értelemszerűen, $\overline{J}$ az elektromos áramsűrűség, $\varrho$ az elektromos töltéssűrűség — a differenciálásokat elvégezve az alábbi típusú tagokat kapjuk [3]:

$$\left(\frac{1}{a_{ik}}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}+\frac{1}{F_{0k}}\frac{\partial F_{0k}}{\partial x_i}-j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)a_{ik}F_k \tag{3}$$

ahol $x_i$ a független változókat jelenti.

Tudjuk, hogy homogén esetben $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=k_i=$ állandó és (3) a $(-jk_i a_{ik}\ F_k)$ ismert alakra vezet.

Legyen a továbbiakban a közegjellemző változása a $\lambda$ hullámhosszal összemérhető távolságon kicsi, azaz

$$\Delta a_{ik}=\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}\lambda\cong\eta$$

ahol $\eta$ elemien kicsi mennyiség. (3)-at $\lambda$-val szorozva és az egyes tagok nagyságát becsülve [3]:

$$\lambda\cdot(3)\cong\left[\frac{\eta}{a_{ik}}+\frac{\eta}{F_{0k}}-j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\lambda\right)\right]a_{ik}F_k\cong$$

$$\cong -j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}a_{ik}F_k\right)\lambda\sim -j(k_i a_{ik}F_k)\lambda \tag{4}$$

Így gyengén inhomogénnek neveztük azon közegeket, ahol a $j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ melletti többi tag elhanyagolható és erősen inhomogénnek, ahol ezt nem tehettük meg.

Önkényesnek tűnik azonban, ha részletesen megnézzük a (4) összefüggést, hogy bármennyire is kicsinyek az elhanyagolt tagok, mivel $j$-vei nincsenek szorozva, ezért nem feltételenül indokolt, hogy fontosságuk és nagyságuk megbecslésekor $j$-vei szorzott tag nagyságához mérjük azokat. (Fizikailag is eltérő a jelentésük, hiszen az amplitúdó, illetve a fázis menetét, változását írják le.)

### Állítás

Mivel csak homogén esetben tűnnek el a (4)-ben $j$-vei nem szorzott tagok és láthatóan bármely inhomogenitásnál megjelennek és a $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-k_i\right)$-vei össze-

Beérkezett: 1976. X. 2.

mérhetőek, a fenti — általánosan elfogadott — módon csak a kvázi-homogén közegeket definiáltuk. Az inhomogenitások osztályozása így megoldandó. feladat.

## *II. A Maxwell-egyenletek alakja*

A jelzett feladat megoldásához a Maxwell-egyenleteket kell megoldani terjedő elektromágneses jel esetén. Kezdjük ezért a vizsgálatot a (2) egyenletek alakjának elemzésével. Vizsgáljuk meg a $\bar{J}$ és a $\varrho/\varepsilon_0$ tagok szerepét. A hullámtani számításokban szokásos általános eljárás [1, 3, 6, 7, 8] bemutatására a plazmában való terjedésnél használatos leírási módot alkalmazzuk.

*a)* Mindenekelőtt meg kell jegyezni, hogy a két említett tagra érvényes a folytonossági egyenlet:

$$\operatorname{rot}\bar{H}=\bar{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{H}\equiv 0=\operatorname{div}\bar{J}+\varepsilon_0\operatorname{div}\left(\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right)$$

Másrészről

$$\operatorname{div}\bar{D}=\frac{\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Tehát — amíg feltehetjük, hogy

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\bar{D}),\qquad(5)$$

addig a szokásos formában érvényes a folytonossági egyenlet. (Ezért időben változó, inhomogén vagy időben „gyorsan", illetve „különlegesen" változó közegeknél a folytonossági egyenlet alakjai érvényességének vizsgálata fontos feladat.)

Innen esetünkben, feltéve (5) érvényességét

$$\bar{\nabla}\bar{J}+\frac{\partial\varrho}{\partial t}=0\qquad(6)$$

*b)* Előmágnesezett plazmában tudjuk [7, 8 stb.], hogy

$$\bar{J}=\bar{\bar{\sigma}}\bar{E}$$

ahol $\bar{\bar{\sigma}}$ a vezetőképesség tenzora.

Ekkor a plazmában — más hatás nem lévén addig, amíg linearizálható [3, 4, 6, 7] —

$$\operatorname{rot}\bar{H}=\bar{\bar{\sigma}}\bar{E}+\varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$$

és innen

$$\operatorname{rot}\bar{H}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\int\bar{\bar{\sigma}}\bar{E}\,dt+\bar{E}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}.$$

Ha exp $(j\omega_0 t)$ változást tételezünk fel, akkor

$$\operatorname{rot}\bar{H}=j\varepsilon_0\omega_0\left(\frac{\bar{\bar{\sigma}}}{j\varepsilon_0\omega_0}+\bar{\bar{1}}\right)\bar{E}=j\varepsilon_0\omega_0\bar{\bar{\varepsilon}}\bar{E}.$$

Ez egyben az $\bar{\bar{\varepsilon}}$ permettivitás definíciója ez esetben.

*c)* Tudjuk, hogy a közegjellemzők levezetése egyéb esetekben is teljesen hasonló jellegű. Így általában is bevezethetjük — amíg matematikailag egyáltalán értelmes — az eltolási vektor általánosított definíciójaként, a hullámterjedési vizsgálatok céljára, hogy

$$\bar{\mathcal{D}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int^{t}\bar{J}\,dt+\bar{D}\qquad(7)$$

(7)-et más alakban is használhatjuk:

$$\varepsilon_0\frac{\partial\bar{\mathcal{D}}}{\partial t}=\bar{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\qquad(8)$$

Határozzuk meg $\bar{\mathcal{D}}$ divergenciáját:

$$\operatorname{div}\bar{\mathcal{D}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}\left(\int^{t}\bar{J}\,dt\right)+\operatorname{div}\bar{D}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int^{t}(\operatorname{div}\bar{J})dt+\operatorname{div}\bar{D}.$$

Amíg (6) teljesül, addig, (2) utolsó egyenletét is figyelembe véve:

$$\operatorname{div}\bar{\mathcal{D}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int^{t}\left(-\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)dt+\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\equiv 0\qquad(9)$$

Tehát, ha az eltolási vektort (az általában kialakult gyakorlatnak megfelelően) ezentúl mindig (7), illetve (8) szerint értelmezzük, akkor:

### Állítás

Hullámtani vizsgálatokban az általánosság megszorítása nélkül elegendő a Maxwell-egyenletek

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}\times\bar{H}&=\varepsilon_0\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\\ \bar{\nabla}\times\bar{E}&=-\mu_0\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\\ \bar{\nabla}\bar{B}&=0\\ \bar{\nabla}\bar{D}&=0\end{aligned}\qquad(10)$$

alakú felírása, ahol $\bar{D}$ a (8)-ban $\bar{\mathcal{D}}$-vel azonos módon definiált. Így minden „közeghatás" $\bar{D}$-be és $\bar{H}$-ba tömörített (az aktív generáló hatásokat is beleértve). Az állítás jelen formájában mindaddig igaz, amíg (6) igaz.

### Megjegyzés

A (6) teljesülése nemcsak a vizsgált jelenségtől, hanem az alkalmazott modelhez tartozó közegjellemzőket leíró függvényektől (illetve disztribucióktól) is függ.

A (10) alakú felírás egyes gerjesztési kérdések vizsgálatánál lehet, hogy nem célszerű.

A továbbiakban a (10) alakú Maxwell-egyenletekkel dolgozunk.

*d)* Mielőtt (10) alapján áttérnénk a diszperziós egyenlet elemzésére, néhány, a további megállapítások érvényességi körét korlátozó megállapítást kell tenni. Az eredmények általánosítási módjára már mutattunk módszert [3, 4, 9], azonban az általánosítás elvégzése további feladat. Erre a jelen cikkben nem kerül sor.

*d.* 1) A jelenlegi vizsgálatban szigorúan monokromatikus jelet tételezzünk fel. Erre és a II/*a* pontra való tekintettel az időben változó közegekben való terjedés tárgyalását a jelenlegi vizsgálatból kizárjuk, mivel általános $S(\omega)$ spektrumű jelek vizsgálatát igényelné.

*d.* 2) A továbbiakban általános — bianizotróp — közegeket vizsgálunk, de ez esetben kirekesztjük a vizsgálatok köréből a mozgó közegeket. Ennek oka: Az áramló közegekre formálisan felírva a Maxwell-egyenleteket, azok bianizotróp alakot mutatnak [5, 10, 11, 12, 13, 14]. Ezért be szoktak vezetni bianizotróp, általános törésmutatót. E leírás azonban minden Doppler-hatást teljesen eltűntet. Ha valamiért jónak látják, akkor a Doppler-effektust külön összefüggésekkel veszik figyelembe [15, 16]. Ezek az eljárások önkényesek, s ellentmondanak a relativitás-elmélet szemléletének [3, 4].

Ezen túlmenően a szokásos vizsgálatok további nehézséget is felvetnek. Ezek egyike formai eredetű. A bianizotróp összefüggés $\overline{\mathrm{E}}$, $\overline{\mathrm{D}}$, $\overline{\mathrm{B}}$ és $\overline{\mathrm{H}}$ között 3-dimenziós vektorokkal bonyolult alakban írható le, a relativitás-elmélet 4-dimenziós elektromágneses tenzorai között formálisan sem adták meg. Ezért általában [5, 10, 11, 12, 13, 14] 6-dimenziós, egy 3-dimenziós elektromos és egy 3-dimenziós mágneses komponensből előállított vektorok között adják meg az ekkor egyszerű bianizotróp összefüggést, ami 6-dimeziós tenzor alakú, s a továbbiakban 6-dimenziós vektorokkal számolnak. E formális tárgyalás azonban lényegi ellentmondásban van a 4-dimenziós elektromágneses tenzorral [17], ezért minden további nélkül nem tűnik célravezetőnek az alkalmazása.

A másik nehézség, hogy a mozgó közegekben való elektromágneses hullámterjedés pontosabb vizsgálatai lényeges ellentmodásokat hoztak (síkhullám fázissebességének transzformálódása stb.) [17, 18, 19 20], s ezeket véglegesnek mondhatóan nem oldották fel. Nem hozott megoldást az egyes közegek jellemzőinek (permeabilitás, permittivítás stb.) relativisztikus körülmények közötti vizsgálata sem [17, 21].

E nehézségek oka szemléletesen a $\overline{\mathrm{D}}$ és $\overline{\mathrm{H}}$ bevezetésénél látszik. A terjedő energia megjelenési formáinak „álló" megfigyelő esetében lehetséges szétválasztását „mozgó" megfigyelőre úgy átvinni, hogy a szétválasztás formáját is definíciószerűen előírjuk, nem indokolt [3, 22]. Ezért csak az összenergia transzformálásán alapuló tárgyalás fogadható el. Erre más cikkben visszatérünk.

A fizikai képet szem előtt tartva korábban sikerült a gyakorlati vizsgálatok számára megfelelő sugárkövetési módszert adni mozgó közegek esetében (relativisztikus sugár-követés) [3, 24], amely számos, „rendhagyó" frekvenciaváltozás [27, 28, 29, 30, 31, 32] konzisztens és egységes magyarázatát is megadta [23, 24, 25, 26], s következtetéseit később például a Pioneer—6 kísérlet [33, 34] igazolta [40]. Így jelen esetben kizárhatjuk vizsgálataink köréből a mozgó közegeket, s az eredményeket később a fentieket szem előtt tartva általánosíthatjuk.

## III. A diszperziós egyenlet alakjai

*a*) Korábban [3, 4, 35] a diszperziós egyenletet időfüggetlen, nem mozgó, új definíciónk szerint kvázi-homogén esetben levezettük az alábbiak szerint:

$$\overline{\mathrm{F}}=\overline{\mathrm{F}}(\overline{r})\, e^{j[\omega_0 t-\varphi(\overline{r})]}.$$

Továbbá legyen

$$\overline{\mathrm{K}}=\mathrm{grad}\,\varphi \quad \text{és} \quad \overline{\mathrm{D}}=\overline{\overline{\varepsilon}}\,\overline{\mathrm{E}}$$

$$\overline{\mathrm{B}}=\overline{\overline{\mu}}\,\overline{\mathrm{H}}$$

Ekkor (10) a kvázi-homogenitást is figyelembe véve átírható:

$$\overline{\mathrm{K}}\times\overline{\mathrm{H}}=-\omega_0\varepsilon_0\overline{\overline{\varepsilon}}\,\overline{\mathrm{E}}$$

$$\overline{\mathrm{K}}\times\overline{\mathrm{E}}=\omega_0\mu_0\overline{\overline{\mu}}\,\overline{\mathrm{H}}$$

$$\mu_0\overline{\mathrm{K}}\,\overline{\overline{\mu}}\,\overline{\mathrm{H}}=0$$

$$\varepsilon_0\overline{\mathrm{K}}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\overline{\mathrm{E}}=0$$

Innen, ha [4]

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}}=\overline{\mathrm{K}}\times(\overline{\mathrm{K}}\times\ldots), \qquad \varepsilon=\overline{\overline{1}}+\overline{\overline{\varepsilon}},$$

$$\overline{\overline{\mathrm{P}}}=\overline{\mathrm{K}}\times\overline{\overline{\mathrm{e}}}\ldots, \qquad \overline{\overline{\mu}}=\overline{\overline{1}}+\overline{\overline{\mathrm{m}}}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{M}}}=\overline{\mathrm{K}}\times\overline{\overline{\mathrm{m}}}\ldots, \qquad k_0=\omega_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0},$$

akkor $\overline{\mathrm{E}}$-re vagy $\overline{\mathrm{H}}$-ra kifejtve — azonos módon — az egyenleteket, a nem triviális megoldás létét az ekvivalens módon kapott két (egyenértékű) diszperziós egyenlet (egyikének) teljesülése biztosítja. Ezek:

$$\left|\left(\frac{\overline{\overline{\Lambda}}}{k_0}+k_0\overline{\overline{\varepsilon}}\right)+\overline{\overline{\mathrm{M}}}\left(\frac{\overline{\overline{\Lambda}}}{k_0}+k_0\overline{\overline{\mu}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathrm{P}}}\right|=0$$

vagy (11)

$$\left|\left(\frac{\overline{\overline{\Lambda}}}{k_0}+k_0\overline{\overline{\mu}}\right)+\overline{\overline{\mathrm{P}}}\left(\frac{\overline{\overline{\Lambda}}}{k_0}+k_0\overline{\overline{\varepsilon}}\right)^{-1}\overline{\overline{\mathrm{M}}}\right|=0$$

Két nem lezárt kérdés azonban (11)-gyel (és levezetésével) kapcsolatban maradt. Az egyik, hogy a két diszperziós egyenlet ekvivalenciája a levezetésből ugyan következik, de közvetlenül nem látható be. A másik, hogy a (11) adott formában való létezéséhez az egyes determinánsokra teljesen általánosan nem feltétlenül teljesülő megkötéseket kell tenni.

Hipermátrixok determinánsa ugyanis, ha az $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ mátrix invertálható és a második lépés megtételekor feltételezzük, hogy a mátrixok felcserélhetőek [36]:

$$\begin{vmatrix}\overline{\overline{\mathrm{A}}} & \overline{\overline{\mathrm{B}}}\\ \overline{\overline{\mathrm{C}}} & \overline{\overline{\mathrm{D}}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{\overline{1}} & \overline{\overline{0}}\\ \overline{\overline{\mathrm{C}}}\,\overline{\overline{\mathrm{A}}}^{-1} & \overline{\overline{1}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\overline{\overline{\mathrm{A}}} & \overline{\overline{\mathrm{B}}}\\ \overline{\overline{0}} & (\overline{\overline{\mathrm{D}}}-\overline{\overline{\mathrm{C}}}\,\overline{\overline{\mathrm{A}}}^{-1}\overline{\overline{\mathrm{B}}})\end{vmatrix}=0 \quad (12)$$

illetve a felcserélhetőséget is kihasználva innen

$$\begin{vmatrix}\overline{\overline{\mathrm{A}}} & \overline{\overline{\mathrm{B}}}\\ \overline{\overline{\mathrm{C}}} & \overline{\overline{\mathrm{D}}}\end{vmatrix}=|\overline{\overline{\mathrm{A}}}\,\overline{\overline{\mathrm{D}}}-\overline{\overline{\mathrm{C}}}\,\overline{\overline{\mathrm{B}}}|=0 \quad (13)$$

A nullával való egyenlővé tétel (12)- és (13)-ban csak a diszperziós egyenlet felírásakor szükséges! (12) és (13) alapján láthatjuk, hogy a (11) alakjai és még más alakok is levezethetők, ha megkötéseket teszünk az egyes mátrixokra. E megkötések azonban egészen általánosan nem tehetők meg.

*b)* Fontos, hogy *a)* alapján látható az is, hogy 6-dimenziós formális leírást ugyan alkalmazhatunk, de a valódi kifejtéskor visszatérünk a 3-dimenziós alakra, s e visszatérésnél körültekintően kell eljárni.

*c)* A továbbiakban a tárgyalásmódot tekintve általános érvényűen, az egyes tenzorokra tett megkötések nélkül nézzük meg az időben nem változó és nem áramló, kvázi-homogén közegekre érvényes diszperziós egyenleteket. Egyidejűleg bebizonyítjuk a különböző alakok ekvivalenciáját közvetlenül is.

Az általánosság kedvéért bianizotróp közegeket vizsgálunk, ahol

$$\overline{D}=\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H} \qquad (14)$$
$$\overline{B}=\bar{\bar{\nu}}\overline{E}+\bar{\bar{\mu}}\overline{H}$$

vagy a fizikailag összetartozó $(\overline{E}, \overline{B})$ párosítás mellett

$$\begin{bmatrix}\overline{D}\\ \overline{H}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{P}} & \bar{\bar{L}}\\ \bar{\bar{M}} & \bar{\bar{Q}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{B}\end{bmatrix} \qquad (15)$$

ahol

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\bar{\bar{P}}-\bar{\bar{L}}\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{M}};\quad \bar{\bar{\varkappa}}=\bar{\bar{L}}\bar{\bar{Q}}^{-1}; \qquad (16)$$
$$\bar{\bar{\nu}}=-\bar{\bar{Q}}^{-1}\bar{\bar{M}};\qquad \mu=\bar{\bar{Q}}^{-1}$$

Ekkor a Maxwell-egyenletek:

$$\overline{K}\times\overline{H}=-\omega_0\varepsilon_0(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H})$$
$$\overline{K}\times\overline{E}=\omega_0\mu_0(\bar{\bar{\nu}}\overline{E}+\bar{\bar{\mu}}\overline{H}) \qquad (17)$$
$$\overline{K}(\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}+\bar{\bar{\varkappa}}\overline{H})=0$$
$$\overline{K}(\bar{\bar{\nu}}\overline{E}+\bar{\bar{\mu}}\overline{H})=0$$

ahol a (17) utolsó két egyenlete automatikusan teljesül, tehát elhagyható.

Bevezetve a

$$\bar{\bar{K}}=\begin{bmatrix}0 & -K_3 & K_2\\ K_3 & 0 & -K_1\\ -K_2 & K_1 & 0\end{bmatrix};\quad \bar{\bar{\Lambda}}=\bar{\bar{K}}\bar{\bar{K}} \qquad (18)$$

jelölést az egyenletek átrendezhetők

$$(\bar{\bar{K}}+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varkappa}})\overline{H}+\omega_0\varepsilon_0\bar{\bar{\varepsilon}}\overline{E}=0$$
$$(\bar{\bar{K}}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}})\overline{E}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\mu}}\overline{H}=0 \qquad (19)$$

Innen $\overline{E}$-re vagy $\overline{H}$-ra kifejtve (19)-et akkor létezik nem triviális megoldás, ha

$$|(\bar{\bar{K}}+\omega_0\varepsilon_0\varkappa)\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\bar{\bar{K}}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}})+k_0^2\bar{\bar{\varepsilon}}|=0$$

vagy (20)

$$|(\bar{\bar{K}}-\omega_0\mu_0\bar{\bar{\nu}})\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\bar{\bar{K}}+\omega_0 e_0\bar{\bar{\varkappa}})+k_0^2\bar{\bar{\mu}}|=0$$

Eközben a tenzorok teljesen általánosak lehetnek.

$\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}$, $\bar{\bar{\mu}}^{-1}$ és a többi tényező-tenzorok inverze megkötés nélkül létezik, mivel

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\bar{\bar{1}}+\bar{\bar{e}},\qquad \mu=\bar{\bar{1}}-\bar{\bar{in}};$$

s ez egyébként belátható az anyagjellemzők levezetéséből is. (Ezalól csak egyes veszteség-mentesként idealizált rezonanciaesetek kivételek. Ha ilyenkor ragaszkodunk a már semmiképp el nem elhanyagolható veszteségek elhanyagolásához, akkor meg kell vizsgálni, hogy melyik egyenlet-alak létezik a (20) lehetséges változatai közül.)

1. állítás

A (20) egyenletek ekvivalenciája az inverz-tenzorok léte miatt triviálisan belátható.

2. állítás

Mivel azonban $|\bar{\bar{K}}|=0$, $\bar{\bar{K}}^{-1}$ nem létezik. Ezért elhagyva a bianizotróp tagokat, az egyes egyenlet-átrendezések (20) most már bizonyítottan ekvivalens alakjai között nem végezhetők el. Az ekvivalencia bianizotrópnál egyszerűbb esetben közvetlenül nem látható be.

Megjegyzés: Megvizsgálva (19) hipermátrixának tenzorait, egyszerűen belátható, hogy azok általában nem cserélhetők fel. Ezért a pont ezekre az esetekre javasolt [5, stb.] 6-dimenziós formalizmus nemcsak, hogy formálisan ellentmond a 4-dimenziós relativisztikus képnek, hanem megnehezíti a számításokat is! (Azonban ez nem jelenti azt, hogy hibás eredményeket hoz automatikusan a 6-dimenziós tárgyalás, s így további vizsgálódást érdemel.)

## *IV. Erős inhomogenitások*

*a)* Ha az inhomogenitás nem tekinthető kvázihomogénnek, abban az esetben a (3)-ban szereplő összes tagot figyelembe kell venni. Ebben az esetben alkalmazható a terjedő elektromágneses hullámkép meghatározására az inhomogén alapmódusok módszere [3, 4, 38, 39]. Az összefüggéseket terjedelmük miatt ebben a cikkben nem ismételjük meg, korábbról ismertek. Azonban ezen egyenletek jellemzője, hogy magasabbrendű derivált sehol nem fordul elő bennük! Ez megkülönbözteti ezt a vizsgálati módot a továbbiaktól, s egyben korlátozza alkalmazási körét.

*b)* Erősebb inhomogenitások esetén, kevés korlátozó megkötést téve, a IV/*a*-tól eltérő módon is eredményre lehetett jutni [3, 9]. Ha nem hanyagoljuk el a magasabb rendű deriváltakat, akkor egyszerű anizotróp esetben ($\bar{\bar{\varepsilon}}$ vagy $\bar{\bar{\mu}}$ jellemzi magában a közeget).

$$|\bar{\bar{\Lambda}}+k_0^2\bar{\bar{\varepsilon}}-j(\overline{\overline{\mathrm{Grad}}\,\overline{K}}+\overline{\nabla}\overline{K}\cdot\bar{\bar{1}})|=0 \qquad (21.a)$$

illetve

$$|\bar{\bar{\Lambda}}+k_0^2\bar{\bar{\mu}}-j(\overline{\overline{\mathrm{Grad}}\,\overline{K}}+\overline{\nabla}\overline{K}\cdot\bar{\bar{1}})|=0 \qquad (21.b)$$

alakú diszperziós egyenlethez jutunk. Lényeges, az hogy ebben az esetben nemcsak a $\overline{K}=\overline{\mathrm{grad}\,\varphi}$, hanem annak deriváltjai is szerepelnek.

*c)* Ezen túlmenően ugrásfüggvények esetén (sugárkövetési módszer) sikerült általános módszert adni a terjedő jel meghatározásához [3, 4, 38, 39]. Ebben az esetben — többszörös törési-tükrözési törvény — az ugrásnál (nagyon erős inhomogenitás) a magasabbrendű deriváltak szintén megjelentek.

Hasonló jelenséget mutatnak a nem hullámterjedési célú, de a Maxwell-egyenleteket disztribúciók jelenlétében elemző első vizsgálatok [37].

*d)* Ha ezek után a közegjellemzőket ($\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\varkappa}}$, $\bar{\bar{\nu}}$ és $\bar{\bar{\mu}}$) és a rotáció képzést ($\overline{\nabla}\times\ldots=\bar{\bar{K}}_{\nabla}\ldots$) operátorként értelmezzük, akkor például $\bar{E}$-re kifejezve a Maxwell-egyenleteket, a következő alakot kapjuk:

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\bar{\bar{K}}_\nabla - j\omega_0 \varepsilon_0 \bar{\bar{\varkappa}})\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\bar{\bar{K}}_\nabla + j\omega_0 \mu_0 \bar{\bar{\nu}})\bar{E} = k_0^2 \bar{E} \quad (22)$$

($\bar{H}$-ra ekvivalens alakban létezik az egyenlet.) Jelen esetben eltekintünk a (22) egyenlet további elemzésétől, csak azt állapítjuk meg $\bar{\bar{K}}_\nabla$ ismételt alkalmazását látva, hogy erős inhomogenitások esetén általában nemcsak az elsőrendű, hanem a másodrendű deriváltak is szereplnek.

Gyengébb inhomogenitások esetén a másodrendű deriváltak kiesnek (a vegyes másodrendű deriváltak egyenlősége stb. ok miatt), illetve elhanyagolhatók.

## V. *Következtetések*

1. Valóban inhomogén közegekben a terjedő jelnek a fázisát (deriváltja a terjedési vektor) és az amplitúdó vektorát egyaránt befolyásolja a közeg.

Ha az amplitúdó-változásokat elhagyhatjuk, akkor a jelenséget célszerű kvázi-homogénnek nevezni.

Az inhomogén (gyengén inhomogén) és az erősen inhomogén közegeket tárgyalásuk során az különbözteti meg egymástól, hogy a Maxwell-egyenletek megoldásakor (el nem hanyagolható módon) megjelennek-e a szereplő mennyiségek (például: fázis) másodrendű deriváltjai is, vagy sem.

2. Közvetlenül bizonyítottuk az $\bar{E}$-re és $\bar{H}$-ra kifejtett Maxwelle-egyenletekből adódó diszperziós egyenletek ekvivalenciáját.

3. Vizsgálódásaink szerint a bianizotróp esetben sokszor kedvelt 6-dimenziós formalizmus részben nem jár valódi számítási egyszerűsítésekkel, részben formálisan nem illeszkedik a helytállónak elfogadott fizikai elméletekhez. Ezért használatától vagy célszerű eltekinteni, vagy nagyon körültekintően kell eljárni. (A 6-dimenziós leírásmód esetleges fizikai tartalmának — nem várható — kimutatása azonban messzemenő konzekvenciákkal járna.)

## IRODALOM


[1] *J. J. Brandstatter:* An introduction to Waves, Rays and Radiation in Plasma Media; McGraw—Hill Book Co., Inc.; New York, 1963

[2] *S. Choudhary* and *L. B. Felsen:* Asymptotic Theory for Inhomogeneous Waves; IEEE Trans. on. Ant. and Prop.; *AP—21*, 827, 1973.

[3] *Ferencz Cs:* Elektromágneses hullámterjedés inhomogén, lineáris közegekben; Kandidátusi értekezés, MTA Könyvtár; Budapest, 1970.

[4] *Cs. Ferencz:* Wave Propagation in Inhomogeneous Linear Media; Acta Technica Hung.; *68*, 215, 1970.

[5] *J. A. Arnaud and A. A. M. Saleh:* Theorems for Bianisotropic Media; Proc. IEEE; *60*, 639, 1972.

[6] *K. G. Budden:* Radio Waves in the Ionosphere; Cambridge at the Univ. Press; 1966.

[7] *W. P. Allis, S. J. Buchsbaum and A. Bers:* Waves in Anisotropic Plasmas; M. I. T. Press; Cambridge, Mass., 1963.

[8] *Ferenczné Árkos I.:* Az ionoszféra törésmutatója; Híradástechnika; *XXI.*, 219, 1970.

[9] *Cs. Ferencz:* Wave propagation in arbitrary linear media; Acta Technica Hung., *71*, 109, 1971.

[10] *J. A. Kong and D. K. Cheng:* Modified reciprocity theorem for bianisotropic media; Proc. IEE; *117*, 349, 1970.

[11] *I. V. Lindell:* On the Definiteness of the Constitutive Parameters of a Moving Anisortopic Medium; Proc. IEEE; *60*, 638, 1972.

[12] *D. K. Cheng and J. A. Kong:* Time-Harmonic Fields in Source-Free Bianisotropic Media; J. of. Appl. Phys.; *39*, 5792, 1968.

[13] *J. A. Kong and D. K. Cheng:* Wave Behavior at an Interface of a Semi-infinite Moving Anisotropic Medium; J. of Appl., Phys.; *39*, 2282, 1968.

[14] *D. Censor:* First-Order Propagation in Moving Media; IEEE Trans. on Microwave Theory and Techn.; *MTT-16*, 565, 1968.

[15] *D. Middleton:* A Statistical Theory of Reverberation and Similar Firts-Order Scattered Fields-Part. III.; IEEE Trans. on Inf. Theory; *IT—18*, 35, 1972.

[16] *D. Censor:* Propagation and Scattering in Radially Flowing Media; IEEE Trans. on Microwave Theory and Techn.; *MTT—17*, 374, 1969.

[17] *Novobátzky K.:* A relativitás elmélete; Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

[18] *I. E. Tamm:* Osznovy Teorii Elektricsestva; Izd. Nauka; Moszkva, 1966.

[19] *J. L. Synge:* Relativity, the Special Theory; North-Holland Publ. Co.; Amsterdam, 1965.

[20] *M. Laue:* Die Relativitätstheorie, I.; Fr. Vieweg und Sohn; Braunschweig, 1955.

[21] *G. Marx:* Das elektromagnestiche Feld in bewegten anisotropen Medien; Acta Phys. Hung.; *III.*, 75. 1953.

[22] *Károlyházy F.:* személyes közlés.

[23] *Cs. Ferencz and Gy. Tarcsai:* A New Experimental Possibility of Investigating the Solar Corona: Frequency Measurements on Radio Sources when Occultated by the Sun; Planet. Space Sci.; *18*, 1213, 1970.

[24] *Cs. Ferencz and Gy. Tarcsai:* Theoretical Explanation of the Solar Limb Effect; Planet. Space Sci.; *19*, 659, 1971.

[25] *Cs. Ferencz and Gy. Tarcsai:* Interaction of Gravitational and Electromagnetic Field or Another Effect? Nature; *233*, 404, 1971.

[26] *Cs. Ferencz and Gy. Tarcsai:* Refraction Effects due to Moving Media in Doppler Measurements; Space Research XII.; 595, Akademie-Verlag, Berlin, 1972.

[27] *D. Sadeh, S. H. Knowles and B. S. Yaplee:* Search for a Frequency Shift of the 21 centimeter Line from Taurus A Near Occultation by the Sun; Science; *159*, 307, 1968.

[28] *M. G. Adam:* Interferometric Measurements of Solar Wavelength and an Investigation of the Einstein Gravitational Displacement; Mon. Not. Roy. Astron. Soc.; *108*, 446, 1948.

[29] *L. A. Higgs:* The Solar Red-Shift; Mon. Not. Roy. Astron. Soc.; 121, 421, 1960.

[30] *C. E. StJohn:* Evidence for the Gravitational Displacement of Lines in the Solar Spectrum predicted by Einstein's Theory; Astrophys. J.; *57*, 195, 1928.

[31] *W. P. Birkemier, H. S. Merril, D. H. Sargent, D. W. Thomson, C. W. Beamer and G. T. Bergemann:* Observation of Wind-Produced Doppler-Shifts in Tropospheric Propagation; Radio Science; *3*, 309, 1968.

[32] *J. A. Jacobs and T. Watanabe:* Doppler Frequency Changes in Radio Waves Propagating Through a Moving Ionosphere; Radio Science; 1, 257, 1966.

[33] *P. Merat, J. C. Pecker and J. P. Vigier:* Possible Interpretation at an Anomalous Redschift Observed an the 2292 MHz Line Emitted by Pioneer—6 in the Close Vicinity of the Solar Limb; Astr. Astrophys.; *30*, 167, 1974.

[34] *A. A. Chastel and J. F. Heyvaerts:* Perturbations of Pioneer 6 telemetry signal during solar occulation; Nature; *249*, 21, 1974.

[35] *Cs. Ferencz:* Wawe Propagation in Inhomogeneous, Anisotropic, Time-Varying Medium, Per. Pol. E. E.; *12*, 347, 1968.

[36] *Lovass-Nagy V.:* Mátrixszámítás, Tankönyvkiadó; Budapest, 1956.

[37] *M. Idenem:* The Maxwell's Equations in the Sense of Distributions; IEEE Trans. on Ant. Prop.; *AP—21*, 736, 1973.

[38] *D. Drahos, Cs. Ferencz, I. Ferencz, F. Horváth and Gy. Tarcsai:* Some Theoretical Contributions Concerning Doppler Geodetical Measurements; Space Research X.; 43, North-Holland, Publ. Co., Amsterdam, 1970.

[39] *Cs. Ferencz, I. Ferencz and Gy. Tarcsai:* Refraction Problems and Wave Propagation in Doppler Geodetical Measurements; Nabl. I. Sz. Z.; *9*, 361, 1970.

[40] *Cs. Ferencz and Gy. Tarcsai:* Redshift During Pioneer—6 Solar Occultation-Unexplained or Predicted?; Nature, *252*, 615, 1974.