

DR. SALLAI GYULA
Posta Kísérleti Intézet

A digitális szűrők tervezésének alapelvei

ETO 621.372.54.037.37 : 1976:681.32

Jelen cikkben a mintavételező szűrők, ezen belül elsősorban a digitális szűrők tervezésének alapvető sajátosságait, problémáit, nehézségeit taglaljuk. A cikk a mintavételező szűrők típusait rendszerező, tulajdonságaikat ismertető [1] cikkhez csatlakozik. A digitális szűrők, amelyek a mintavételező szűrőosztály legfontosabb csoportját képezik, a mintavett és kvantált jelek lineáris feldolgozását végzik. Ennek megfelelően digitális léptető tárolókból, digitális szorzó és összeadó áramkörökből épülnek fel. A digitális szűrők szintézise az analóg RLC szűrők szintézisével szemben számos előnyös tulajdonsággal rendelkezik: szélesebb az előírható karakterisztikák köre, kisfokszámú alaptagok különösebb megkötések nélkül összekapcsolhatók, a szorzóegyütthetők értéke általában igen egyszerűen meghatározható stb. Ugyanakkor a digitális jelfeldolgozás újabb problémákat vet fel: a feldolgozandó jel és a szorzóegyütthetők kvantálásából zaj keletkezik, az átviteli karakterisztika periodikus, a digitális műveletvégzés nem elhanyagolható időt igényel stb.

A digitális szűrők tervezésének jellemző sajátosságait a lineáris hálózatok szintézisének négy lépése köré csoportosítva tekintjük át.

1. Megengedett függvények

Általános eset

A digitális, általában a mintavételező szűrőket egyértelműen leírja egy összetartozó kimeneti és bemeneti T -közű mintasorozat Z transzformáltjainak hányadosa. E z függvényt a szűrő $K(z)$ transzfer függvényének neveztük [1]. A digitális szűrők elemei összeadást, valós számmal végzett szorzást és késleltetési műveleteket végeznek. Mivel az egységnyi késleltetést a z tartományban z^{-1} írja le, $K(z)$ transzfer függvényként megengedett minden olyan z^{-1} -ben racionális valós együtthetős törtfüggvény, melynek nevezője — a stabil működés érdekében — egységnyinél kisebb abszolút értékű gyökökkel rendelkezik.

Azaz

$$K(z) = \frac{D(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_K z^{-K}}, \quad (1)$$

ahol $B(z) = 0$ gyökei $|z_i| < 1$.

Megjegyzések:

1. A lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve $b_0 \equiv 1$ legyen.

2. Ha $K(z)$ z -ben racionális törtfüggvényként adott:

$$K(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{d_0 z^P + d_1 z^{P-1} + \dots + d_M z^{P-M}}{z^Q + b_1 z^{Q-1} + b_K z^{Q-K}},$$

ahol $\min\{P-M, Q-K\} = 0$,

a $B(z)$ — gyökeire tett feltételen túlmenően — $D(z)$ -nél kisebb fokszámú nem lehet: $Q \geq P$.

3. A gyakorlatban $M=K$, $Q=P$.

4. A stabilitás elegendő feltétele:

$$b_0 \equiv 1 > \sum_{i=1}^K |b_i|.$$

A $K(j\omega)$ átviteli karakterisztikát stabil szűrők esetén a $K(z)$ transzfer függvényből $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel nyerjük. A $K(j\omega)$ tehát $K(z)$ -nek a $|z|=1$ egységkörön felvett értékei. Az átviteli karakterisztika részkarakterisztikáit, az amplitúdó és fázis-karakterisztikát az alábbi összefüggés definiálja:

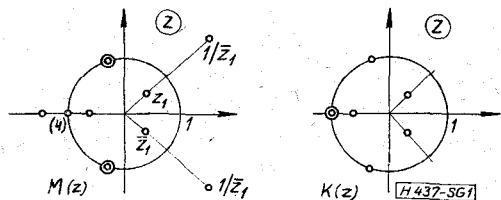
$$K(j\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}, \quad (2)$$

ahol az amplitúdó-karakterisztika négyzete a modulus:

$$M(\omega) = |K(j\omega)|^2 = K(z) \cdot K(z^{-1})|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{\sum_{i=0}^M D_i \cos i\omega T}{\sum_{i=0}^K B_i \cos i\omega T},$$

formában fejezhető ki. A D_i és d_i együtthetők kapcsolata

$$D_0 = \sum_{i=0}^M d_i^2 \quad D_i = 2 \sum_{i=0}^{M-K} d_i d_{i+K}.$$



1. ábra. Az $M(z)$ modulus és a hozzátartozó minimálfázisú $K(z)$ zérushelyei

Hasonló összefüggés van B_i és b_i között. Az $M(z)$ számlálója és nevezője tükröképpolinom, ezért gyökei négyes szimmetriában helyezkednek el. Ha z_i gyöke, akkor gyök $1/z_i$, \bar{z}_i , $1/\bar{z}_i$ is (1. ábra). Az $M(z)$ egységkörön belüli pólusaiból és az egységkörön belüli és egységkörüli páros multiplicitású zérusai feléből képzett $K(z)$ stabil és minimálfázisú. A fáziskarakterisztika:

$$b(\omega) = -\text{arc tg} \left. \frac{\text{Im}K(z)}{\text{Re}K(z)} \right|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{j}{2} \ln \left\{ \frac{K(z)}{K(z^{-1})} \right\}_{z=e^{j\omega T}}$$

A futási idő karakterisztika:

$$\tau(\omega) = \frac{db}{d\omega} = jz \left. \frac{db}{dz} \right|_{z=e^{j\omega T}} = \text{Re} \left\{ z \frac{d}{dz} \ln K(z) \right\}_{z=e^{j\omega T}}$$

A végtelen memóriájú (IIR) szűrők a digitális szűrők általános esetét képviselik: súlyfüggvényük végtelen sok T -körü impulzusokból áll, $K(z)$ transzfer függvényük (1) szerinti.

Véges memóriájú szűrők

A véges memóriájú (FIR) szűrők megengedett $K(z)$ transzfer függvénye z^{-1} -ben valós együtthatójú polinom, tehát (1)-ben $B(z^{-1})=1$. Így

$$K(z) = \sum_{i=0}^M d_i z^{-i} = \frac{d_0 z^M + d_1 z^{M-1} + \dots + d_M}{z^M}, \quad (3)$$

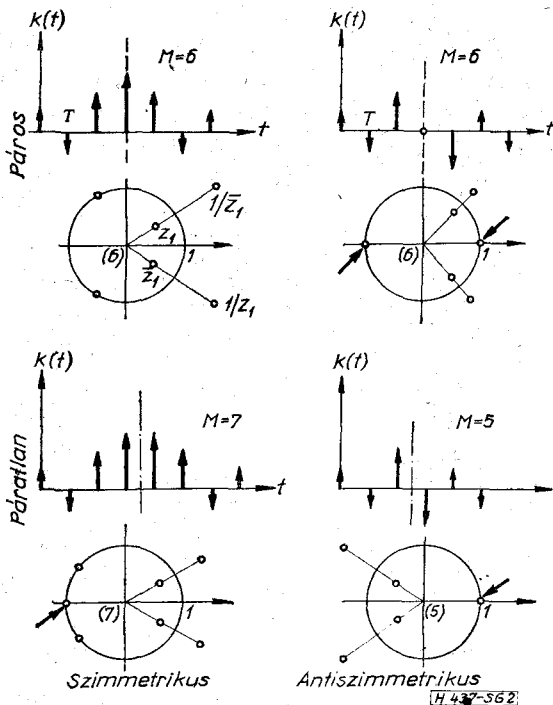
pólusai a z síkon az origóban vannak, súlyfüggvénye pedig

$$k(t) = \sum_{i=0}^M d_i \cdot \delta(t - iT).$$

A véges memóriájú szűrők legfontosabb osztályát a lineáris fázisú FIR szűrők képezik. Lineáris fáziskarakterisztika stabil IIR szűrővel nem érhető el. Közismert, hogy páros időfüggvény Fourier transzformáltja tiszta valós, páratlané tiszta képzetes. Eszerint ha a FIR szűrő súlyfüggvénye véges nemzérus tartományának közepére szimmetrikus vagy antiszimmetrikus, fázismentes lineáris lesz.

Ha $d_i = d_{M-i}$, akkor $\tau(\omega) = T \cdot M/2$ késleltetéstől eltekintve tiszta valós, ha $d_i = -d_{M-i}$, akkor ugyancsak $T \cdot M/2$ konstans késleltetést figyelmen kívül hagyva, tiszta képzetes $K(j\omega)$ karakterisztikát kapunk. Az együtthatókra tett feltételből következik, hogy

1. Szimmetrikus esetben, ha M páratlan $z = -1 (\omega = \pi/T)$ helyen $K(z) = K(\omega) = 0$;
2. Antiszimmetrikus esetben, ha M páratlan $z = 1 (\omega = 0)$ helyen, ha M páros $z = -1$ és $z = 1$ helyeken $K(z) = K(\omega) = 0$;



2. ábra. Lineárisfázisú FIR szűrők négy esete. Súlyfüggvény és zérus-pólus elrendezés a struktúrából adódó zérusok megjelölésével

3. a további zérushelyek reciprok párokat alkotnak (2. ábra) [2].

E megkötések következménye, hogy lineáris fázisú felületáteresztő csak páros fokszámú lehet, és differenciátort, kvadraturá szűrőt (Hilbert-transzformátor) páratlan fokszámú antiszimmetrikus esetben tervezhetjük előnyösebbé.

2. Approximációs módszerek

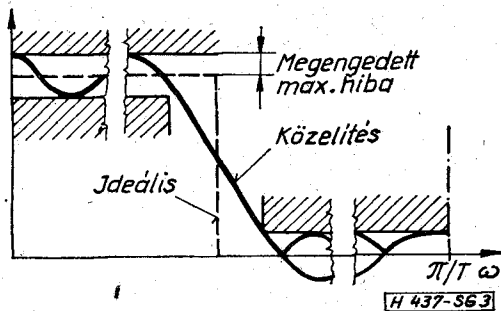
Az approximáció a követelmények megengedett $K(z)$ függvénnyel való kielégítését, a fokszám és a d_i , b_i polinomegyütthatók meghatározását jelenti.

A mintavételező szűrőkre előírható frekvenciatartománybeli követelmények (aluláteresztő, felüláteresztő, sávszűrő, sávzáró, differenciátor, kvadraturaszűrő stb.) vonatkozásában egy fontos és általánosan érvényes megkötést kell leszögezni. A mintavételező szűrők közös tulajdonsága, hogy $K(j\omega) \equiv K(f)$ átviteli karakterisztikájuk periodikus. Ha a mintavételezés T időközönként történik

$$K(f) = K\left(f + \frac{l}{T}\right) \quad \text{ahol } l \text{ egész.}$$

Ennek következménye, hogy tervezési előírásokat — figyelembe véve, hogy $K(f) = \bar{K}(-f)$ — csak a $(\nu/2T; (\nu+1)/2T)$, $(\nu=0,1,2 \dots)$ frekvenciasávok egyikére tehetünk. Általában feltesszük, hogy $\nu=0$, azaz az $1/2T$ ún. Nyquist frekvenciaig terjedő sávban adjuk meg a specifikációt (3. ábra). Az időtartományban ennek megfelelően a súlyfüggvény T -közű mintáira adhatunk előírást.

A mintavételező szűrők approximációja független attól, hogy analóg, kvázidigitális vagy digitális szűrő-



3. ábra. Frekvenciatartománybeli követelmény és egyenletes közelítése

1. táblázat

Appr. módszer	memóriájú szűrők			
	Véges $k(t); K(j\omega)$	Végtelen $A(\omega)$ + lin. fázis	Végtelen $k(t); K(j\omega)$	Végtelen $A(\omega); \tau(\omega)$
Nonlin opt.	M	E = M	M	M, N
Lineáris progr.	M	M	—	M, N
Fourier (ablak)	I = N	\tilde{M}, N	—	—
Leképzés $s \rightarrow z$	—	L, E	I	E, L
Spec., közvetlen z	—	L, E	N	E, L

E egyenletes
M minimax
M̄ közelítőleg M

N négyzetes
L max. lapos
I imp. invariáns

ről van szó. Lényeges különbség van azonban a véges és a végtelen memóriájú szűrők tulajdonságai, megengedett függvénye és ennek megfelelően approximációjuk között.

Mivel a megengedett $K(z)$ függvények osztálya igen széles, a szűrő idő- vagy frekvenciatartománybeli viselkedését teljesen specifikálhatjuk. Az 1. táblázat feltünteti a legfontosabb approximációs módszereket, a módszerrel tervezhető szűrőtípus teljesíthető előírásait. Az üresen hagyott helyeknek megfelelő eljárások nem ismeretesek. A véges memóriájú szűrőknél az amplitúdókarakterisztika approximációja lineáris fázis feltételezés mellett szerepel. A végtelen memóriájú szűrőknél az $A(\omega)$ előírás $M(\omega) = |A|^2$ modulussal való szokásos közelítése miatt a fázismentet nem egyértelmű, általában minimál fázisra választják. Lehetőség van mindentáterestők $\tau(\omega)$ karakterisztikájának, és együttes $A(\omega), \tau(\omega)$ előírás approximációjára is [3, 4]. Megjegyezzük, hogy egy szelektív $A(\omega)$ előírást lineáris fázisú FIR szűrővel lényegesen nagyobb, gyakorlatban kb. 3-szoros fókusz mellett elégíthetünk ki, mint minimálfázisú IIR szűrővel [2]. Ezzel fizetünk a diszperziómentességért.

A táblázatban szereplő betűk a közelítés lehetséges és szokásos jellegére utalnak. A közelítés hibája az előírt és a közelítő függvény különbsége, a $\tilde{H}(\omega)$ vagy a $h(t)$ valós hibafüggvény.

A legáltalánosabbnak a minimax (M) és az egyenletes, Csebisevi (E) közelítés számítanak. A tipikusan számítógépes minimax approximációnál a hibafügg-

vény abszolútértékének maximuma minimális. Valójában a hibafüggvényt elegendően nagy számú pontban vizsgálják, ellenőrzik. Egyenletes közelítésnél a hibafüggvény abszolútértékének több maximuma van és e maximumok egyenlők. Az egyenletes és minimax közelítés eredménye általában nem esik egybe, kivéve a lineáris fázisú FIR-szűrők bizonyos eseteit. A legkisebb négyzetes hibára (N) való közelítés esetén a hibafüggvény abszolútérték négyzetének integrálja minimális. Egy-egy pontban nagy hibát adhat. A maximálisan lapos, Rutterworth-közelítésnél (L) a közelítő függvény az előírt függvényhez egy vagy több frekvencián magasabb fokszámmal illeszkedik. Az impulzus invariáns (I) közelítés a közelítő és előírt súlyfüggvények mintavételi időpontokban való egyeztetését jelenti.

A digitális szűrők approximációja a legáltalánosabb értelemben *nonlineáris*, komplex approximációs feladat. Ha az abszolútérték négyzetét, a modult és/vagy a futási időt specifikáljuk, illetve a lineáris fázismentű FIR szűrőket tekintjük, a feladat valósra egyszerűsödik. További megkötésekkel nyernék lineáris programozási feladatot.

Végtelen memóriájú szűrők esetén a tetszőleges ω_i pontokban előírt F_i értékektől való eltérést minimalizálják

$$H_i = (|F_i| - |K_i|)^2 \quad i=1,2 \dots$$

minimax, vagy

$$H_0 = \sum_i (|F_i| - |K_i|)^2$$

négyzetes hiba [5] értelemben, különböző gradiens módszerekkel. Leggyakrabban alkalmazott eljárás Fletcher-Powell algoritmus [6]. H_i hibaként előírható kombinált csillapítás-futási idő követelmény is. Lineáris programozásra, az általánosságot korlátozva, különböző differenciál korrekciós eljárások felhasználásával jutunk [7].

Lineáris fázismentű FIR szűrők amplitúdókarakterisztikájára tett előírások optimális, egyenletes közelítése érhető el *nonlineáris* egyenletrendszer megoldásával [8], legelőnyösebben a Remez-féle kicserélő algoritmus különböző típusainak alkalmazásával [2, 9]. E módszerek az ún. *alternálási elven* alapulnak, amely szerint egyenletes közelítéshez a $H(\omega) = |F(\omega)| - |K(\omega)|$ hibafüggvénynek a fókusz és a specifikáció által meghatározott számban el kell érnie abszolútértéke maximumát, mégpedig az egymást követő helyeken ellentétes előjellel. Lépcsős előírás esetén a szélsőértékek száma

$$\frac{M+2-\mu}{2} + 2 \cdot u,$$

ahol $\mu=0,1,2$ a lineáris fázisú szűrők zérushelyeire tett megkötések száma (2. ábra), u az ugrások száma a $(0 \dots 1/2T)$ intervallumban.

A FIR szűrők minimax approximációjára általánosan használható módszer a *lineáris programozás* [10]. A rendszerint szimplex algoritmussal megvalósított módszernél az előírt ω pontokban kalkulált hibát minimalizálják. Legfontosabb és legkidolgozottabb megoldása az ún. frekvenciamintavételi eljárás, amelynél egyenlő távolságra levő ω_i pontokban specifikáljuk a karakterisztikát, néhány ω_i pontbeli

érték kivételével. Az átmeneti sávban 1...3 frekvenciatartománybeli érték szabadon hagyása, és ezekre vonatkozó optimalizálás kielégítő eredményt ad [11].

A FIR szűrőknek általános érvényű nem számítógéorientált approximációja is lehetséges. A Fourier sorfejtés segítségével legkisebb négyzetes hibával közelíthetjük a specifikációt, hiszen a FIR szűrők átviteli karakterisztikája

$$K(j\omega) = \sum_{i=0}^M d_i e^{-ij\omega T}$$

csonkított Fourier-sornak tekinthető. E módszer nagy hátránya, hogy az előírt $F(j\omega)$ szakadási helyeinek környezetében a hibafüggvény nagysága a fokszámtól függetlenül az ugrás kb. 9%-a. Ezt az ún. Gibbs-jelenséget a Fourier-sor együtthatóinak különböző simító ablakfüggvények (pl. Hamming-, Kaiser-, Dolph-Chebisev- ablakok) szerinti módosításával igyekeznek kiküszöbölni [10, 12-14]. Mivel az optimalizálás csak a specifikációtól független ablakfüggvényekre végezhető, ez az eljárás csak közelítőleg nyújt minimax approximációt.

Lépcsős specifikáció esetén IIR szűrőkre igen előnyösen használható a *leképzés*. A követelményeket az analóg szűrők frekvenciatartományába transzformáljuk, ott megfelelő $K(s)$ függvénnyel kielégítjük, végül az s síkot a z síkra képezzük le. A legáltalánosabb és legelőnyösebb leképzést a *bilineáris transzformációval*, az

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

helyettesítéssel érhetjük el. A transzformációval nyert $K(z)$ megfelelő előtorzítás esetén a követelményeket $K(s)$ -hez hasonló értelemben, ugyanazon hibával közelíti [2, 12-15]. A bilineáris leképzés a $K(s)$ függvényekre tett megszorítások esetén a FIR szűrőkre is kiterjeszhető [16]. A standard z leképzéssel a $K(s)$ -hez tartozó súlyfüggvény *impulzusinvariáns transzformációja* valósítható meg [2, 12-15].

Végezetül mindkét szűrőtípus esetén ismeretesek *speciális approximációs eljárások*, amelyek a közelítő $K(z)$ transzfer függvényt analitikus úton közvetlenül a z síkon állítják elő [2, 3, 13, 17]. Az egyenletes közelítéshez mindkét esetben trigonometrikus Csebisev polimokat használnak. Az eljárások egy része szoros rokonságban van az általában egyszerűbben megvalósítható bilineáris leképzéssel [2, 16].

Az approximációs elveket csak vázlatosan tekintettük át. Elsődlegesen alkalmazottnak FIR szűrők esetén az ablak módszer, IIR szűrők esetén a bilineáris transzformáció tekinthető. Ezek részletes ismertetése a Híradástechnikában már megtörtént [15], illetve a közeljövőben várható. Az eljárások egy széles körének részletes tárgyalása található a [18] cikkgyűjteményben.

3. Realizálás, kapcsolások

A digitális szűrők döntő többségben folyamatos jelefeldolgozási üzemben dolgoznak, végtelen memória esetén visszacsatolt, rekurzív kapcsolással, véges me-

mória esetén véges konvolúcióval, nonrekurzív kapcsolással [1]. Ilyen megszorítások között, a tervezés 3. lépése, a realizálás a követelményeket kielégítő $K(z)$ transzfer függvény készletét, szorzó és összeadó elemekkel való rekurzív vagy nonrekurzív megvalósítását jelenti, ami az összekapcsolás konkrét módjának és a szorzóegyütthatóknak a polinom-együtthatókból való meghatározását foglalja magába.

Egy adott $K(z)$ függvény különböző struktúrájú, felépítésű hálózatokkal realizálható. A különböző struktúrák esetén különbözők lehetnek: 1. a struktúrában foglalt egyes áramkörti elemek száma, 2. a szorzóáramkörökkel realizálandó szorzótényezők és 3. a pontossággal kapcsolatos másodlagos tulajdonságok, mint pl. együttható-érzékenység, kerekítési zaj. A másodlagos tulajdonságokkal, amelyek vizsgálata a struktúrák közötti választás szempontjából igen fontos a következő 4. szakaszban foglalkozunk.

Egy (M, K) fokszámú $K(z)$ függvény, feltételezve, hogy az együtthatók értéke nem 0 vagy 1, minimálisan $M+K+1$ darab szorzót, $M+K$ darab kétbemenetű összeadót és $\max(M, K)$ számú késleltető egységet tartalmaz. A minimális elemszámú felépítéseket kanonikusnak nevezzük. Jelen szakaszban áttekintjük az egyszerű, kanonikus standard alkapcsolásokat, valamint a másodlagos tulajdonságok szempontjából előnyösebb, bonyolultabb létra és rákapcsolásokat. Tetszőleges struktúra transzfer függvényének meghatározásához a függelék nyújt segítséget.

Standard alkapcsolások

A $K(z)$ transzfer függvény valós együtthatójú racionális törtfüggvény. Az ilyen függvények 3 szokásos felírási módja a transzfer függvény 3 alapvető standard realizálási formájára vezet:

Direkt:

$$K(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_K z^{-K}}; \quad (5)$$

Kaskád:

$$K(z) = \alpha_0 \cdot \prod_{i=1}^N \frac{1 + \zeta_{1i} z^{-1} + \zeta_{2i} z^{-2}}{1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2}}; \quad (6)$$

Párhuzamos:

$$K(z) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i} z^{-1}}{1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2}}. \quad (7)$$

A 2. és 3. formánál feltételeztük, hogy $M=K=2N$. Az összefüggésekben a $K(z)$ -t polinom alakban, másodfokú gyöktényezőkre bontva, és részlet-törtekre bontva írjuk fel. A három felírási módnak megfelelő struktúrákban ennek megfelelően különböző értékű szorzóegyütthatókat kell realizálni.

A *direkt realizálási formákban* a szorzóegyütthatók a $K(z)$ polinom alakjából közvetlenül leolvashatók. E követelményt kielégítő struktúrákat a digitális szűrő működését leíró

$$y_n = \sum_{i=0}^M d_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^K b_i y_{n-i}$$

différenca-egyenlet közvetlen megvalósításával kapunk. A differencia-egyenletet pontról pontra leképező struktúrát mutatja a 4. ábra. E D0 jelű struktúrát,

mivel a késleltetőket tekintve nem kanonikus, gyakorlatban nem használják. Átrendezésével jutunk az 5. ábrán látható már kanonikus, D1 és D2 struktúrákhoz. A D1 struktúra a transzfer függvény

$$K(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}} \cdot \sum_{i=0}^M d_i \cdot z^{-i}, \quad (8)$$

nevezőjét és számlálóját realizáló hálózatok kaszkád kapcsolása, az összekapcsolási oldalakon levő késleltetők összevonásával. A D2 struktúra pedig a polinomok Horner formájának,

$$K(z) = \frac{((d_M z^{-1} + d_{M-1})z^{-1} + d_{M-2})z^{-1} + \dots + d_0}{((b_K z^{-1} + b_{K-1})z^{-1} + b_{K-2})z^{-1} + \dots + i}, \quad (9)$$

alakjának realizálása.

Jól látható, hogy a véges memóriát realizáló nonrekurzív szűrők esetén ($b_i \equiv 0$), a visszacsatolások megszűnnek. A D0 és D1-ből így nyert kapcsolást transzverzálisnak (*T*) nevezzük. A D2-ből kiegyszerűsített struktúrának (*T2*) nincs nagy gyakorlati jelentősége.

A kaszkád realizálás a transzfer függvény gyöktényezőkre bontásán, a zérus-pólus elrendezés ismeretén alapszik. A kaszkád struktúrát első és/vagy másodfokú alaptagok soros kapcsolásával hozzuk létre (6. ábra). Az elsőfokú alaptaggal egy valós pólus és egy valós zérust, másodfokú alaptaggal két-két valós gyököt vágy egy-egy konjugált komplex gyökpárt realizálhatunk. A kaszkád struktúra (6) felírásában csak másodfokú alaptagok szerepelnek. Elsőfokú alaptagok alakja:

$$\frac{1 + \zeta_1 z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}}$$

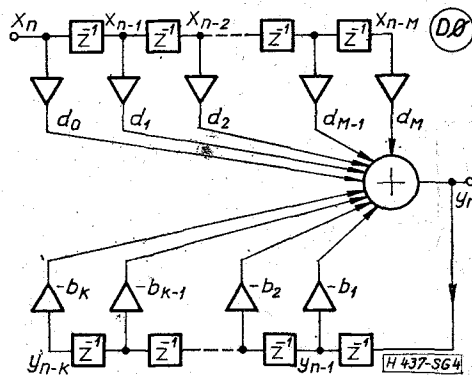
A teljes struktúrát leíró differencia-egyenletet tehát egy be- és egy kimenetű alaptagokkal reprezentálható első és/vagy másodfokú egyenletekre bontottuk fel. Az alaptagokat, amelyek jelen esetben ún. digitális kétpólusok, kanonikus direkt struktúrával valósítjuk meg. D1 típusú alaptagok láncba kapcsolásával a C1 (cascade) struktúrát, D2 típusú alaptagok esetén a C2 struktúrát kapjuk. A 6. ábra egy-egy másodfokú alaptagot is feltüntet. Látható, hogy a zérusok és pólusok realizálása függetlenül történik, tehát párbaállításuk első közelítésben tetszőleges lehet. A 6. ábrán szaggatottan bejelölt szorzó alkalmazásával a másodlagos tulajdonságok javíthatók. Természetesen az 5 szorzós alaptagok már nem kanonikusak [19].

Kaszkád kapcsolás a visszacsatolások megszüntetésével, nonrekurzív szűrők esetén is lehetséges.

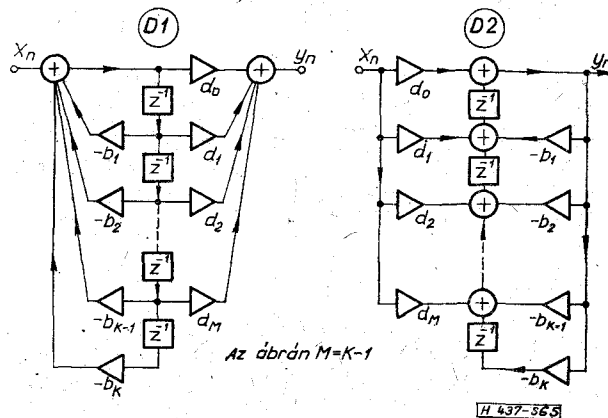
Megjegyezzük, hogy természetesen magasabb pl. negyedfokú direkt struktúrájú alaptagok kaszkád kapcsolásával is realizálhatjuk a transzfer függvényt. Ebben az esetben azonban már kevert, vegyes kapcsolásról van szó.

A párhuzamos realizálás a transzfer függvény részlettörtekre bontásán, pólusainak ismeretén alapszik. A párhuzamos struktúrát első és/vagy másodfokú alaptagok párhuzamos kapcsolásával hozzuk létre (7. ábra). Elsőfokú alaptaggal

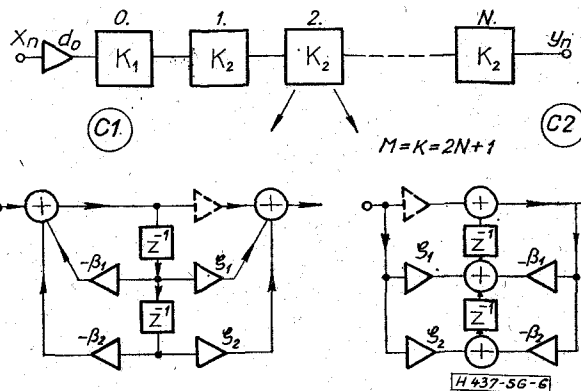
$$\frac{\gamma_0}{1 + \beta_1 z^{-1}},$$



4. ábra. Nemkanonikus direkt kapcsolás

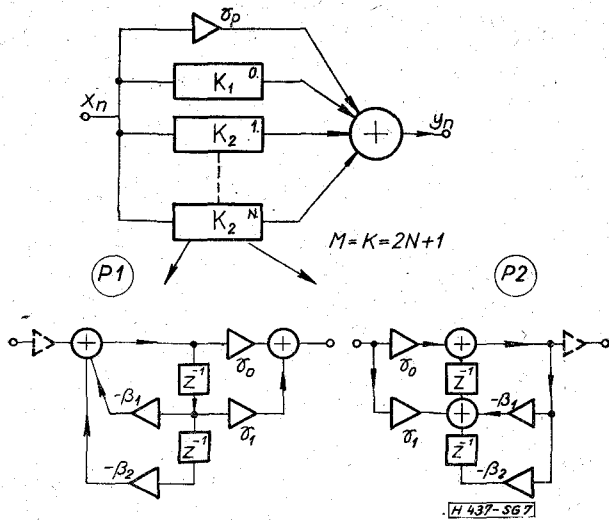


5. ábra. Kanonikus direkt kapcsolások



6. ábra. Kaszkád kapcsolás és alaptagok

egy $z = -\beta$ valós pólust, másodfokú alaptaggal két valós pólust vagy egy konjugált póluspárt realizálunk, lásd (7) kifejezést. Többszörös multiplicitású pólusok realizálása a kivitelezést már nehezkessé teszi, nonrekurzív szűrő párhuzamos struktúrájú realizálásáról pedig (K -szoros multiplicitású pólus van az origóban) szó sem lehet. A digitális kétpólusú alaptagok D1 vagy D2 típusú realizálásától függetlenül jönnek létre a P1 és P2 típusú párhuzamos struktúrák. A 7. ábrán egy-egy másodfokú alaptagot is megtekinthetünk. Ebben az esetben is, a szaggatottan rajzolt szorzó kiemelésével nagyobb pontosságú, de nem kanonikus alváltozat hozható létre [19].



7. ábra. Párhuzamos kapcsolás és alaptagok

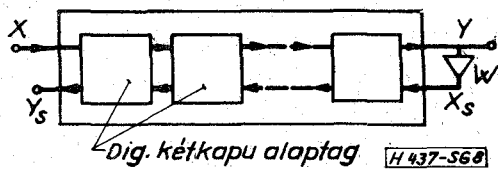
Nyilvánvalóan a kaskád és a párhuzamos struktúrák gazdaságosabb szűrők építését teszik lehetővé, mint a direkt struktúrák. A magasabb fokszámú szűrők egy be- és egy kimenetű alaptagokból állíthatók össze, így csak kis számú szabványos típusra van szükség. E szempontból a kaskád struktúra az előnyösebb, hiszen a másodfokú alaptagokkal tetszőleges karakterisztika, nonrekurzív is realizálható, míg párhuzamos elrendezéssel nem. A kaskád és párhuzamos struktúrák további előnye, hogy szorzótényezőik általában kevésbé szórnak, mint a polinom együtthatók. A szorzótényezőik kiszámítása szempontjából standard z transzformációs tervezés esetén a párhuzamos, bilineáris transzformáció esetén a kaskád kapcsolás előnyösebb.

Létra- és rácskapcsolások

A digitális szűrők létra- és rácsstruktúrájú realizálása jelenleg a kutatások előterében áll kedvező másodlagos tulajdonságaik következtében [20–28]. A létra- és rácsstruktúrájú szűrők többpólusú (több be- és/vagy kimenetű) alaptagokból épülnek fel, elrendezésük valamilyen értelemben létra- vagy rácsformát ölt.

A digitális szűrők láncmátrixos leírásán alapuló megoldások kaskádba kapcsolt két be- és két kimenetű (elfajult esetben egy kimenetű) alaptagokból állnak. A lánc végét W szorzóval visszacsatoljuk. Az ilyen lánc transfer függvénye (8. ábra):

$$K(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_{21}(z)}{1 - W \cdot T_{22}(z)}, \quad (10)$$



8. ábra. Digitális négypóluslánc lezárással

ahol

$$T_{21}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Big|_{X_s(z)=0}; \quad T_{22}(z) = \frac{Y(z)}{X_s(z)} \Big|_{X(z)=0},$$

lánemátrix paraméterek. Ha a megvalósítandó transzferfüggvény

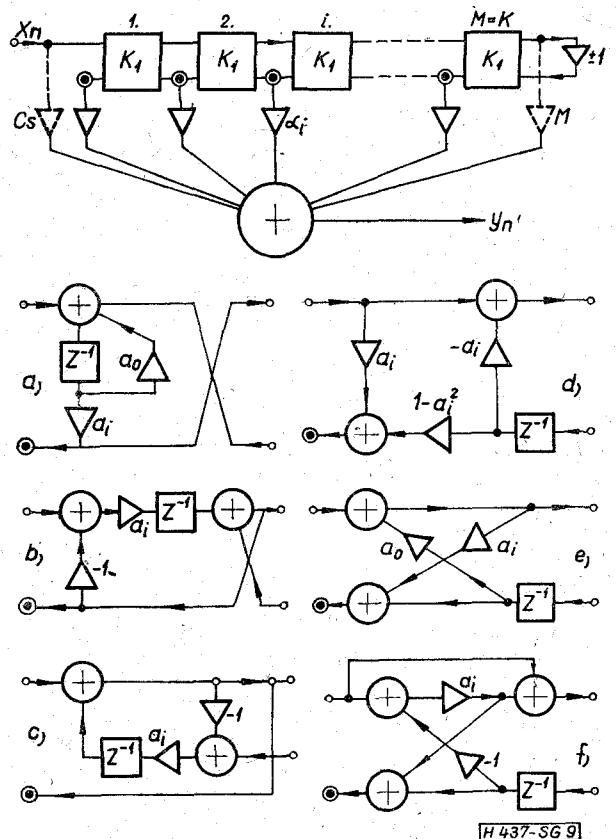
$$K(z) = \frac{z^K}{B(z)} = \frac{z^K}{B_1(z) + B_2(z)},$$

alakú, B1(z) páratlan, B2(z) páros résszel, akkor W rögzítésével T21(z) és T22(z) identifikálható, például W = -1 és páros K esetén

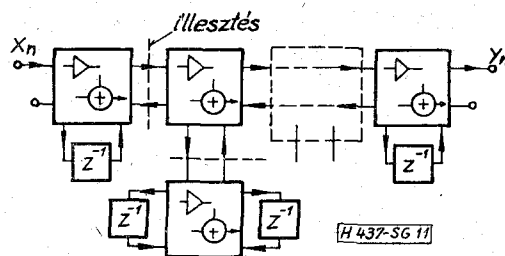
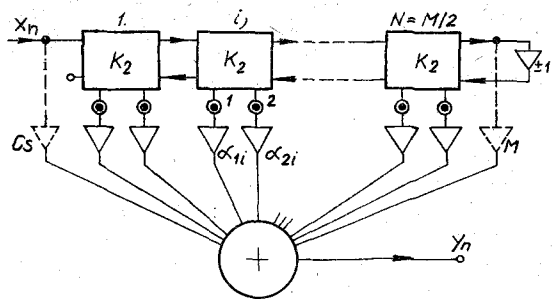
$$T_{21} = \frac{z^K}{B_2(z)}; \quad T_{22} = \frac{B_1(z)}{B_2(z)},$$

formában. T22(z) lánctörtekbe fejtésével közvetlenül a kaskádba kapcsolt a kétkapú alaptagokat kapjuk. Tetszőleges transfer függvényt a lánc leágaztatott jeleinek súlyozott összegezésével állíthatunk elő [24]. A W megválasztásával, az origó és végtelen körüli lánctörtekbe bontás váltogatásával, a lánctörtek különböző transzformációjával sokféle elrendezés érhető el. A W értéket további szorzó elkerülése érdekében általában +1 vagy -1-re választják. Az elrendések közös jellemzője, hogy az alaptagok létra- vagy rácsstopológiájúak.

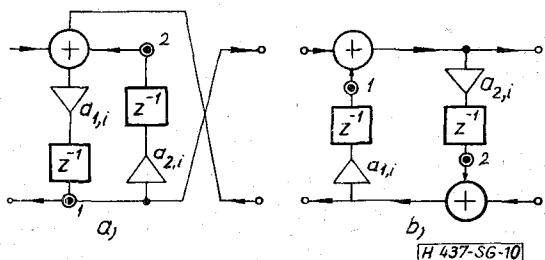
A 9. ábra elsőfokú alaptagokból felépített szűrőt és különböző alaptagokat mutat, a 10. ábra ugyanezt másodfokú alaptagok esetén ábrázolja. Az alaptagok általában csak a késleltetőkre nézve kanonikusak,



9. ábra. Elsőfokú alaptagokból álló leágaztatott lánc, a)–c) csatolt, d) Mitra-féle létra, e)–f) rács alaptagok



11. ábra. Hullámdigitális szűrő struktúrája



10. ábra. Másodfokú alaptagokból álló leágaztatott lánc. Kanonikus alaptagok: a) csatolt, b) létra

de mint az ábrák mutatják, az összes elem szempontjából kanonikus kapcsolás is elérhető. A kapcsolásokban az a_i és az a_i függő kifejezések az i -dik tag szorzótényezői. Az a_0 az összes tagban azonos értékű szorzótényezőt jelöl. Az alaptagok legfontosabb típusai az ún. *Mitra-féle alaptagok*, amelyek valódi létra- vagy rácsformát mutatnak [21–24], valamint az alaptagok két kimenetének közvetlen összekapcsolását feltételező hárompólusú ún. *csatolt alaptagok* [13, 24, 26]. A leágazó szorzók elhelyezésében a két típus különbséget mutat, a Cs jelű szorzó csak a csatolt, az M jelű csak a Mitra-féle kapcsolásoknál szükséges.

A *hullámdigitális szűrők* alkotják a létra- és rácskapcsolások másik nagy csoportját. Fettweis 1971-ben kimutatta [20], hogy léteznek olyan digitális szűrők, amelyek topológiailag megfelelnek az analóg szűrőknek, ha az átviteli függvények között a bilineáris transzformáció teremt kapcsolatot. Az ilyen szűrőket hullámdigitális szűrőknek (WDF) nevezik és digitális többkapú alaptagok illesztett összekapcsolásával jönnek létre (11. ábra). Hullámdigitális létra-

vagy rács-struktúrával minden olyan $K(z)$ transzfer függvény realizálható, amely bilineáris transzformációval származtatható a közönséges LC, az egység-elemes, vagy akár nonreciprok elemekből felépített létra- vagy rács-struktúrájú, veszteségmentes analóg referens szűrőkből [20, 27–29]. A hullámdigitális szűrők alaptagjai meglehetősen bonyolult felépítésűek, jellemzőjük, hogy a késleltető egységek az alaptagból kiemelhetők (11. ábra). A hullámdigitális szűrőkkel — nagy jelentőségük és számos speciális megfontolásuk miatt — a Híradástechnika egy önálló cikke foglalkozik [30].

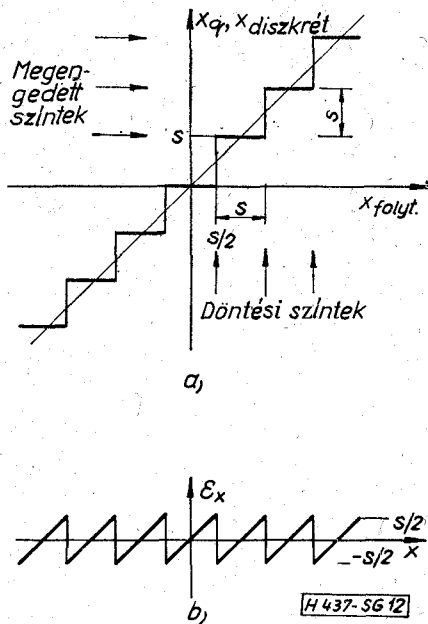
A digitális szűrők lehetséges felépítésének gyakorlati szempontból legfontosabb két osztályát tekintettük át. A legfőbb jellemzőket a 2. táblázat foglalja össze. A táblázatban már a másodlagos tulajdonságokra utaló együtthatóérzékenységi értékelést is feltüntettük. Határozott tendencia figyelhető meg az áramkörtől bonyolultság és az érzékenység között. A kapcsolások érzékenységi tulajdonságainak vizsgálatára a 4. szakaszban még visszatérünk.

4. Véges szóhosszúság hatása, pontosság

A tervezés negyedik lépése a megfelelő kapcsolás kiválasztása a $K(z)$ -t realizáló ekvivalens megoldások közül. A kiválasztás szempontja lehet a minimális elemszám, elsősorban a minimális számú szorzó (nagyobb a működési idejük), az egyszerű számíthatóság vagy minél kedvezőbb gyárthatóság, integrálhatóság. A legfontosabb szempont azonban a pontosság, ami a digitális szűrők lényegi sajátágánál fogva korlátozott [2, 18, 31, 32].

2. táblázat

Felépítés	STANDARD ALAP			LÉTRA ÉS RÁCS		
	Típusok, példák	DIREKT D1, D2 Transzv. T, T2	KASZKÁD O1, O2	PÁRH. P1, P2	CSATOLT -bilin. -bikvadr.	„MITRA” valódi -létra -rács
Alaptagok	—	dig. kétpólus		3p	4p	2np
Összekapcs.	kompakt	sorba	párh.	leágaztatott lánc		
Számítás	közvetlen	gyöktény.	részlettört	lánc-tört		
Nonrekurzív	lehet		nem	nem		
Kanonikus	igen	ált. Igen		lehet		ált. nem
Érzékenység	rossz	közepes		ált. jó		kítúnó



12. ábra. Kvantálási karakterisztika (a) és a kerekítés hibája (b)

A digitális áramkörök csak véges, diszkrét érték-készletű mennyiségek kezelésére képesek. E tulajdonság a folytonos érték-készletű mennyiségek diszkrété tételét, kvantálását, a megengedett diszkrét értékekre való kerekítést teszi szükségessé (12. ábra). Ennek következtében a digitális és a folytonos érték-készlettel dolgozó analóg jelfeldolgozással nyert eredmények különbözni fognak. *Kvantálási zajnak* az ideális analóg áramköri elemekből felépített szűrő kimeneti jelének és a digitális szűrő kimeneti jelének különbségét tekintjük.

A különböző diszkrét mennyiségeket véges jegyű bináris számmal írják le. Véges szóhosszúságú számok ábrázolják a bemeneti jelmintákat, a szorzó együtthatókat és a műveletvégzők bemeneti és kimeneti is véges szóhosszúságúak. Tehát kvantálási zaj jön létre: 1. a bemeneti jel analóg-digitális konverziója során, 2. a szorzó együtthatók kvantáltsága és 3. a kalkuláció kerekítési hibája következtében.

A kimeneten a kvantálás által okozott hiba függ: 1. a szóhosszúságtól (azaz a megengedett diszkrét értékek számától), 2. a számbábrázolás és a kerekítés módjától, röviden az aritmetika típusától, 3. a digitális szűrő struktúrájától.

A továbbiakban áttekintjük a pontosságot befolyásoló tényezőket, a kvantálási zaj forrásait. Megjegyezzük, hogy analóg jelek digitális feldolgozása esetén további hibát okoz a bemeneti analóg jel szükségzerű T időközű mintavételezése, valamint a kimeneten megjelenő diszkrét értékű impulzusok tartóáramkörrel és $1/2T$ határfrekvenciájú simító szűrővel való analóg jellé alakítása [14, 33].

Számbábrázolás

A számok digitális, gyakorlatilag bináris ábrázolása miatt kerekítési hibák lépnek fel és tetszőleges nagy számot sem lehet ábrázolni. A cél a számok ábrázolási módjának, a szavakban levő bitek számának, a kerekítés módjának és mértékének olyan megvá-

lasztása, amely — adott, megengedett költségkihatás mellett — minimális kvantálási zajt eredményez.

A számokat ábrázolhatjuk fix-pontosan és lebegő-pontosan. *Feltételezzük, hogy az F számot normalizáltuk úgy, hogy $|F| \leq 1$. Fixpontos ábrázolásnál az egyes bitek helyértékét írjuk elő. A legáltalánosabban alkalmazott kettes komplementes ábrázolás esetén a számot*

$$F = -a_0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_L 2^{-L}$$

formában írjuk le. A kódszó $L+1$ bitből áll (+1 az előjelbit), ahol a_i 0 vagy 1 lehet. Például $L=2$ esetén $F=0,25 \rightarrow 001$, $F=-0,25 \rightarrow 111$. Az F szám általában nem fejezhető ki pontosan L bittel, hanem — tegyük fel — $L+L^*$ bittel. Az L bites ábrázoláshoz a maradék L^* bitet vagy egyszerűen elhagyjuk, vagy előbb módosítjuk az első L digitet. A kvantálási zaj szempontjából az egyszerű levágással (truncation) szemben előnyösebb a kerekítés (rounding): ha a szám első elhagyandó bitje 1, akkor a számhoz hozzáadunk 2^{-L} -t, ha 0, akkor elhagyjuk a maradék biteket. A 12. ábra szerinti összerendelés a fixpontos, kerekítéses számbábrázolásnak felel meg. A kvantálási lépcsők nagysága $S=2^{-L}$, a közelítés abszolút hibája pedig, — a kerekítés miatt — $2^{-(L+1)} \leq \epsilon < 2^{-(L+1)}$ (12b ábra).

Lebegőpontos ábrázolásnál fixpontosan ábrázoljuk a mantissza-részt és a karakterisztika-részt:

$$F = \mu \cdot 2^v,$$

ahol $1 > |\mu| \geq 1/2$ és v egész szám. Lebegőpontos ábrázolásnál a számok szélesebb, a kitevő szóhosszúsága által meghatározott tartományát ábrázolhatjuk. A lebegőpontosan ábrázolandó F szám karakterisztikája

$$v = \text{ent} \{ \lg(F) \} + 1,$$

ahol $\text{ent}(\cdot)$ az egészrész-képzést jelöli. Az $F/2^v$ nagyságú mantisszát $L+1$ bittel, kerekítéses aritmetikával ábrázolva a közelítés relatív hibája $-2^{-(L+1)} \leq \epsilon < 2^{-(L+1)}$.

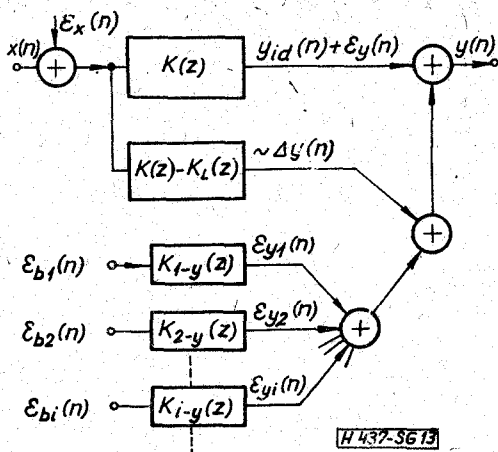
Digitális szűrők áramköri megvalósításai ritkán lebegőpontosak. Lebegőpontos számbábrázolással számítógépes megvalósításokban találkozhatunk.

Bemeneti minták kvantálása

A bemeneti jel kvantálásából származó zajjal csak analóg jelek digitális feldolgozása során és esetleges újrakvantálás során kell számolnunk. A kvantálást jól jellemzi a 12. ábrán látható lépcsős függvény. Az x_q kvantált jel

$$l \cdot S \quad (l = -q, -q+1, \dots, -1, 0, 1 \dots q-1)$$

diszkrét szinteket vehet fel. Az S a kvantálási lépcső. A kvantált $x_q(t)$ és a bemeneti $x(t)$ jelek különbsége az analóg-digitális konverzióból származó kvantálási zaj: $e_x(t) = x_q(t) - x(t)$. Bizonyítható, hogy ha a stacionárius $x(t)$ jel $w(x)$ amplitúdó-sűrűségfüggvényének Fourier-transzformáltja $\pm 2\pi/S$ sávon kívül azonosan nulla, a kvantálás hatása úgy tekinthető, mint egy $x(t)$ -től független, additív véletlen zajforrás a bemeneten, amelynek teljesítményátlaga $\sigma_x^2 = S^2/12$, várható értéke nulla (13. ábra). Ekkor a



13. ábra. A fixpontos aritmetikájú digitális szűrő zajmodellje

bemenethez kevert zaj amplitúdó eloszlása $(-S/2, S/2)$ tartományban egyenletes sűrűségű, teljesítményspektruma konstans, fehér. A kvantálандó $x(t)$ jelre említett feltétel gyorsan változó jelekre teljesül [34].

Ha a kvantálást $2q$ szintre végezzük, a kódolt fixpontos bináris szavak $L = \lg 2q$ jegyűek lesznek (előjelbit nélkül). A kvantáló pontosságára, a minimálisan szükséges bitek L számára két megfontolást teszünk. Mind a feldolgozandó jel dinamikájából, mind a konverzió megengedett kvantálási zajából meghatározható egy minimális L bites pontosság. Ha a minimális feldolgozandó jelszint x_{\min} és a maximális jelszint x_{\max} , a kvantálási lépcső x_{\min} -nál nem lehet nagyobb, tehát — az előjelbitet nem számítva — legalább

$$L = \lg(x_{\max}/x_{\min})$$

bitre van szükség. Ha a kvantálási zajra SNR dB jel-zaj viszonyt írunk elő, limitált Gauss eloszlást, $x_{\max}/3$ effektív értékű bemeneti jel esetén a minimális követelmény:

$$L + 1 = \frac{\text{SNR} + 10 \lg 3}{20 \lg 2} \approx \frac{\text{SNR}}{6} + 1.$$

Például 60 dB megengedett bemeneti jel-zaj viszonyhoz 6 + 1 bites, 128 szintes kvantálás szükséges.

A bemeneti additív kvantálási $\varepsilon_x(t)$ zaj áthalad a szűrőn. Mivel a szűrő lineáris, kimenete az ideális bemeneti jelre és a bemeneti kvantálási zajra adott válaszok összege. A kimeneti $\varepsilon_y(t)$ zaj várható értéke változatlanul zérus lesz, teljesítményspektruma állandósult állapotban

$$\frac{S^2}{12} \cdot |K(j\omega)|^2 = \frac{S^2}{12} M(\omega), \quad (11)$$

ahol $M(\omega)$ a digitális szűrő modulusa. A kimeneti zaj teljesítményátlaga, azaz szórása

$$\sigma_y^2 = \frac{S^2 T}{12 \cdot 2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} M(\omega) d\omega = \frac{S^2}{12} \sum_{i=0}^{\infty} k^2(iT) \quad (12)$$

A (12) számítására [35] mutat ügyes módszert. A kimeneti zaj korlátja:

$$|e_y(t)| \leq \frac{S}{2} \sum_{i=0}^{\infty} |k(iT)|.$$

Szorzóegyütthatók toleranciája

A $K(z)$ -t realizáló kapcsolás szorzótényezői csak véges pontossággal, véges szóhosszúsággal realizálhatók. Az együtthatókat például fixpontosan $L + 1$ bites kódszavakkal ábrázolva $2 \cdot 2^L$ számú különböző együtthatóérték lehetséges. A kvantálási lépcsőt most is S -sel jelölve a $[-2^L \cdot S; S \cdot (2^L - 1)]$ együttható-tartomány fogható át.

A véges L szóhosszúság miatt a $K(z)$ pólusai és zérusai eltolódnak, a megvalósított digitális szűrő $K(j\omega)$ átviteli karakterisztikája nem fog megegyezni az ideális $K(z)$ -ből $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel számítható $K(j\omega)$ karakterisztikával. A szelektív szűrők zárócsillapítása csökken, átmeneti tartománya megnövekszik [36]. Az együttható-toleranciák hatását a 13. ábra $K(z) - K_L(z)$ jelű blokkja jelképezi. Kimeneten a $\Delta y(n) + \Delta \varepsilon_y(n) \approx \Delta y(n)$ hibajel lép fel. A frekvenciatartománybeli hibát jól jellemzi az átviteli karakterisztikák különbségének négyzetes átlaga:

$$\frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |K(j\omega) - K_L(j\omega)|^2 d\omega. \quad (13)$$

A gyakorlati kiértékeléshez nagy fokszám esetén feltételezik, hogy az együtthatók toleranciái függetlenek [36]. Nonrekurzív szűrőknél az átviteli karakterisztika várható módosulása az S kvantálási lépcső nagyságával és a szűrő M fokszámának négyzetgyökével arányos [37].

Rekurzív szűrőknél az együtthatók véges pontosságának a $K(j\omega)$ megváltozásán túlmenő követelménye is lehet: a szűrő instabillá válhat. A pontatlanságok következtében $K(z)$ valamely pólusa vagy pólusai az egységkörön kívülre kerülnek. A szóhosszúság megválasztásánál ezért abból kell kiindulni, hogy a módosított átvitel se vezessen instabilitáshoz [12]. A szükséges szóhosszt jelentősen befolyásolja a rekurzív szűrő struktúrája. A struktúrák vizsgálatában felhasználhatók az érzékenység elméletének módszerei [38].

Műveletvégzés kerekítési hibái

Az összeadási és szorzási műveletek eredményeinek kerekítéséből származó hibák kimenetre gyakorolt hatása mind a számábrázolás módjától, mind a digitális szűrő struktúrájától jelentős mértékben függ.

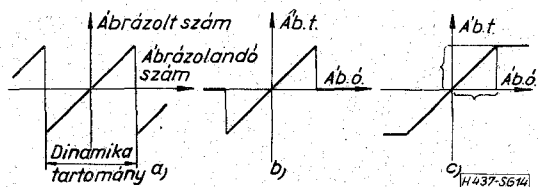
Fixpontos aritmetikával az összeadás pontosan elvégezhető: két L bites számot összeadva 2^{-L} -nél kisebb szám nem keletkezik, kerekítés tehát nincs. Ha viszont két fixpontos számot összeszorozunk, a legkisebb helyérték 2^{-2L} lesz, a pontos ábrázoláshoz tehát $2L$ bit kellene. Az L bitre való rövidítés akár kerekítéssel, akár levágással végezzük el, elkerülhetetlenül kvantálási zajt okoz. Belátható, hogy a kerekítés előnyösebb. Ha a bemeneti jel gyorsan változik, a szorzók kvantálási zaja független, additív fehér zajként fogható fel. A teljesítményátlaga $S^2/12 = 2^{-2(L+1)}/3$. Kimutatható, hogy egy kerekítési hiba kimenetre gyakorolt kedvezőtlen hatása annál nagyobb, minél hosszabb a hibajel útja a keletkezési helytől a kapcsolás kimenetéig [12]. A rekurzív szűrőknél e hatás tehát eleve nagyobb, mint nonrekurzív szűrőknél, hiszen a hiba visszakerül a hálózatba.

A 13. ábrán $\varepsilon_{b,1}(n), \dots, \varepsilon_{b,i}(n)$ jelképezi a szorzatok kerekítéséből származó zajforrásokat, $K_{i-y}(z)$ pedig az i -edik szorzó kimenete és a szűrő kimenete közötti transzfer függvény. Az $\varepsilon_{y,i}(n)$ kimeneti zajösszetevők teljesítményspektrumát és teljesítményátlagát (11) és (12) összefüggésekkel számolhatjuk, ahol most természetesen $K_{i-y}(j\omega)$ kerül a $K(j\omega)$ helyére [2, 32].

Lebegőpontos aritmetikával végzett összeadásnál a fixpontos aritmetikával szemben kerekítési hiba keletkezik, amely két közel azonos nagyságú szám egymásból való kivonása esetén — bármilyen nagy is a szóhossz — igen nagy lehet. Szorzásnál a mantisszákat fixpontosan szorozzuk, ami az előbb megismert hibával jár, a karakterisztikákat hibátlanul tudjuk összegezni. Az eredmény hibája tehát a szorzat nagyságrendjétől függ. A lebegőpontos aritmetikájú szűrő zajmodellje a 13. ábra szerintihez képest az összeadók hibájának reprezentálásával bővítendő [32].

Fixpontos aritmetikánál a kerekítések következtében két különböző típusú zavaró oszcillációval is számolni kell.

Ha a bemeneti jel lassan változik, több egymást követő mintája ugyanarra a kvantálási lépcsőre esik, a várt kimeneti jelhez periodikus zavarójel adódhat hozzá. Azt a sávot, amelyen belül a kimeneti jel konstans bemeneti jel esetén bármilyen értékre beállhat, illetve oszcillálhat, *holt sávnak* nevezzük. A holt sávhatást a bemeneti jelhez $S/2$ -nél kisebb amplitúdójú váltakozó előjelű jelet hozzáadva szüntethetjük meg.



14. ábra. Aritmetika karakterisztikák: a) komplement, b) nullázó, c) telítéses

A fixpontos összeadás során, ha az összeg a legnagyobb ábrázolható számnál nagyobb, *túlcsoordulás* lép fel. Ha az aritmetika komplement (14a ábra) vagy nullázó (14b ábra) típusú, visszacsatolt szűrő esetén oszcilláció jöhet létre. Az oszcillációt elkerülhetjük, ha a 14c ábrán látható telítéses aritmetika-karakterisztikát valósítjuk meg [18]. Legcélszerűbb természetesen a túlcsoordulás megelőzése. Úgy kell tervezni, hogy az összeadók kimeneti jele a legrosszabb esetben se lépjen ki a dinamika-tartományból. Ezt a bemeneti jelszint megfelelő mértékű csökkentésével érhetjük el legegyszerűbben. Bonyolultabb, de a jel-zaj viszony szempontjából előnyösebb, ha a jelszinteket a szűrő bizonyos pontjain skálázzuk át. Kaszkád és párhuzamos struktúrák esetén a 6. és 7. ábrán a szaggatottan jelölt szorzók megfelelő kiemeléssel nyert skálázó szorzók. A skálázó szorzók értékének optimális megválasztására ad általános módszert [19].

Struktúra és pontosság

A kvantálási zaj három forrása független, a kimeneten általuk okozott hiba összegződik (13. ábra). A szorzóegyütthatók és a műveletvégzés pontosságából fakadó kimeneti hiba nagymértékben függ a digitális szűrő felépítésétől.

Standard alapkapsolások

Fixpontos aritmetikánál a szorzótényezők, valamint a szorzat kerekítése miatt keletkező kvantálási zaj kimenetre gyakorolt hatása a direkt struktúránál a legnagyobb, mert a hiba bármilyen közel keletkezik is a kimenethez, a visszacsatolás miatt visszakerül a teljes hálózatba (D1) vagy a teljes visszacsatoló láncba (D0). Így a kvantálási zaj „útja” szempontjából a kaszkád és párhuzamos struktúra egyértelműen kedvezőbb.

A szorzótényezők ábrázolása szempontjából kedvezőtlen, ha azok széles tartományban szórnak. Kimutatható, hogy azonos szóhosszúság mellett a $K(z)$ gyökei párhuzamos és kaszkád kapcsolás esetén kevésbé tolódnak el, különösen éles vágású, meredek karakterisztikák esetén. Megfordítva: adott pontosságú, nagy fokszámú szűrő kaszkád vagy párhuzamos előállítással rövidebb szóhosszt igényel [32, 39]. A gyökök tehát a szorzótényezők megváltozására e két struktúra esetén érzéketlenebbek, mint direkt struktúráknál, ami e két struktúrát stabilitási szempontból is kedvezőbbé teszi.

A nonrekurzív szűrőstruktúrák (transzverzális, kaszkád) a rekurzív struktúrákkal szemben több vonatkozásban előnyösebbek. A visszacsatolás hiánya miatt 1. nincsenek stabilitási problémák, 2. az eredő kvantálási zaj lényegesen kisebb, 3. az együtthatók pontosságára, különösen élesvágású szűrők esetén kevésbé kényes [37, 40]. Mindezért a követelmények esetleg lényegesen magasabb fokszámmal való teljesíthetőségével fizetünk. A kaszkád struktúra esetén a szorzótényezők szórása, átfogása általában kisebb, mint a transzverzális struktúra súlyozó együtthatóinak átfogása [41].

Létrakapcsolások

A digitális szűrőknek minél kisebb együttható-szóhosszal való realizálására, azaz az együtthatókra nézve minél kevésbé érzékeny struktúrák létrehozására irányuló törekvés eredményezte a létrakapcsolások kidolgozását. Ilyen szempontból a kaszkád és párhuzamos struktúrák még nem érik el az analóg LC létra-szűrők érzéketlenségét. Bizonyítható [20, 42], hogy léteznek olyan digitális szűrők, amelyek topológiailag megfelelnek az analóg LC létra-szűrőknek, és pontosabb kalkulációt tesznek lehetővé, mint a standard struktúrák, vagy azonos pontosság mellett rövidebb szóhosszúságot igényelnek. Rács-struktúrával ugyanazon eredmény általában kevesebb áramköri elemmel elérhető [27]. A kutatások jelenlegi állása szerint a hullámdigitális, valamint a Mitra-féle és a hullámdigitális között álló többszörösen visszacsatolt struktúrák nyújtják a legkisebb érzékenységet [25, 27, 30, 43]. Az egyes felépítéseket adott szóhossz mellett a (13) szerinti mennyiséggel szokás összehasonlítani [44].

Függelék

Tetszőleges struktúra transzfer függvénye

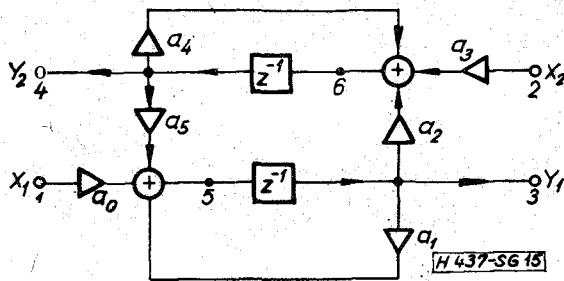
A digitális szűrőkapcsolások, struktúrák vizsgálatának első alapvető lépése a $K(z)$ transzfer függvény meghatározása. A függelékben tetszőleges számú bemenettel és kimenettel rendelkező, összeadókból, szorzókból és késleltetőkből felépített hálózat $K(z)$ transzfer mátrixának számítására ismertetünk egy általános érvényű módszert a bizonyítás mellőzésével [45].

A hálózat legyen n_1 bemenetű, n_2 kimenetű és a belső csomópontok számát jelölje n_3 . Az összegzők csomópontnak tekintendők. A hálózat a z tartományban az

$$\begin{bmatrix} Y(z) \\ W(z) \end{bmatrix} = H(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ Y(z) \\ W(z) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

mátrixegyenlettel írható le, ahol $X(z)$ a bemeneti, $Y(z)$ a kimeneti, $W(z)$ pedig a csomóponti változók vektora. $H(z)$ a hálózatot leíró mátrix, amely $n_2 + n_3$ sorból, $n_1 + n_2 + n_3$ oszlopból áll. A hálózatmátrix elemei a i -edik ($i=1, \dots, n_1 + n_2 + n_3$) pontot a j -edik ($n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3$) ponttal összekötő szorzó, késleltető egységeket jellemzik. A mátrixelemek így z^{-1} lineáris függvényei lesznek.

A mátrixelemek meghatározását a 15. ábrán látható struktúra ($n_1 = n_2 = n_3 = 2$) $H(z)$ hálózatmátrixának felírásával illusztráljuk. A szorzóegyütthatókat a_i -vel jelöltük.



15. ábra. Digitális kétkapu

$$H(z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{1 & 2}^{n_1} & \overbrace{3 & 4}^{n_2} & \overbrace{5 & 6}^{n_3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_2 \\ n_3 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ a_0 & 0 & a_1 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A $K(z)$ transzfer mátrix definíciós egyenlete:

$$Y(z) = K(z) \cdot X(z),$$

ahol a $K(z)$ elemei:

$$K_{i,j}(z) = \left. \frac{Y_i(z)}{X_j(z)} \right|_{X_l(z)=0, l \neq j}$$

A (14) mátrixegyenletből az n_1 oszlopú, n_2 sorú transzfer mátrix kifejezéséhez 1. $H(z)$ hálózatmátrix n_2, n_3 jelű oszlopaiból U egységmátrixot vonunk ki:

$$H'(z) = H(z) - [0; U].$$

Fenti példában ez a jobb alsó sarokból induló átlóban (-1) -ek megjelenését eredményezi. 2. A $H(z)$ mátrixot 6 részre particionáljuk:

$$H'(z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{\quad}^{n_1} & \overbrace{\quad}^{n_2} & \overbrace{\quad}^{n_3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_2 \\ n_3 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{matrix} \right\}$$

Látható, hogy az egységmátrix kivonása csak a P_{22} és P_{33} almátrixokat érinti. 3. Végül is a transzfer mátrix, a P_{33} almátrix invertálása után:

$$K(z) = -(P_{22} - P_{23} \cdot P_{33}^{-1} \cdot P_{32})^{-1} \cdot (P_{21} - P_{23} \cdot P_{33}^{-1} \cdot P_{31}).$$

Ha a struktúra egy be- és egy kimenetű ($n_1 = n_2 = 1$), valamint a kimeneten közvetlen hurok nincs, a $K(z)$ transzfer függvény

$$K(z) = \frac{P_{21} - P_{23} \cdot P_{33}^{-1} \cdot P_{31}}{1 + P_{23} \cdot P_{33}^{-1} \cdot P_{23}}$$

alakú lesz. A dőlt, kövér betűk a vektorra egyszerűsödött almátrixokat jelölik.

Példánkban a $K(z)$ mátrix részét képező $K_{1,2}(z)$ transzfer függvény:

$$K_{1,2}(z) = \left. \frac{Y_1(z)}{X_2(z)} \right|_{X_1(z)=0} = \frac{a_3 a_5 z^{-2}}{1 - (a_1 + a_4)z^{-1} + (n_1 a_4 - a_2 a_5)z^{-2}}$$

IRODALOM

- [1] Sallai Gy.: A mintavételező (digitális) szűrők osztályozása. Híradástechnika. 27. k. 7. sz. 1976.
- [2] Rabiner, L. R., Gold B.: Theory and application of digital signal processing. Prentice-Hall Inc. London. 1975.
- [3] Thiran, J. P.: Equal-ripple delay recursive digital filters. IEEE Trans. Circuit Theory. Vol. 18. No. 6. 664-669. Nov. 1971.
- [4] Rhodes, J. D.—Fahmy, M.I.F.: Digital filters with maximally flat amplitude and delay characteristics. Int. J. Circuit Theory Appl. Vol. 2. No. 1. 3—13. March. 1974.
- [5] Steiglitz, K.: Computer-aided desing of recursive digital filters. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. 18. 123—129. June 1970.
- [6] Felcher R., Powell M.: A rapidly convergent descent method for minimaxization. Computer J. Vol. 6. No. 2. 163—168. 1963.
- [7] Dudgeon, D.: Recursive filter design using differential correction. IEEE Trans. Acoustics, Speech Signal Proc. Vol. 22. No. 6. 443—448. Dec. 1974.
- [8] Hermann O.: Design of nonrecursive digital filters with linear phase. Electronics Letters. Vol. 6. No. 11. 328—329, 1970.
- [9] Hofstetter E., Oppenheim A., Siegel, J.: On optimum nonrecursive digital filters. Proc. 9th Allerton Conf. on Circuit and System Theory. 789—798. Oct. 1971.
- [10] Helms, H. D.: Digital filters with equiripple or minimax responses. IEEE Trans. Audio El. acoustics. Vol. 19. No. 1. 87—93. March 1971.
- [11] Rabiner, L. R.—Gold B.—Mc Gonegal, C. A.: An approach to the approximation problem for nonrecursive digital filters. IEEE Trans. Audio El. acoustics. Vol. 18. 83—106. June. 1970.
- [12] Kaiser, J. F.: Systems analysis by digital computer. Mc John Wiley. New York. 1966. 7. fejezet.
- [13] Rader, C. M., Gold B.: Digital processing of signals. Mc Graw-Hill. New York 1966.

- [14] *Sallai Gy.—Géher K.*: Digitális szűrők. Tanulmány a Műszeripari Kutató Intézet számára. Budapest, 1974.
- [15] *Kormos I.*: Digitális szűrők. Híradástechnika. 24. k. 9. sz. 269—276. 1973.
- [16] *Sallai Gy.*: On approximation of finite-impulse-response digital filters. Colloquium on Circuit Theory. Előadás. Prague 1975.
- [17] *Hermann, O.*: On the approximation problem in nonrecursive digital filter design. IEEE Trans. Circuit Theory Vol. 18. No. 3. 411—413. May 1971.
- [18] *Rabiner, L. R.—Rader C. M.*: Digital signal processing. IEEE Selected reprint series. 1972.
- [19] *Jackson, L. B.*: Roundoff noise analysis for fixed-point digital filters realised in cascade or parallel form. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. 18. 107—122. June 1970.
- [20] *Fettweis, A.*: Digital filter structures related to classical filter networks. AEÜ. Vol. 25. 79—89. 1971.
- [21] *Mitra, S. K., Sherwood R.*: Canonical realisations of digital filters using the continued fraction expansion. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. 20. 185—194. Aug. 1972.
- [22] *Mitra, S. K. Sherwood R.*: Digital ladder networks, IEEE Trans. Audio, Electroacoust. Vol. 21. 30—36. Febr. 1973.
- [23] *Gray, A. H., Markel J. D.*: Digital lattice and ladder synthesis. IEEE. Trans. Audio Electroacoust. Vol. 21. No. 6. 491—500. Dec. 1973.
- [24] *Mitra, S. K. Huey, D. C., Sherwood, R. J.*: New methods of digital ladder realisation. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. 21. No. 6. 485—491. Dec. 1973.
- [25] *Gensel, J.*: A new structure for digital filters with low coefficient sensitivities. Proc. 5th Microwave Comm. Coll. 2. k. 121—130. Budapest, 1974.
- [26] *Mitra, S. K.—Sagar, A. D.*: Realization of digital filters in coupled bilinear form. Proc. 5th Microwave Comm. Coll. 2. k. 169—179. Budapest, 1974.
- [27] *Fettweis, A., Levin, H., Sedlmeyer, A.*: Wave digital lattice filters. Int. J. Circuit Theory Appl. Vol. 2. No. 2. 203—211. June. 1974.
- [28] *Fettweis, A.*: Wave digital filters with reduced number of delays. Int. J. Circuit Theory Appl. Vol. 2. No. 4. 319—330. Dec. 1974.
- [29] *Fraiture, L.—Neirynch, J.*: Theory of unit element filters. Revue HF, Vol. 7. 325—340. 1969.
- [30] *Osoth L.*: Hullámdigitális szűrők. Híradástechnika (megjelenés alatt).
- [31] *Oppenheim A. V., Weinstein C. W.*: Effects of finite register length in digital filters and the fast Fourier transform. Proc. IEEE Vol. 60. No. 8. 957—976. Aug. 1972.
- [32] *Liu, B.*: Effect of finite word length on the accuracy of digital filters. A review. IEEE Trans. Circuit Theory. Vol. 18. No. 6. 670—677. Nov. 1971.
- [33] *Huelsman, L. R.*: Active filters: Lumped... digital... Mc Graw Hill, New York, 1970.
- [34] *Widrow, B.*: Statistical analysis of amplitude-quantized sampled data systems. AIEE Trans. Appl. Ind. Vol. 79. 556—568. Jan. 1961.
- [35] *Mitra, S. K., Hirano K., Sakaguchi H.*: A simple method of computing the input quantization and multiplication roundoff errors in a digital filter. IEEE Trans. Acoustics, Speech Signal Proc. Vol. 22. No. 5. 326—329. Oct. 1974.
- [36] *Knowles, J. B., Olcayto, E. M.*: Coefficient accuracy and digital filter response. IEEE Trans. Circuit Theory. Vol. 15. 31—41. March. 1968.
- [37] *Ghan, D. S.—Rabiner L. R.*: Analysis of quantization errors in the direct form for FIR digital filters. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. 21. No. 4. 354—366. Aug. 1973.
- [38] *Géher K.*: Theory of network tolerances. Akadémiai Kiadó, Budapest. 1971.
- [39] *Jackson, L. B.*: On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters. BSTJ. Vol. 49. 159—184. Feb. 1971.
- [40] *Sallai Gy.*: A transverzális szűrő toleranciaanalízise. Híradástechnika, 24. k. 7. sz. 193—201. 1973.
- [41] *Chan, D. S., Rabiner, L. R.*: Theory of roundoff noise in cascade realisation of FIR digital filters. BSTJ. Vol. 52. No. 3. 329—345. Mar. 1973.
- [42] *Crochiere, R. E.*: Digital ladder structures and coefficient sensitivity. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. 20. 240—246. Oct. 1972.
- [43] *Brueton, L. T.*: Low-sensitivity digital ladder filters. IEEE Trans. Circuit Syst. Vol. 22. No. 3. 168—176. Mar. 1975.
- [44] *Vich, R.*: Degeneration of the transmission properties of a digital filters by coefficient quantisation. Nachrichtentechnik, Elektronik. Vol. 25. No. 9. 342—344. 1975.
- [45] *Thielman, H.*: Computer aided design of digital filters. Proc. of 5th Microwave Comm. Coll. 2. k. 279—286. Budapest, 1974.