

PAP LÁSZLÓ

BME Híradástechnikai Elektronika-Intézet

A Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet és alkalmazása a híradástechnikában

ETO 519.216:621.391.8

A sztohasztikus folyamatokkal vezérelt dinamikus nemlineáris rendszerek vizsgálatának fontos kérdése a válaszfüggvény statisztikai jellemzői valószínűségi eloszlásfüggvényeinek vagy (amennyiben létezik) sűrűségfüggvényének meghatározása. Stacioner vezérlő források esetén ez a feladat két részre osztható: (i) a tranziens-analízis és (ii) az állandósult állapot vizsgálata. Ez utóbbihoz tartozik a teljesítményspektrum meghatározása is. Amennyiben a vizsgált rendszer állapotai többdimenziós Markov-folyamattal jellemezhetők, külön kérdés lehet annak az időnek (first passage time [1]) a várható értéke, amely alatt adott kezdeti feltételből a rendszer az állapottérben a tranziens során valamely korlátozó hiperfelületet elér. A gyakorlati feladatok egy részében a fenti kérdések megválaszolásakor jól használható a sztohasztikus térelmélet és a Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet. A téma először a véletlen lépések elmélete, a Brown-mozgás és a diffúziós folyamatok kapcsán vetődött fel, és csak az 50-es évektől kezdve vált az áramkör- és rendszertervező mérnök gyakorlati problémájává.

A cikk célja a témában elért legfontosabb eredmények bemutatása és olyan általános módszer ismertetése, amely a fehér Gauss-folyamatokból lineáris vagy nemlineáris szűrővel előállított vezérlőjelek esetén alkalmas a korábban felvetett kérdések megválaszolására. A továbbiakban bemutatott eredmények részben az [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] forrásokban közöltek összefoglalása, részben azok kiegészítése a véges korrelációs idejű [11] Gauss-folyamatok és a stacioner determinisztikus jelek esetére. A Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet igen fontos szerepet játszik az általános szinkronizáló rendszerek és PLL-hurkok analízisében [1, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24], az oszcillátorok zaj által okozott zavarainak vizsgálatában [25, 26] és a dinamikus szabályzó rendszerek elméletében [10, 27].

1. A probléma felvetése és az előzmények áttekintése

A feladat, melyet teljes általánosságában először A. N. Kolmogorov [28] tárgyalt a következőképpen

fogalmazható meg. Adott egy $\{\eta(t), t \in T\}$ időbeli sztohasztikus folyamat, amelynek teljes statisztikai leírása ismert. Adott ezen kívül egy igen általános transzformációs szabály, amely kapcsolatot teremt az $\{\eta(t), t \in T\}$ és a belőle származtatható $\{\xi(t), t \in T\}$ sztohasztikus folyamatok között. Meghatározandó a $\{\xi(t), t \in T\}$ teljes statisztikai leírása. Teljes statisztikai leírás alatt a sztohasztikus folyamathoz rendelt együttes valószínűségi eloszlások teljes rendszerének ismeretét értjük.

A klasszikus fizikában már az elmúlt század végén felvetődött néhány olyan probléma, amely a fent említett általános feladat speciális esetének tekinthető. Ilyen volt a három szabadságfokú mechanikai rendszerekre vonatkozó Maxwell—Boltzmann (1860 körül) sebességeloszlás számítása, a Rayleigh (1880, 1894 és 1899) által felvetett és végül Pearson (1905) által megfogalmazott véletlen lépések elmélete és a Bachelier (1900) által kidolgozott tőzsdéi modell. Nagy lendületet adott a kérdés további tanulmányozásának Einstein (1905) munkássága a Robert Brown (1827) által felfedezett molekuláris mozgással és általában a diffúzióval kapcsolatban. Bár korábban már Rayleigh és Bachelier is eljutott ahhoz a felismeréshez, hogy az általuk kitűzött feladat megoldása egy parciális differenciálegyenlet megoldására vezethet vissza, csak a diffúziós alapegyenletek felírása után kezdődött meg a kérdés ilyen értelmű tanulmányozása. A diffúziós elméletet Smoluchowsky (1914, 1916), Langevin (1908), majd Fokker (1913, 1914, 1918) és Planck (1915, 1917) fejlesztette tovább, megfogalmazva az ún. sztohasztikus differenciálegyenlet-problémát és megadva a valószínűségi sűrűségfüggvényre vonatkozó Fokker—Planck-egyenletet.

A. N. Kolmogorov alapvető munkássága [28] nyomán, amelyben folytonos Markov-típusú folyamatokra megadta a kitűzött feladat megoldását, Chandrasekhar [29], illetve Ming Chen Wang és Uhlenbeck [30] kiegészítette és teljessé tette a Brown-mozgás elméletét.

A véletlen zavarokkal diszturbált nemlineáris dinamikus rendszerek leírásával először Andronov [31] foglalkozott, néhány egyszerűbb esetre az állandósult állapotra érvényes valószínűségi sűrűségfüggvényt is meghatározva. Az elmélet mérnöki-gyakorlati al-

kalmazásainak sőrát Sztratonovics és munkatársai nyitották meg 1953 és 1960 között. Az általuk publikált eredmények sorába tartozik Tyihonov két alapvető cikke [3, 4], amely a fázis-zárt hurok zajviszonyaival foglalkozik, és amely az ún. koherens hírközlélmélet egyik alapozó művének tekinthető. A munkaközösség elméleti eredményeit Sztratonovics 1963-ban megjelent könyve [32] foglalja össze, amely az állandósult állapotok vizsgálatán kívül a valószínűségi sűrűségfüggvény időbeli tranzienseinek egy elemzési módszerét is bemutatja. Az 1960-as évek elejétől kezdve a Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet alkalmazása körében egész sor gyakorlati témával foglalkozó publikáció jelenik meg. A híradástechnikában jelentős Viterbi [1, 2], Lindsey [7, 11, 15, 17, 24], Develet [12], Rey [13], Schilling és Billing [14], Tausworthe [16] munkája és Gupta [21] összefoglaló cikke, a szabályozálmélet területén pedig Futter [10] és Larson [17] áttekintő tanulmánya.

Pawula [5] 1967-ben publikált cikkében a klasszikus elméletet kiterjesztette a nem Markov-típusú sztohasztikus folyamatokra is, bebizonyítva, hogy néhány nem túlságosan szigorú megkötéssel elméletileg lehetőség nyílik arra, hogy tetszőleges bementi $\{\eta(t), t \in T\}$ folyamat és tetszőleges transzformációs szabály esetén előállítsuk az eredményezett kimeneti $\{\xi(t), t \in T\}$ folyamat teljes statisztikai leírását.

A téma matematikai alapjainak mélyebb megismerését segíti Doob [33], Spitzer [34] és Bharucha—Reid [6] sztohasztikus folyamatokkal foglalkozó monográfiája és Deutsch [9] összefoglaló munkája.

2. A Markov-folyamatok Fokker-Planck-Kolmogorov-egyenlete

Eltekintve Pawula [5] korábban említett általánosításától, a továbbiakban a Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenletet csak Markov-folyamatok esetére határozzuk meg. Legyen adott az első fejezetben bevezetett $\{\xi(t), t \in T\}$ n -dimenziós folytonos sztohasztikus vektorfolyamat, amely az E^n , n -dimenziós euklideszi térben vesz fel értékeket. Folytonos alatt itt időbeli folytonosságot értünk, tehát $T = \mathbb{R}$, ahol \mathbb{R} a valós számok halmaza. Tétélezzük fel, hogy az $\{\eta(t), t \in T\}$ folyamat és a transzformációs szabály olyan, hogy a $\{\xi(t), t \in T\}$ folyamat elsőrendű Markov-folyamat, a továbbiakban egyszerűen Markov-folyamat, és létezik a

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = P(\mathbf{x} \leq \xi(t) < \mathbf{x} + d\mathbf{x}, t | \xi(t_0) = \mathbf{x}_0, t_0), t_0 < t$$

átmeneti valószínűségi sűrűségfüggvény, ahol $p(\cdot | \cdot)$ általában a feltételes valószínűségi sűrűségfüggvény jelölése.

Elsőrendű Markov-folyamatokra igaz, hogy

$$P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_n, t_n) \equiv p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad (1)$$

amiből azonnal következik, hogy a folyamat teljes statisztikai leírásához elegendő a másodrendű eloszlások rendszerének ismerete, mivel a

$$p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}; \mathbf{x}_n, t_n) = p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \cdot p(\mathbf{x}_0, t_0 | \mathbf{x}_1, t_1) \cdot \dots \cdot p(\mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1} | \mathbf{x}_n, t_n) p(\mathbf{x}_n, t_n), \quad (2)$$

$$t > t_0 > t_1 > \dots > t_{n-1} > t_n$$

összefüggés alapján bármely együttes eloszlás generálható.

Ismert [5] továbbá, hogy a folytonos Markov-folyamatok átmeneti valószínűségi sűrűségfüggvénye kielégíti a Smoluchowsky- vagy más néven Chapman—Kolmogorov-egyenletet, tehát

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{E^n} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') p(\mathbf{x}', t' | \mathbf{x}_0, t_0) dx'; \quad (3)$$

$$t_0 < t' < t,$$

azaz a $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ előállításához elegendő számba venni az összes (\mathbf{x}', t') állapotokat, amelyekre keresztül a rendszer az (\mathbf{x}_0, t_0) állapotból az (\mathbf{x}, t) állapotba kerül. Időben homogén folyamatokra az átmeneti valószínűségi sűrűségfüggvény csak a $t-t'$ növekménytől függ, így a (3) egyenlet módosított változata a $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') = p(\mathbf{x}, t-t' | \mathbf{x}', 0)$ helyettesítéssel nyerhető. Amennyiben a folyamat stacionárius, a $p_s(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ stacionárius állapotban értelmezett átmeneti valószínűségi sűrűségfüggvény független az időtől, vagyis (3) módosított változata a

$$p_s(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = \int_{E^n} p(\mathbf{x}, t-t' | \mathbf{x}', 0) p_s(\mathbf{x}' | \mathbf{x}_0) dx' \quad (4)$$

alakban írható fel.

A Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet a Smoluchowsky-egyenlethez többféle úton származtatható [1, 5, 10, 11, 28, 32]. Ezek közül a Viterbi [1] és Lindsey [7] által közölt eljárást követjük. $t \equiv t + \Delta t$ és $t' \equiv t$ helyettesítéssel (3)-ból megkapjuk a $t + \Delta t$ időpontban értelmezett átmeneti valószínűségi sűrűségfüggvény kifejezését:

$$p(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{E^n} p(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{x}', t) p(\mathbf{x}', t | \mathbf{x}_0, t_0) dx'. \quad (5)$$

$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ Δt idő alatti növekménye a

$$p(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{x}_0, t_0) - p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \quad (6)$$

különbséggel adható meg.

Vezessünk be ezután egy tetszőleges $R(\mathbf{x})$ skalárvektor függvényt, amely \mathbf{x} szerint m -szer ($m = 1, 2, \dots$) deriválható, és $x_i \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) esetén elég gyorsan eltűnik. Vizsgáljuk a továbbiakban a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{E^n} R(\mathbf{x}) [p(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{x}_0, t_0) - p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] dx =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{E^n} R(\mathbf{x}) \int_{E^n} p(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{x}', t) p(\mathbf{x}', t | \mathbf{x}_0, t_0) dx' dx -$$

$$- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{E^n} R(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) dx \quad (7)$$

integrál értékét akkor, ha $\Delta t \rightarrow 0$, azaz, ha az egyenlet bal oldalán a $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ idő szerinti deriváltja szerepel.

A deriválhatósági feltétel következtében az $R(\mathbf{x})$ függvény az \mathbf{x}' pont körül többdimenziós Taylor-sorba fejthető:

$$R(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}') + \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) \left. \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x'_i)(x_j - x'_j) \left. \frac{\partial^2 R(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (x_i - x'_i)(x_j - x'_j)(x_k - x'_k) \left. \frac{\partial^3 R(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} + \dots \quad (8)$$

A Taylor-sor (7)-be helyettesítése, a bal oldalon kijelölt határátmenet elvégzése és néhány átalakítás után [1, 7] az

$$\int_{E^n} R(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)}{\partial t} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \int_{E^n} \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_i} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) K_{i1}^{(1)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{E^n} \frac{\partial^2 R(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{E^n} \frac{\partial^3 R(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) K_{ijk}^{(3)}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \dots \quad (9)$$

egyenlethez jutunk, mivel a (8) jobb oldalának első tagja átalakítások után azonos a (7) jobb oldalának második tagjával. A kifejezésben szereplő $K_{ijk}^{(z)} (z=1, 2, \dots)$ ún. intenzitás-együtthatók a

$$K_{i1}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{E^n} (x'_i - x_i) p(\mathbf{x}', t + \Delta t | \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}', \quad (10)$$

és

$$K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{E^n} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j) p(\mathbf{x}', t + \Delta t | \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}' \quad (11)$$

$$K_{ijk}^{(3)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{E^n} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j)(x'_k - x_k) p(\mathbf{x}', t + \Delta t | \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}' \quad (12)$$

egyenletek alapján az $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ differenciális sztohasztikus növekmény momentumai. A (9) egyenlet tagonkénti parciális integrálása után, felhasználva azt, hogy az $R(\mathbf{x})$ függvény a végtelenben elég gyorsan eltűnik, az

$$\int_{E^n} R(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{E^n} \left[- \sum_{i=1}^n R(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial K_{i1}^{(1)}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)}{\partial x_i} + \frac{i}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R(\mathbf{x}) \frac{\partial^3 K_{ijk}^{(3)}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \dots \right] d\mathbf{x} \quad (13)$$

összefüggéshez jutunk, és miután $R(\mathbf{x})$ tetszőleges, az egyenlőségnek az integrál argumentumára is fenn kell állnia. Továbbá igaz, hogy a Markov-folyamatok egy igen széles osztályára [5] a $K_{ijk}^{(z)} \dots z > 2$ intenzitás-együtthatók bármely indexpermutációra zérusá válnak*, így (13) a klasszikus Fokker—Planck—Kolmogorov-parabolikus típusú parciális differenciálegyenletet adja:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [K_{i1}^{(1)}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)]. \quad (14)$$

Visszatérve az 1. pontban megfogalmazott alap problémára, jól látható, hogy a (14) egyenlet érvé-

nyessége független a generáló $\{\eta(t), t \in T\}$ folyamat és a transzformációs szabály létezésétől, és explicit formában nem is tartalmazza azok jellemzőit. Igaz viszont, hogy a K intenzitás-együtthatók előállításához elméletileg szükség volna az ismeretlen átmeneti valószínűségi sűrűségfüggvényre. Ha a transzformációs szabály és a generáló folyamat teljes statisztikai leírása ismert, akkor gyakran lehetőség adódik (ld. a későbbiekben) a K intenzitás-együtthatók kiszámítására, és az így nyert parciális differenciálegyenlet kezdeti és határfeltételeinek meghatározására.

Az átmeneti valószínűségi sűrűségfüggvény az (\mathbf{x}_0, t_0) kezdeti feltételektől is függ. Ezt fejezi ki a közel hasonló módon származtatható (7)

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)}{\partial t_0} = \sum_{i=1}^n K_{i1}^{(1)}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial x_{0i}} [p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0i} \partial x_{0j}} [p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] \quad (15)$$

* Pawula [5] általánosan is igazolta, hogy amennyiben a zérustól különböző intenzitás-együtthatók száma véges, akkor $z > 2$ esetén minden intenzitás-együttható eltűnik.

parciális differenciálegyenlet, melynek a (14) adjungáltja [35]. Az utóbbit Kolmogorov első, másnéven backward, az előbbit pedig Kolmogorov második, forward egyenletének is szokták nevezni [31]. A két jelző arra utal, hogy a deriválás az időben korábbi vagy későbbi állapot szerint történik. Mivel a backward egyenlet jelentősége a gyakorlatban kisebb, a továbbiakban csak a Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlettel foglalkozunk.

3. A dinamikus nemlineáris rendszerek Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlete

A dinamikus nemlineáris rendszerek állapotváltozás leírása [36] az elterjedt szabályozástechnikai és hálózatelméleti alkalmazásokon [37, 38] kívül eredményesen használható fel a sztohasztikus üzenetet továbbító lineáris vagy nemlineáris híradástechnikai csatornáknál [8], valamint a zajjal diszturbált fázis-zárt hurkok és oszcillátorok analizisére is. Az állapotváltozók elsőrendű differenciálegyenlet-rendszere a

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) + B(x, t)u(t) \quad (16)$$

alakban írható fel, ahol x az állapotváltozók $n \times 1$ -es oszlopvektora, t az idő, $f(x, t)$ az x és t függvényeinek $n \times 1$ -es oszlopvektora, $B(x, t)$ egy $n \times m$ -es mátrix, $u(t)$ pedig a külső gerjesztések $m \times 1$ -es oszlopvektora. Az általánosság némi szűkítésével a továbbiakban feltételezzük, hogy a kimeneti jellemző az állapottér valamely koordinátájával azonos, így a szokásos második állapotegyenlet [36] elhagyható.

Az általunk vizsgált sztohasztikus jelekkel gerjesztet rendszerekben az $u(t)$ gerjesztésvektor az $\{\eta(t), t \in T\}$ vektorral helyettesíthető, amelynek minden rendezője valamely időbeli sztohasztikus folyamat. Az általánosság további szűkítésével a következőkben csak olyan rendszereket vizsgálunk, ahol a gerjesztő jelek mindegyike fehér Gauss-folyamat vagy ún. állapotfüggő [10] fehér Gauss-folyamat. Ezeknek a fehér Gauss-folyamatoknak a szigorú matematikai értelmezése, pl. a Dirac-delta függvényhez hasonlóan, nem adható meg, ezért a (16) differenciál-egyenlet integrálása előtt célszerű a fehér Gauss-folyamatokat más, matematikailag egzakt módon kezelhető sztohasztikus folyamatokból származtatni. Az 1. Függelékben közölt összefüggések alapján az $\{\eta(t), t \in T\}$ fehér Gauss-vektorfolyamatok a $\{\nu(t), t \in T\}$ diffúziós vektorfolyamat idő szerinti formális deriváltjai.

A (16) állapotegyenlet módosított formában a

$$dx = f(x, t) dt + B(x, t) \cdot d\nu \quad (17)$$

alakban írható fel. Mindkét oldal formális integrálása után az $x(t + \Delta t) - x(t)$ sztohasztikus növekményt az

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t + \Delta t} f(x(\sigma), \sigma) d\sigma + \int_t^{t + \Delta t} B(x(\sigma), \sigma) d\nu(\sigma) \quad (18)$$

egyenlettel határozhatjuk meg. A jobb oldal első tagja Riemann-típusú, idő szerinti integrál, a második tag azonban külön értelmezendő, mivel $\nu(t)$ megválto-

zása nem véges, így a közönséges Stieltjes-típusú integrálszámítás alapján sem értékelhető ki. Az ilyen ún. sztohasztikus integrál értelmezését Doob [33] általános felvetése alapján Itô [41] és Sztratonovics [42] adta meg két, egymástól eltérő formában (ld. 2. Függelék). Bár a két sztohasztikus integrálszámítás alapján értelmezett integráloknak különböző statisztikai jellemzőik vannak, Kailath és Frost [43] részletes analízise a két integrál összehasonlításakor kimutatta, hogy nincs általános definíció abban az értelemben, hogy minden más definíció helytelen. Mindig az aktuális feladat dönti el, hogy éppen melyik integráltípust kell felhasználni.

A 2. Függelékben megadott definíciók és tételek alapján a (18) sztohasztikus differenciálegyenletben kijelölt sztohasztikus integrálok értelmezhetők és várható értékük valamint szórásuk meghatározható. Itô és Sztratonovics igazolta, hogy a fehér Gauss-folyamatokkal gerjesztett lineáris rendszerekre és a nemlineáris rendszerek egy igen széles osztályára (gyakorlatban a hiszterézismentes rendszerekre [45]) az állapotvektor mint időbeli sztohasztikus vektorfolyamat Markov-folyamat. Így a sztohasztikus integrálok értelmezése alapján a (10) és (11) összefüggésekkel definiált differenciális sztohasztikus növekmények statisztikai jellemzői meghatározhatók, azaz előállíthatók a Markov-folyamatokra érvényes (14) Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet $K_{ij}^{(z)}(z=1,2)$ intenzitás-együtthatói. További fontos eredmény, hogy amennyiben a $B(x(t), t)$ mátrix nem függ az $x(t)$ vektortól, az Itô és Sztratonovics-integrálok alapján számolt intenzitás-együtthatók azonos értékűek (ld. az (F27, F28 és F29) összefüggést). Fuller [10] egyszerű másodrendű rendszer esetére igazolta, hogy amennyiben a $B(x(t), t)$ mátrix elemei az $x(t)$ állapotvektor függvényei, a Sztratonovics-integrálok alapján értelmezett intenzitás-együtthatók és az így felállított Fokker—Kolmogorov-egyenlet írja le egzakt módon a fehér Gauss-folyamatokkal gerjesztett rendszerek működését*. Ebben az esetben, amely első sorban a paraméter-vezérelt rendszerek analizisében kapott hangsúlyozott szerepet [46], gyakran „állapot-szorított fehér” Gauss-folyamatokról beszélünk, szemléletesen utalva a $B(x(t), t)$ mátrix és az $\eta(t)$ vektor szorzatának jelenlétére a sztohasztikus differenciálegyenletben**.

A (17) differenciálegyenlethez tartozó Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet intenzitás-együtthatói a 2. fejezet eredményei alapján a differenciális sztohasztikus növekmény momentumai (ld. a (10) és (11) egyenleteket), amelyek szoros kapcsolatban állnak a 2. Függelékben definiált integrálok várható értékével és másodrendű momentumaival. Az ismertetett de-

* A témában megjelenő publikációk nagy része másodrendű rendszerek vizsgálatával foglalkozik, mivel a parabolikus típusú Fokker—Planck—Kolmogorov-parciális differenciálegyenletek a másodrendű esetek egy részében zárt alakban megoldhatók. A [10] összefoglalja a zárt alakban megoldható egyenletek főbb típusait.

** A téma irodalmában gyakran említett módszer az Sztratonovics-egyenletek Itô-egyenletté transzformálása, mely azal indokolható, hogy az Itô-integrálok kezelése egyszerűbb. A transzformáció alapja az Itô- és Sztratonovics-integrálok között fennálló (F27) kapcsolat.

finíciók és tételek alapján a (10), (11), (18), (F28) és (F29) felhasználásával az intenzitás-együtthatók az

alábbi formában írhatók fel (az általánossághoz elegendő a Sztratonovics-integrálkalkulust tekinteni):

és

$$K_1^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[x_i(t + \Delta t) - x_i(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ M \left[\int_t^{t+\Delta t} f_i(\mathbf{x}(\sigma), \sigma) d\sigma \right] + \mathcal{M}_S^* \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\partial b_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} b_{lk}(\mathbf{x}, t) \varrho_{jk}(\mathbf{x}, t) \frac{\sqrt{N_{0j}(\mathbf{x}, t) N_{0k}(\mathbf{x}, t)}}{2} + f_i(\mathbf{x}, t) \quad (19)$$

$$K_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(x_i(t + \Delta t) - x_i(t))(x_j(t + \Delta t) - x_j(t))] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \varrho_{ij} =$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n b_{ik}(\mathbf{x}, t) b_{jl}(\mathbf{x}, t) \varrho_{kl}(\mathbf{x}, t) \frac{\sqrt{N_{0k}(\mathbf{x}, t) N_{0l}(\mathbf{x}, t)}}{2} \quad (20)$$

A (19) és (20) egyenletek (14)-be helyettesítése után megkapjuk az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektorra vonatkozó többdimenziós feltételes valószínűségi sűrűségfüggvény $n+1$ változós parciális differenciálegyenletét, amely adott $p(\mathbf{x}_0, t_0)$ kezdeti feltételek és adott peremfeltételek ismeretében lehetővé teszi a $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ számítását. Az esetek többségében csak a $p_S(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ stacionárius, időtől független megoldást keressük, amely a (14) egyenlet bal oldalán szereplő idő szerinti deriválás elhagyásával módosított egyenlet megoldásából nyerhető, ha az intenzitás-együtthatók az időtől függetlenek. A stacionárius megoldás egyértelműsége könnyen igazolható [10], a létezéssel kapcsolatosan Kolmogorov [31] tételét heurisztikusan általánosítva [10] kijelenthető, hogy mindig van egyértelmű stacionárius megoldás, ha a vizsgált rendszernek nincs olyan része, amely a vezérlő jelektől teljesen független, és ha a stacionárius megoldás nem azonosan zérus.

A dinamikus nemlineáris rendszerek analízisének érdekes kérdése a fehér Gauss-folyamatokból lineáris vagy nemlineáris szűréssel előállított, általában sávhatárolt vezérlő jelekkel gerjesztett rendszerek vizsgálata. Legyen adott a (17) állapotegyenlet módosított formája

$$\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t)\boldsymbol{\mu}(t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1, t) \frac{d\mathbf{v}_1(t)}{dt}, \quad (21)$$

ahol $\mathbf{x}_1(t)$ az állapotváltozók $n_1 \times 1$ -es oszlopvektora, t az idő, $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t)$ az \mathbf{x}_1 és t függvényeinek $n_1 \times 1$ -es oszlopvektora, $\boldsymbol{\mu}(t)$ a fehér Gauss-folyamatból szűréssel előállított vezérlő jelek $k \times 1$ -es oszlopvektora, $\mathbf{v}_1(t)$ a zérus várható értékű diffúziós folyamatok $m_1 \times 1$ -es oszlopvektora, $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1, t)$ $n_1 \times k$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1, t)$ $n_1 \times m_1$ dimenziójú mátrix. Ezenkívül ismerjük, vagy a $\boldsymbol{\mu}(t)$ statisztikai jellemzőinek ismeretében approximáljuk azon rendszer állapotegyenletét, amely fehér Gauss-folyamatokból a $\boldsymbol{\mu}(t)$ vezérlőjeleket előállítja:

$$\frac{d\mathbf{x}_2(t)}{dt} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2, t) + \mathbf{B}_3(\mathbf{x}_2, t) \frac{d\mathbf{v}_2(t)}{dt},$$

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_2, t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_2, t) \frac{d\mathbf{v}_2(t)}{dt}, \quad (22)$$

ahol $\mathbf{x}_2(t)$ az állapotváltozók $n_2 \times 1$ -es oszlopvektora, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2, t)$ az \mathbf{x}_2 és t függvényeinek $n_2 \times 1$ -es oszlopvektora $\mathbf{v}_2(t)$ a zérus várható értékű diffúziós folyamatok

$m_2 \times 1$ -es oszlopvektora, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ $k \times 1$ -es oszlopvektor, $\mathbf{B}_3(\mathbf{x}_2, t)$ $n_2 \times m_2$, $\mathbf{D}(\mathbf{x}_2, t)$ $k \times m_2$ dimenziójú mátrix. Az említett approximáció lineáris szűrés esetén legalább teljesítmény-sávszélességre történik, nemlineáris szűrés esetén a (22) egyenlet előállítására általános szabály nincs. Az intenzitás-együtthatók meghatározására alkalmas összevont állapotegyenlet (21) és (22) felhasználásával a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{c} + \mathbf{B}_2 \frac{d\mathbf{v}_1(t)}{dt} + \mathbf{B}_1 \mathbf{D} \frac{d\mathbf{v}_2(t)}{dt} \\ \mathbf{f}_2 + \mathbf{B}_3 \frac{d\mathbf{v}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (23)$$

alakban írható fel. Az összevont állapotegyenlet $n_1 + n_2$ dimenziós, így a hozzá tartozó Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet változóinak száma $n_1 + n_2 + 1$.

4. Illusztratív példák

4.1 Egyszerű diffúziós folyamat

Meghatározandó az $x(t)$ időbeli, sztochasztikus folyamat teljes statisztikai leírása, ha adott a

$$\frac{dx(t)}{dt} = \eta(t) \quad (24)$$

egydimenziós sztochasztikus differenciálegyenlet, és $\eta(t)$ $N_0/2$ teljesítménysűrűségű fehér Gauss-folyamat (ld. 1. Függelék).

A (24) egyenlethez tartozó intenzitás-együtthatók a (19) és (20) alapján igen egyszerűen előállíthatók, mivel $K_1^{(1)} = 0$ és $K_{11}^{(2)} = N_0/2$. A Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet a (14) egyenlet felhasználásával

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{N_0}{4} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (25)$$

formában írható fel. Ha a $t = t_0$ időpontban $p(x, t_0) = \delta(x - x_0)$ és $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x, t) = 0$, akkor a (25) egyenlet megoldása a jól ismert

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0(t - t_0)}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{N_0(t - t_0)} \right], \quad (26)$$

időben lineárisan változó szórásnégyzetű Wiener—Gauss-folyamat. A (26) eredmény újra igazolja az 1.

Függelékben megadott definíciót, miszerint a fehér Gauss-folyamat a Wiener-Gauss-folyamat idő szerinti deriváltja.

4.2 Keskeny sávú Gauss-folyamattal vezérelt elsőrendű fáziszárt hurok

Határozzuk meg az 1. ábrán megadott fáziszárt hurokban a kimenő jel és a bemenő hasznos jel fáziskülönbségének stacionárius eloszlását a $[-\pi, \pi]$ tartományban, ha a bejövő jel:

$$x_{be}(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega_0 t + \Theta_1) + \zeta(t); \Theta_1 = \Delta\omega t, \quad (27)$$

egy állandó $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ frekvenciájú szinuszos jel, és a $\zeta(t)$ keskeny sávú Gauss-folyamat összege. Legyen a keskeny sávú Gauss-folyamat a feszültséggel vezérelhető oszcillátor ω_0 természetes frekvenciája ($x(t)=0$) körül szimmetrikus spektrumú és $N_0/2$ teljesítménysűrűségű. Ismert, hogy az így megadott keskeny sávú Gauss-folyamat a

$$\zeta(t) = \sqrt{2}[\eta_1(t) \sin(\omega_0 t) + \eta_2(t) \cos(\omega_0 t)] \quad (28)$$

alakban felírva kifejezhető az $\eta_1(t)$ és $\eta_2(t)$ független Gauss-folyamatok kombinációjaként, ahol az $\eta_1(t)$ és $\eta_2(t)$ folyamat $N_0/2$ teljesítménysűrűségű és az origóra szimmetrikus spektrumú. Ha az $\eta_1(t)$ és $\eta_2(t)$ folyamatok sávzsélessége lényegesen nagyobb a hurok sávzsélességénél, az $\eta_1(t)$ és $\eta_2(t)$ folyamatokat az $\eta_m(t)$ és $\eta_{m2}(t)$ korrelálatlan fehér Gauss-folyamat-párral szokták [1, 2, 3, 4, 7] közelíteni.

A feszültséggel vezérelhető oszcillátor kimenő jele az

$$x_{ki}(t) = \sqrt{2}B \cos(\omega_0 t + \Theta_2), \quad (29)$$

$$K_F^{(1)} = \Delta\omega - C \sin(\Phi) - \frac{1}{2} \frac{C^2 N_0}{A^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Phi} [\sin(\Theta_1 - \Phi)] \sin(\Theta_1 - \Phi) + \frac{\partial}{\partial \Phi} [\cos(\Theta_1 - \Phi)] \cos(\Theta_1 - \Phi) \right\} = \Delta\omega - C \sin(\Phi) \quad (32)$$

és

$$K_F^{(2)} = \frac{N_0 C^2}{2A^2} [\sin^2(\Theta - \Phi) + \cos^2(\Theta - \Phi)] = \frac{N_0 C^2}{2A^2} \quad (33)$$

A rendszer Fokker-Planck-Kolmogorov-egyenlete a (32) és (33) felhasználásával stacionárius eloszlások esetére a

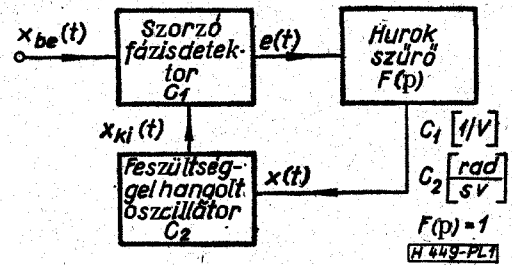
$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 = -\frac{\partial}{\partial \Phi} [(\Delta\omega - C \sin(\Phi))p] + \frac{N_0 C^2}{2A^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Phi^2} \quad (34)$$

kifejezéssel adható meg.

Az egyenlet megoldása a $[-\pi, \pi]$ tartományban, a $p(-\pi) = p(\pi)$ határfeltételek mellett

$$p(\Phi) = D \exp(\beta\Phi + \alpha \cos \Phi) \int_{\Phi}^{\Phi+2\pi} \exp(-\beta y - \alpha \cos y) dy, \quad (35)$$

ahol D a normalizálási állandó, $\alpha = \frac{4A^2}{N_0 C}$ és $\beta = \frac{4\Delta\omega A^2}{N_0 C^2}$.



1. ábra

vezérlési karakterisztikája a

$$\frac{d\Theta_2}{dt} = C_2 x(t) \quad (30)$$

egyenlettel adható meg. A szorzó detektor együtthatója C_1 .

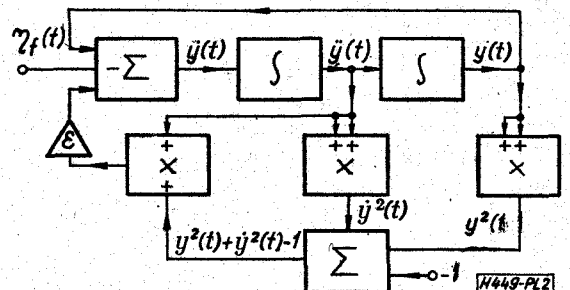
Egyszerű átalakítások után megkapjuk a $\Phi = \Theta_1 - \Theta_2$ fáziskülönbségre vonatkozó differenciálegyenletet:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Delta\omega - C \sin(\Phi) + \frac{C}{A} \eta_{11} \sin(\Theta_1 - \Phi) - \frac{C}{A} \eta_{12} \cos(\Theta_1 - \Phi), \quad (31)$$

ahol $C = C_1 C_2 A B$. Az átalakítások során a $2\omega_0$ frekvencia környezetében megjelenő oldalsávokat a szorzó detektor kimenetén elhanyagoltuk. A (31) egyenletben η_{12} és η_{22} együtthatói a Φ állapotváltozó függvényei, így az „állapottal szorzott” Gauss-folyamat esetéről van szó. A Fokker-Planck-Kolmogorov-egyenlet intenzitás-együtthatói a (19) és (20) alapján:

4.3 Fehér Gauss-folyamattal megzavart kétfázisú oszcillátor

Határozzuk meg a 2. ábrán bemutatott oszcillátor rendszer amplitúdójának és fázisának együttes stacionárius valószínűségi sűrűségfüggvényét, ha az $\eta_1(t)$ folyamat fehér Gauss-folyamat $N_0/2$ spektrális teljesítménysűrűséggel. A rendszer egyik lehetséges állapotegyenlete $y(t) = x_1$ és $\dot{y}(t) = x_2$ állapotváltozó



2. ábra

választással a

$$\frac{dr_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - e(x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2 - \eta_1(t) \quad (36)$$

alakban írható fel. Az intenzitás-együtthatók:

$$K_{11}^{(1)} = x_2; K_{22}^{(1)} = -x_1 - e(x_1^2 + x_2^2 - 1);$$

$$K_{11}^{(2)} = K_{12}^{(2)} = K_{21}^{(2)} = 0; K_{22}^{(2)} = \frac{N_0}{2}. \quad (37)$$

Ennek alapján a Fokker—Planck—Kolmogorov-egyenlet stacionárius esetben a

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} [x_2 p] + \frac{\partial}{\partial x_2} [(x_1 + e(x_1^2 + x_2^2 - 1))p] + \frac{N_0}{4} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0 \quad (38)$$

kifejezéssel adható meg. Az egyenlet megoldása a $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} p(x_1, x_2) = 0$ és $\lim_{x_2 \rightarrow \infty} p(x_1, x_2) = 0$ peremfeltételek mellett

$$p(x_1, x_2) = D \exp \left[-\frac{\varepsilon}{N_0} (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \right], \quad (39)$$

ahol D normáló állandó. Az egyszerű $x_1 = r \cos \varphi$ és $x_2 = r \sin \varphi$ koordinátatranszformációval az x_1, x_2 síkról áttérhetünk az oszcillátor pillanatnyi amplitúdója (r) és pillanatnyi fázisa (φ) által meghatározott polárkoordinátarendszerre. A fázis és amplitúdó együttes eloszlása a transzformáció felhasználásával a

$$p(r, \varphi) = D' r \exp \left[-\frac{\varepsilon}{N_0} (r^2 - 1)^2 \right]; \varphi \in [-\pi, \pi] \quad (40)$$

alakban adható meg. Az eloszlás független a pillanatnyi fázistól, azaz a φ -re vonatkozó peremeloszlás konstans. A (40) egyenletben szereplő D' a módosított normáló állandó.

1. Függelék

A fehér Gauss-folyamat és a Wiener—Gauss-folyamat kapcsolata

Az $\{\eta_i(t), t \in \mathbf{T}\}$ fehér Gauss-vektorfolyamat vagy másnéven fehér zajvektor a $\{v_i(t), t \in \mathbf{T}\}$ Wiener—Gauss-vektorfolyamatból származtatható. A $\{v_i(t), t \in \mathbf{T}\}$ vektor i -edik rendezője ($i = 1, 2, \dots, n$) zérus várható értékű, ortogonális növekményű, az időben lineárisan változó szórásnégyzetű, Gauss-eloszlású folyamat, azaz a következő definíciós összefüggésekkel adható meg:

$$v_i(t) = 0; t \geq t_0; i = 1, 2, \dots, n; \quad (F1)$$

$$\mathbf{M}\{v_i(t)\} = 0; t \in \mathbf{T}; i = 1, 2, \dots, n; \quad (F2)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{M} \left\{ \frac{[v_i(t + \Delta t) - v_i(t)]^2}{\Delta t} \right\} = \frac{N_{0i}}{2}; t \geq t_0; i = 1, 2, \dots, n; \quad (F3)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{M} \left\{ \frac{[v_i(t + \Delta t) - v_i(t)][v_j(t + \Delta t) - v_j(t)]}{\Delta t} \right\} =$$

$$= \varrho_{ij} \frac{\sqrt{N_{0i} N_{0j}}}{2}; t \geq t_0; i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (F4)$$

$$\mathbf{M}\{[v_{i1}(t_1 + \Delta t_1) - v_{i1}(t_1)][v_{ij}(t_2 + \Delta t_2) - v_{ij}(t_2)]\} = 0;$$

$$t_2 + \Delta t_2 > t_2 > t_1 + \Delta t_1 > t_1; t_1 > t_0; i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (F5)$$

ahol $\mathbf{M}\{\}$ a valószínűségi térben értelmezett várható érték, ϱ_{ij} , N_{0i} , N_{0j} a folyamatot jellemző állandók ($\varrho_{ii} \equiv 1$, $\varrho_{ij} = \varrho_{ji}$, $|\varrho_{ij}| \leq 1$). Jól látható, hogy a Wiener—Gauss-folyamat a $t = t_0$ időpillanatban „indul” és szórásnégyzete bármely véges időpontban véges.

Definíció: Az $\{\eta_i(t), t \in \mathbf{T}\}$ fehér Gauss-vektorfolyamat a $\{v_i(t), t \in \mathbf{T}\}$ Wiener—Gauss-vektorfolyamat formális idő szerinti deriváltja [1, 7, 10, 39], azaz a vektor i -edik rendezője:

$$\eta_i(t) = \frac{dv_i(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t}. \quad (F6)$$

Mivel az (F6) művelet lineáris, az így nyert folyamat is Gauss-eloszlású. A folyamat kovariancia-függvénye az i -edik és j -edik rendezőre

$$\mathbf{M}\{\eta_i(t + \tau)\eta_j(t)\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}\{[v_i(t + \Delta t + \tau) - v_i(t + \tau)][v_j(t + \Delta t) - v_j(t)]\}, \quad (F7)$$

amely az (F3), (F4) és (F5) felhasználásával az

$$\mathbf{M}\{\eta_i(t + \tau)\eta_j(t)\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\varrho_{ij} \sqrt{N_{0i} N_{0j}}}{2} \left(\frac{\Delta t - |\tau|}{\Delta t^2} \right); & |\tau| \leq \Delta t \\ 0 & ; |\tau| > \Delta t \end{cases} \quad (F8)$$

alakban írható fel. A határátmenet elvégzése után a kovariancia-függvény a $\varrho_{ij} \sqrt{N_{0i} N_{0j}}/2$ súlyozású Dirac-delta függvényhez tart, tehát az időtől független és csak a τ érték függvénye, így a $\eta_i(t)$ folyamat biztosan gyengén stacionárius. Az (F8) kifejezés lényegében két, $N_{0i}/2$ és $N_{0j}/2$ teljesítménysűrűségű, ϱ_{ij} normált korrelációs tényezőjű fehér Gauss-folyamat kovariancia-függvénye.

Az állapotfüggő fehér Gauss-folyamat és az általános, zérus várható értékű diffúziós folyamat kapcsolata

Az állapotfüggő $\{\eta(t), t \in \mathbf{T}\}$ fehér Gauss-vektorfolyamat, az általános $\{v(t), t \in \mathbf{T}\}$ diffúziós, Gauss-eloszlású vektorfolyamatból származtatható. Az általános diffúziós vektorfolyamat i -edik rendezője ($i = 1, 2, \dots, n$) az alábbi definíciós összefüggésekkel írható le (csak zérus várható értékű folyamatokat tekintve):

$$\mathbf{M}\{v_i(t)\} = 0; i = 1, 2, \dots, n; \quad (F9)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{M} \left\{ \frac{[v_i(t + \Delta t) - v_i(t)]^2}{\Delta t} \middle| v(t) = v_0(t) \right\} = \frac{N_{0i}(v_0(t), t)}{2}; i = 1, 2, \dots, n; \quad (F10)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{M} \left\{ \frac{[v_i(t + \Delta t) - v_i(t)][v_j(t + \Delta t) - v_j(t)]}{\Delta t} \middle| v(t) = v_0(t) \right\} = \varrho_{ij}(v_0(t), t) \frac{\sqrt{N_{0i}(v_0(t), t) N_{0j}(v_0(t), t)}}{2}; i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (F11)$$

és $\mathbf{M}\{[v_i(t_1 + \Delta t_1) - v_i(t_1)][v_j(t_2 + \Delta t_2) - v_j(t_2)]\} = 0;$
 $t_2 + \Delta t_2 > t_2 > t_1 + \Delta t_1 > t_1; i, j = 1, 2, \dots, n; \text{ (F12)}$

ahol $\varrho_{ij}(v(t), t), N_{0i}(v(t), t)$ és $N_{0j}(v(t), t)$ a folyamatot jellemző folytonos függvények ($\varrho_{ii} \equiv 1, \varrho_{ij} = \varrho_{ji}, |\varrho_{ij}| \leq 1$). A kifejezések alapján megállapítható, hogy a Wiener – Gauss-folyamat az általános diffúziós folyamat speciális esete, amikor az itt definiált ϱ_{ij}, N_{0i} és N_{0j} függvények konstansok.

Definíció: Az $\{\eta(t), t \in \mathbf{T}\}$ állapotfüggő fehér Gauss-vektorfolyamat a $\{v(t), t \in \mathbf{T}\}$ általános diffúziós vektorfolyamat formális, idő szerinti deriváltja, azaz a vektor i -edik rendezője:

$$\eta_i(t) = \frac{dv_i(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(t + \Delta t) - v_i(t)}{\Delta t} \quad \text{(F13)}$$

Az állapotfüggő fehér Gauss-folyamat kovarianciafüggvénye az (F8) kifejezéshez hasonlóan Dirac-delta függvény, a súlyozási tényező azonban függ az időtől és $v(t)$ aktuális értékétől, így a folyamat nem stacionárius. A „fehér” jelző ebben az esetben a folyamat Dirac-delta korreláltságára utal, mivel nem stacionárius folyamatok esetén a teljesítményspektrum általában nem értelmezhető, azaz itt nem beszélhetünk egyenletes spektrumról.

Megjegyzendő, hogy a dinamikus nemlineáris rendszerekben a ϱ_{ij}, N_{0i} és N_{0j} általában a rendszert leíró $x(t)$ állapotváltozó aktuális értékeitől függ (innen származik az állapotfüggő fehér Gauss-folyamat elnevezés), és csak az állapotváltozókon keresztül függ a $v(t)$ vektor aktuális értékeitől.

2. Függelék

Az Itô- és Sztratonovics-integrálok értelmezése és kapcsolata [41, 42]

A (18) egyenletben kijelölt sztohasztikus integrálok értelmezéséhez tekintsünk egy egydimenziós példát. Adott tehát a (17) típusú egydimenziós állapot-egyenlet Δt időre vett integrálja:

$$\mathcal{D}_t^2 = \mathbf{M} \left\{ \left[\int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^1v(\sigma) \right]^2 \right\} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ b(x(t_i), t_i) \cdot b(x(t_j), t_j) [v(t_{i+1}) - v(t_i)] [v(t_{j+1}) - v(t_j)] \} \quad \text{(F19)}$$

egyenlet segítségével számolható. Felhasználva a diffúziós folyamat növekményeinek ortogonalitását (ld. (F12) kifejezés), valamint az (F10) definíciós egyenletet az (F19) 1 valószínűséggel a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^2 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ b^2(x(t_i), t_i) [v(t_{i+1}) - v(t_i)]^2 \} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ b^2(x(t_i), t_i) \} \mathbf{M} \{ [v(t_{i+1}) - v(t_i)]^2 \} = \\ &= \int_t^{t+\Delta t} b^2(x(\sigma), \sigma) \frac{N_0(x(\sigma), \sigma)}{2} d\sigma \quad \text{(F20)} \end{aligned}$$

alakban adható meg. Az (F20) szerint a szórásnegyzet

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x(\sigma), \sigma) d\sigma + \int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) dv(\sigma), \quad \text{(F14)}$$

amelyben a $v(t)$ zérus várható értékű diffúziós folyamat $N_0(x, t)$ függvénnyel (ld. (F10) egyenlet), $f(x, t)$ és $b(x, t)$ az x állapotváltozó és t idő folytonos függvényei. Első lépésben a $[t, t + \Delta t]$ intervallumot bontjuk fel részintervallumokra a

$$t = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t + \Delta t; \quad \max(t_{i+1} - t_i) = \Delta \quad \text{(F15)}$$

időpontokban úgy, hogy minden intervallum a Δ korláttal azonos vagy az alatt marad.

Definíció: A sztohasztikus integrál Itô szerint az

$$\int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^1v(\sigma) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} b(x(t_i), t_i) [v(t_{i+1}) - v(t_i)] \quad \text{(F16)}$$

téglányösszegek határértékével adható meg, ha

$$\mathbf{M} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} |b(x(\sigma), \sigma)|^2 d\sigma \right\} < \infty, \quad \text{(F17)}$$

és a határérték négyzetes középben értendő [44].

Az Itô integrál várható értéke a

$$\mathcal{M}_t = \mathbf{M} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^1v(\sigma) \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ b(x(t_i), t_i) [v(t_{i+1}) - v(t_i)] \} = 0 \quad \text{(F18)}$$

kifejezés alapján 1 valószínűséggel zérussal egyenlő, mivel a jobb oldali összeg minden tagja független valószínűségi változók szorzata $(x(t_i), t_i)$ független a $v(t)$ t_i időpont utáni növekményétől).

Az Itô integrál szórásnegyzete pedig a

számítása Riemann-típusú, idő szerinti integrálásra vezethető vissza.

Definíció: A sztohasztikus integrál Sztratonovics szerint az

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^Sv(\sigma) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} b \left(x \left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right), t_i \right) [v(t_{i+1}) - v(t_i)] \quad \text{(F21)} \end{aligned}$$

téglányösszegek határértékével adható meg, ha $b(x, t)$ t szerint differenciálható és az (F17) feltétel fennáll. A határérték itt is négyzetes középben értendő.

Tétel (Sztratonovics [42]): Az Itô és a Sztratonovics integrál között 1 valószínűséggel fennáll az

$$\int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^S v(\sigma) = \int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^1 v(\sigma) + \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial b(x(\sigma), \sigma)}{\partial v} \frac{N_0(x(\sigma), \sigma)}{2} dv \quad (F22)$$

kapcsolat, ha $b(x, t)$ x -ben differenciálható. A bizonyítás Doob [33] tételének felhasználásával a [42]-ben megtalálható.

A Sztratonovics-integrál várható értéke zérustól különböző, mivel az (F22) jobb oldalának második tagja általában nem tűnik el, így 1 valószínűséggel érvényes az

$$\mathcal{M}_S = \mathbf{M} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^S v(\sigma) \right\} = \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial b(x(\sigma), \sigma)}{\partial v} \frac{N_0(x(\sigma), \sigma)}{2} d\sigma \quad (F23)$$

összefüggés. A Sztratonovics-integrál szórásnégyzete 1 valószínűséggel azonos az Itô-integrál szórásnégyzetével (ld. (F20) kifejezés) [42].

Amennyiben ismert az $x(t)$ és $v(t)$ közötti kapcsolat (azaz az állapotegyenlet (F14) típusú, egydimenziós alakja), akkor az (F22) és (F23) kifejezésekben a differenciálás láncszabályát alkalmazva a

$$\frac{\partial b(x(t), t)}{\partial v} = \frac{\partial b(x(t), t)}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial v} = \frac{\partial b(x(t), t)}{\partial x} b(x(t), t) \quad (F24)$$

helyettesítést alkalmazhatjuk, mivel (F14) alapján

$$\frac{\partial x(t)}{\partial v} = b(x(t), t).$$

Így a Sztratonovics-integrál várható értéke 1 valószínűséggel az

$$\mathcal{M}_S = \mathbf{M} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} b(x(\sigma), \sigma) d^S v(\sigma) \right\} = \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial b(x(\sigma), \sigma)}{\partial x} b(x(\sigma), \sigma) \frac{N_0(x(\sigma), \sigma)}{2} d\sigma \quad (F25)$$

alakban írható fel.

Mindkét előbb definiált integrálkalkulus kiterjeszhető a (17) típusú többdimenziós állapotegyenletre és a (18) egyenlet jobb oldalán kijelölt többdimenziós sztohasztikus integrálokra is az (F16) és (F21) kifejezésekkel analóg módon. Ismert tehát a (17) állapotegyenlet és az általános $\{v(t), t \in \mathbf{T}\}$ diffúziós vektorfolyamat a hozzá rendelhető $\rho(x(t), t)$, $N_{0i}(x(t), t)$, ($i, j = 1, 2, \dots, m$) x -ben és t -ben folytonos függvényekkel. A (17) egyenlet i -edik sorának jobb

oldalán kijelölt sztohasztikus integrál a

$$\sum_{j=1}^m \int_t^{t+\Delta t} b_{ij}(x(\sigma), \sigma) dv_j(\sigma) \quad (F26)$$

formában írható fel, ahol $b_{ij}(x(t), t)$ a $\mathbf{B}(x(t), t)$ mátrix i -edik sorában és j -edik oszlopában levő elem, $v_j(t)$ pedig $v(t)$ vektor j -edik rendezője. Az Itô- és Sztratonovics-integrálok az (F16) és (F21) definíciókkal azonos módon értelmezhetők az (F26) összeg minden tagjára. A részletes definíciós egyenlet felírását mellőzve, három tételt ismertettünk a többdimenziós sztohasztikus integrálokkal kapcsolatban.

Tétel (Sztratonovics [42]): A többdimenziós Itô- és Sztratonovics-integrálok között 1 valószínűséggel fennáll az alábbi kapcsolat:

$$\sum_{j=1}^m \int_t^{t+\Delta t} b_{ij}(x(\sigma), \sigma) d^S v_j(\sigma) = \sum_{j=1}^m \int_t^{t+\Delta t} b_{ij}(x(\sigma), \sigma) d^1 v_j(\sigma) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial b_{ij}(x(\sigma), \sigma)}{\partial x_e} b_{lk}(x(\sigma), \sigma) \varrho_{lk}(x(\sigma), \sigma) \frac{1}{2} \cdot \sqrt{N_{0j}(x(\sigma), \sigma) N_{0k}(x(\sigma), \sigma)} d\sigma \quad (F27)$$

ha a $b_{ij}(x(t), t)$ x -ben differenciálható. A bizonyítás [42]-ben megtalálható.

Tétel (Sztratonovics [42]): A többdimenziós Itô-integrál várható értéke 1 valószínűséggel zérus, a többdimenziós Sztratonovics-integrál várható értéke 1 valószínűséggel

$$\mathcal{M}_S^* = \mathbf{M} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_t^{t+\Delta t} b_{ij}(x(\sigma), \sigma) d^S v_j(\sigma) \right\} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial b_{ij}(x(\sigma), \sigma)}{\partial x_l} b_{lk}(x(\sigma), \sigma) \cdot \varrho_{lk}(x(\sigma), \sigma) \frac{\sqrt{N_{0j}(x(\sigma), \sigma) N_{0k}(x(\sigma), \sigma)}}{2} d\sigma \quad (F28)$$

Tétel (Sztratonovics [42]): Két többdimenziós Itô- vagy Sztratonovics-integrál kovarianciája 1 valószínűséggel a

$$e_{Sij}^* = e_{Iij}^* = \mathbf{M} \left\{ \left[\sum_{k=1}^m \int_t^{t+\Delta t} b_{ik}(x(\sigma), \sigma) d^S v_k(\sigma) \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^m \int_t^{t+\Delta t} b_{il}(x(\sigma), \sigma) d^S v_l(\sigma) \right] \right\} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \int_t^{t+\Delta t} b_{ik}(x(\sigma), \sigma) \cdot b_{il}(x(\sigma), \sigma) \varrho_{kl}(x(\sigma), \sigma) \frac{\sqrt{N_{0k}(x(\sigma), \sigma) N_{0l}(x(\sigma), \sigma)}}{2} d\sigma \quad (F29)$$

kifejezéssel adható meg. Az utóbbi két tétel bizonyítása [42]-ben megtalálható. Az (F28) és (F29) bal oldalán alkalmazott csillag jelölés a többdimenziós integrálásra utal.

IRODALOM

- [1] A. J. Viterbi: Principles of Coherent Communication. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [2] A. J. Viterbi: Phase-Locked Loop Dynamics in Presence of Noise by Fokker-Planck techniques, Proc. IEEE, Vol. 51., pp. 1737-1753, December 1963.
- [3] V. I. Tikhonov: The Effects of Noise on Phase-Lock Oscillation Operation. Automatika i Telemekhanika, Vol. 22., No. 9., 1959.
- [4] V. I. Tikhonov: Phase-Lock Automatic Frequency Control Application in the Presence of Noise. Automatika i Telemekhanika, Vol. 23., 1960.
- [5] R. F. Pawula: Generalizations and Extensions of the Fokker-Planck-Kolmogorov Equation. IEEE Trans. on Information Theory, IT-13, No. 1., January 1976, pp. 33-41
- [6] A. T. Bharucha-Reid: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. McGraw-Hill, New York 1960.
- [7] W. C. Lindsey: Synchronization Systems in Communications and Control. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1972.
- [8] D. L. Snyder: The State Variable Approach to Continuous Estimation with Applications to Communication Theory, Cambridge, Mass. M. I. T. Press, 1969.
- [9] R. Deutsch: Nonlinear Transformation of Random Processes. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1962.
- [10] A. T. Fuller: Analysis of Nonlinear Stochastic Systems by the Fokker-Planck Equation. International Journal of Control, Vol. 9, No. 6. June 1969, pp. 603-655
- [11] W. C. Lindsey: Nonlinear Analysis of Generalized Tracking Systems. Proc. of IEEE, Vol. 57, No. 10. October 1969, pp. 1705-1722
- [12] J. A. Develet: A Threshold Criterion for Phase-Lock Demodulation. Proc. of IEEE, Vol. 51. April 1963, p. 580
- [13] T. J. Reg: Further on the Phase-Locked Loops in the Presence of Noise. Proc. of IEEE, Vol. 53. May 1965. pp. 494-495
- [14] D. L. Schilling - J. Billing: On the Threshold Extention Capability of the PLL and FDMFB. Proc. IRE, Vol. 52. May 1964, p. 621
- [15] F. J. Charles - W. C. Lindsey: Some Analytical and Experimental PLL Results for low SNR. Proc. of IEEE, Vol. 54. September 1966. pp. 1152-1166
- [16] R. C. Tausworthe: A Method for Calculating Phase-Locked Loop Performance Near Threshold. IEEE Trans. Commun Technol. Vol. COM-15. Aug. 1967. pp. 502-506
- [17] W. C. Lindsey: Phase-Density Distribution of Phase-Locked Loops in Cascade. IEEE Trans. Commun. Technol. Vol. COM-17. Aug. 1969. p. 503
- [18] K. E. Dominiak - R. L. Pickholtz: Transient Behavior of a Phase-Locked Loop in the Presence of Noise. IEEE Trans. Commun. Technol. Vol. COM-18. Aug. 1970. pp. 452-456
- [19] J. E. Ohlson: Phase-Locked Loop Operation in the Presence of Impulsive and Gaussian Noise. IEEE Trans. Commun. Technol. Vol. COM-21. September 1973. pp. 991-996
- [20] P. W. Osborne, - D. L. Schilling: Threshold analysis of the phase-locked-loop demodulators using most likely noise. IEEE Trans. Commun. Tehnol. Vol. COM-18. Aug. 1970. pp. 452-456
- [21] S. C. Gupta: Phase-Locked Loops. Proc. of IEEE, Vol. 63. No. 2. February 1975. pp. 291-306
- [22] J. C. Lindentaub - J. J. Uhman: Threshold Study of Phase-Lock Loop Systems. Trans. Commun. Technol. Vol. COM-16. No. December 1968. pp. 787-795
- [23] J. J. Stiffler: Theory of Synchronous Communications. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1971.
- [24] W. C. Lindsey - M. K. Simon: Telecommunication Systems Engineering. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1972.
- [25] E. J. Baghdady: Lectures on Communication Systems Theory. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [26] E. Bozoki - U. Mengali: An Analysis of the Performance of the Oscillating Limiter Driven by FM Signals Corrupted by Noise. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-5. No. 3. May 1969. pp. 537-547
- [27] V. H. Larson: Some Differential Equations of Probability Theory in Stochastic Processes and Control Systems. Int. J. Control, Vol. 9. No. 6. June 1969. pp. 709-721
- [28] A. N. Kolmogorov: On Analytical Methods in Probability Theory. Math. Ann. Vol. 104. 1931. pp. 415-458
- [29] S. Chandrasekhar: Stochastic Problems in Physics and Astronomy. Rev. Mod. Phys. Vol. 15. January 1943. pp. 2-89
- [30] M. C. Wang - G. E. Uhlenbeck: On the Theory of Brownian Motion II. Rev. Mod. Phys. Vol. 17. April-July 1945. pp. 232-342
- [31] Pontryagin, - L. A. Andronov, - A. Vitt: On the Statistical Investigation of Dynamic Systems. J. Exp. Theoret. Phys. (USSR), 3, 1933. p. 165
- [32] R. L. Stratonovich: Topics in the Theory of Random Noise. Gordon and Breach. New York, 1963.
- [33] J. L. Doob: Stochastic Processes. Wiley. New York, 1953.
- [34] F. Spitzer: Principles of Random Walk. Van Nostrand, Princeton, N. J. 1964.
- [35] Fenyő I. - Frey T.: Matematika villamosmérnököknek II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [36] L. Zadeh - C. Desoer: Linear System Theory. Mc Graw-Hill, New York, 1963.
- [37] Trón T.: Hálózatszintézis az állapotváltozók alapján. Híradástechnika, XXIV. évf. 10. szám, 1973. nov. pp. 289-298
- [38] Csáki F.: Fejezetek a szabályástechnikából. Állapot-egyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [39] W. Wedig: Moments and Probability Densities of Dynamical Systems under Stochastic Parametric Excitation. VII. International Conference on Nonlinear Oscillations, Berlin, 1975.
- [40] Rényi A.: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- [41] K. Itó: Lectures on Stochastic Processes, Lecture Notes. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India, 1961.
- [42] R. L. Stratonovics: Uszlovnúe markovszkije processzú i ih primenyenija k teorii optimalnovo upravlenija. Izdatelstvo Moszkovszkovo Unyiverszityeta. 1966.
- [43] T. Kailath - P. A. Forst: Mathematical Modeling and Transformation Theory of White Noise Processes. Stanford, Calif. Stanford University, 1969.
- [44] Frey T.: Sztochasztikus folyamatok. Jegyzet, J5-945, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- [45] K. R. George - D. P. Atherton: Analytical and Experimental Studies of Nonlinear Feedback Systems with Random Inputs. VII. International Conference on Nonlinear Oscillations, Berlin, September, 1975.
- [46] G. Schmidt: Nonlinear Systems under Randon and Periodic Parameter Excitation. VII. International Conference on Nonlinear Oscillations, Berlin, September, 1975.