

A mintavételező (digitális) szűrők osztályozása

ETO 621.372.54.037.37

Jelen cikk egy sorozat többi cikkéhez hasonlóan a tág értelemben vett digitális szűrés, a mintavételező szűrés problémakörének áttekintését tűzte ki célul, és mint a sorozat első tagja a mintavételező szűrők alapfogalmaival, különböző szempontok szerinti osztályozásával foglalkozik. A témakör mind intenzívebbé váló hazai feldolgozása, fejlesztése egységes elnevezések, definíciók kialakítását, az eddig használt fogalmak pontosítását kívánja meg. E téren szeretnénk javaslatokat tenni.

Bár a mintavételezésen alapuló szűrés elve már évtizedek óta ismeretes, a mintavételező szűrők elmélete csak az elmúlt két évtized során fejlődött ki és szélesebb körű alkalmazásra csak most számíthat. Elterjedésüket a megfelelő technológia hiánya korlátozta: digitális szűrők realizálására hosszú időn át csak általános célú számítógép segítségével, megfelelő program készítésével kerülhetett sor. Az integrált áramkörti technika, elsősorban az LSI technika területén elért eredmények azonban ma már lehetővé teszik olyan speciális célú hardware digitális szűrők építését, amelyek alkalmasak analóg szűrés feladatok gazdaságos ellátására.

A digitális szűrőknek az analóg szűrőkkel szemben, mind elméleti, mind gyakorlati szempontból számos előnyös tulajdonságuk van.

1. *Illeszkedés a digitális környezetbe.* A digitális áramkörök és hálózatok általános elterjedése a szűrés feladatok ugyancsak digitális úton történő megoldását teszi célszerűvé. Digitális környezetben, digitális berendezésekben analóg szűrők alkalmazása a szükséges konverziók miatt gazdaságtalan.

2. *Méretcsökkenés.* A hagyományos szűrő áramkörök méretei a régi technikával tovább nem csökkenthetők; az integrált technika eredményes alkalmazása pedig az induktivitások és nagy értékű kapacitások kiváltását követeli meg. A digitális szűrők alkotó elemei (léptető regiszterek, összeadó és szorzó áramkörök) igen jól integrálhatók, jól illeszkednek az LSI technikához.

3. *Kevesebb megkötés a tervezésben.* A mintavételező szűrőknek a hagyományos szűrőktől merőben eltérő struktúrájuk és ebből fakadóan eltérő tulajdonságaik vannak, amelyek számos olyan szűrőkarakterisztika előírását is megengedette teszik, amelyek véges sok elemből álló hagyományos áramkörökkel egyáltalán nem realizálhatók. Ilyen például a lineáris fázismentű szűrő.

4. *Alaptagok összekapcsolása.* A másodfokú digitális szűrő alaptagok összekapcsolására nincsen különösebb megkötés, így kis számú szabványos típusal tetszőleges karakterisztika megvalósítható.

5. *Változtatható paraméterek.* A digitális szűrő karakterisztikáját meghatározó paraméterek a szűrő felépítésénél fogva rugalmasan, könnyen változtathatók. Így a szűrő karakterisztikája előre programozható, vagy a követelményeknek megfelelően adaptíven változtatható (kiegyenlítés).

6. *Hangolhatóság.* A szűrő karakterisztikája a frekvenciatengely mentén a mintavételi frekvencia változtatásával lineárisan nyújtható, III. zsurghatható.

7. *Nagy pontosság és stabilitás.* A digitális szűrő-karakterisztikák toleranciája széles frekvenciasávban jól kézben tartható, szigorú követelmények teljesíthetők. A stabilitást alapvetően a mintavételi frekvencia hőmérsékletfüggése, a pontosságot a kvantálási, kerekítési hibák szabják meg.

8. *Kis frekvenciás működés.* Az analóg szűrőáramkörökkel szemben a digitális szűrőkkel igen kis frekvenciás (0,1 Hz-nél kisebb) működés megvalósítható, a mintavételi frekvencia hangolásával.

9. *Többszörös kihasználás.* A mintavételező szűrők jellegzetes struktúrája lehetővé teszi ugyanazon szűrő többszörös kihasználását, időosztásos technikával különböző jelfeldolgozási feladatok egyidejű ellátását. A többszörös kihasználás közvetetten a méretek csökkenését jelenti.

10. *Többdimenziós jelek feldolgozása.* A két be- és két kimenetű ún. kétdimenziós digitális szűrők a kétdimenziós jelek (pl. kép) flexibilis, pontos feldolgozását teszik lehetővé.

A digitális szűrők alkalmazása az analóg szűrőkkel szemben néhány vonatkozásban hátrányokkal jár, illetve nem lehetséges.

1. *Költségek.* A diszkrét, illetve az integrált áramkörti elemekből felépített digitális szűrők ára jelenleg még magas a megfelelő analóg szűrő árához képest.

2. *Frekvenciahatár.* Az áramkörti technika jelenlegi szintje a nagyfrekvenciás felhasználást nem teszi lehetővé. A digitális áramkörti elemek maximális frekvenciahatára néhányszor 10 MHz, így a szűrő bonyolultságától és felépítésétől függő számítási idővel dolgozik. Ha ezen idő a szükséges mintavételi időnél nagyobb, valós idejű (real-time) feldolgozás nem lehetséges.

3. *Periodicitás.* A digitális szűrők átviteli karakterisztikájának periodicitása számos alkalmazásban előnytelen, illetve kiegészítő analóg szűrő alkalmazását teszi szükségessé.

4. *Kerekítési hibák.* A digitális szűrőknél elkerülhetetlen kerekítések, kvantálások — a szűrő bonyolultságától és felépítésétől függő mértékben — zajt okoznak. A kvantálási zaj megfelelő méretezéssel a megengedett szint alatt tartható.

5. *Tápfeszültség.* Az egyéb aktív szűrők megoldásokhoz hasonlóan tápfeszültséget igényelnek.

A hátrányok egy része idővel valószínűleg kiküszöbölhető.

E cikkben a mintavételező szűrők alapvető, más szűrőosztályoktól elhatároló tulajdonságait, valamint a szűrőosztály tagjainak különböző szempontok szerinti osztályozását adjuk meg. Végül a gyakorlatilag előforduló típusokat összefoglaló táblázatot közlünk. A szűrőosztály alapvető tervezési megfontolásait a cikksorozat egy következő tagja foglalja össze.

1. A mintavételező szűrők definíciója

A mintavételező szűrők frekvenciaszűrők, átviteli tulajdonságaik a frekvencia függvényében adóttak, elméletük a harmonikus függvényekkel felépített teljes ortonormált függvényrendszerre alapozható.

Fogalmazzuk meg a mintavételező szűrők legfontosabb idő- és frekvenciatartománybeli sajátosságát.

A mintavételező szűrőre jellemző, hogy kimenetén a t időpillanatban megjelenő jel kizárólag a bemeneti jel $t-t_0-nT$ ($t_0 \geq 0, n=0, 1, 2, \dots$) időpontban felvett értékeinek lineáris függvénye, megengedve bizonyos n -ekhez tartozó bemeneti jelmintáktól való függetlenséget is. A bemeneti jelet $x(t)$ -vel, a kimeneti jelet $y(t)$ -vel jelölve tehát

$$y(t) = L\{x(t-t_0-nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x(t-t_0-nT), \quad (1)$$

ahol L a bemeneti jelmintákra vett lineáris operációt jelöli c_n valós együtthatókkal. A mintavételező szűrők ezen időtartománybeli tulajdonságát legszemléletesebben a t_0+nT időpontokban jelentkező Dirac-függvényekből álló $k(t)$ súlyfüggvénye fejezi ki (1. ábra). Gyakorlatilag $t_0=0$, így

$$k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta(t-nT) \quad (2)$$

alakú. A frekvenciatartományban e súlyfüggvénynek $1/T$ szerint periodikus átviteli karakterisztika felel meg:

$$K(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-j\omega nT} \quad (3)$$

A csak diszkrét időpontokban értelmezett súlyfüggvényt a z tartományban kezelhetjük a legeredményesebben [8].

(3)-ból $e^{j\omega T} \Rightarrow e^{sT}$ ($s = \alpha + j\omega$) általánosítással és $z = e^{sT}$ helyettesítéssel, illetve a (2) összefüggés közvetlen z transzformációjával a szűrő transzfer függvényét kapjuk:

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}. \quad (4)$$

A mintavételező szűrők tehát a kimeneti jelet a bemeneti jel T időközönként felvett értékeiből, mintáiból határozzák meg. A szűrőosztály elnevezése éppen ezen sajátosságából származik [14].

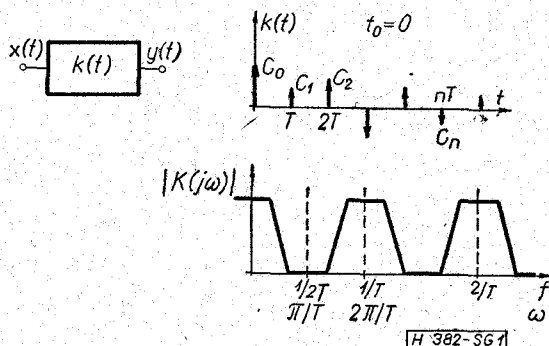
2. Folytonos és diszkrét idejű szűrők

Attól függően, hogy az (1) összefüggés minden t -re igaz vagy sem, a mintavételező szűrők folytonos vagy diszkrét működési idejűek lehetnek. Ha tetszőleges t időpontban rendelkezésre állnak a bemeneti jel $t-nT$ időpontban felvett értékei, mintái, és az (1) szerinti kimeneti jel folyamatosan képződik, folytonos idejű mintavételező szűrőről beszélünk. Az ilyen szűrő ki- és bemeneti jele folytonos jel ($2a$ ábra), megvalósítása tehát csak analóg áramkörök felhasználásával lehetséges. A bemeneti jel T -közű mintáit T késleltetésű tagokból álló késleltető művonal megcsapolásairól tetszőleges időpillanatban megkaphatjuk.

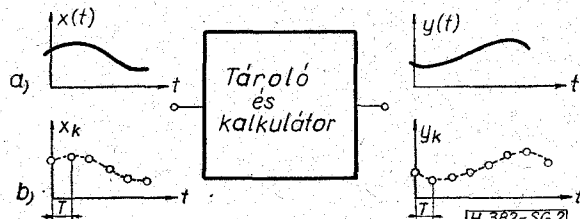
Ha a mintavételező szűrők (1) definíciós összefüggése csak $t=kT$ (k tetszőleges egész szám) időpontokban áll fenn, diszkrét idejű mintavételező szűrőről beszélünk. A szűrő bemenetére csak az $x(t)$ jel $f_s=1/T$ frekvenciával vett $\{x_k\}=\{x(kT)\}$ mintái kerülnek, a szűrő pedig a bemeneti mintasorozatból $\{y_k\}=\{y(kT)\}$ kimeneti mintasorozatot állít elő. A kimenet értékét tehát csak diszkrét időpontokban határozza meg (2b ábra). Az (1) összefüggés helyett most

$$y_k = L\{x_{k-n}\} \quad \text{minden } k\text{-ra.} \quad (5)$$

Megvalósítása digitális és analóg úton egyaránt lehetséges. Digitális szűrők ezek szerint a digitális megvalósítású diszkrét idejű mintavételező szűrők. Mivel elméletüket tekintve a diszkrét idejű mintavételező szűrők sokban megegyeznek egymással, az irodalomban általában digitális szűrőre kimondott megállapítások diszkrét idejű mintavételező szűrőkre, esetleg folytonos idejű mintavételező szűrőkre is érvényesek. Például az (5) összefüggés, mint az (1) speciális esete, természetszerűleg a folytonos idejű szűrőkre is igaz.



1. ábra. A mintavételező szűrők jellegzetes súlyfüggvénye és átviteli karakterisztikája



2. ábra. Mintavételező szűrők funkcióinak időben folytonos (a) és időben diszkrét (b) megvalósítása

3. Az analóg és digitális kivitelű szűrők

A mintavételező szűrőnek a bemeneti mintasorozathoz a kimeneti jel előállításához alapvetően két funkciót kell betöltenie. Az időtartománybeli definícióból következik, hogy egyrészt tárolnia kell mindazon értékeket, amelyeket a kimenet meghatározásánál figyelembe kíván venni, másrészt a kimenetet kell meghatározni, a tárolt értékek lineáris kombinációjaként, súlyozott összegeként. Ez utóbbit végzi az ún. kalkulátor (aritmetika) áramkör (2. ábra). A két fő funkció — a tárolás és a kalkuláció (műveletvégzés) — alapvetően kétféleképpen oldható meg, analóg és digitális módon. A digitális megvalósítás mindig diszkrét idejű.

Az analóg kivitelű tárolás lehet folytonos és diszkrét idejű. A tárolás egyik analóg formája a folytonos analóg jel késleltetése megcsapolt késleltető művonallánc vagy speciális késleltető kábel segítségével. A másik, a bemeneti jel mintavételezését megkívánó diszkrét idejű tárolási módszer, az analóg léptető regiszter alkalmazása. A töltésátvitel elvén működő analóg léptető regiszterek két típusa ismeretes: a BBD (Bucket Brigade-Device) vödörlánc eszköz és a CCD (Charge-Coupled Device) töltéscsatló eszköz [4, 15, 16].

Digitális tárolás a jól ismert digitális léptető regiszterekkel történik. A késleltetett jelek súlyozását és előjeles összegzését végző analóg kalkulátor ellenálláshálózatot, súlyozó és összeadó műveleti erősítőket tartalmaz. A digitális kalkulátor a tárolt bináris szavakat digitálisan szorozza a binárisan ábrázolt súlyozó együtthatóval, s a bináris szorzókat digitális összeadó áramkörrel összegzi. A súlyozó együtthatókat memóriában tárolja.

Így tehát többféle változat képzelhető el, amelyeket a konkrét megvalósítástól függően további egységekkel kell kiegészíteni. Ha a mintavételező szűrőt analóg rendszerbe kívánjuk beiktatni, akkor a digitális úton végzett tárolás, illetve számítás analóg-digitális és digitális-analóg konverterek beiktatását teszi szükségessé. Ennek előrebocsátásával a funkciók megvalósításától függően a mintavételező szűrők három csoportba oszthatók (1. táblázat). Az analóg tárolás — digitális kalkuláció konfigurációnak nincs gyakorlati jelentősége.

Az analóg mintavételező szűrők esetében a tárolás időben folytonosan és diszkrétén is megoldható. Analóg-digitális átalakítás nem szükséges, így kvantálási torzítás sincs. Torzítást a késleltető vonal

1. táblázat

Tárolás → Műveletvégzés ↓	Analóg	Digitális
Analóg	Analóg mintavételező szűrő 1. Folytonos idejű 2. Diszkrét idejű	Kvázidigitális szűrő (diszkrét idejű)
Digitális	—	Digitális szűrő (diszkrét idejű) 1. Hardware 2. Digitális számítógépen

diszperziója, lineáris torzítása okozhat. Az analóg mintavételező szűrők előnye, hogy egyszerű kiszolgáló áramköröket igényelnek [3, 12].

A kvázidigitális (pszeudodigitális) szűrők a tárolást digitális léptető regiszterrel, a műveletvégzést analóg módon valósítják meg. E szűrők hibrid volta a bemeneten (analóg jel esetén), valamint a kalkulátor és a tároló áramkörök csatlakozási pontjain analóg-digitális konverziót, a tároló és kalkulátor között pedig digitális-analóg konverziót igényel. A csatlakozási pontok konverzió-igénye miatt az analóg és digitális részek minél teljesebb elkülönítése előnyös. Gyakorlatban elsősorban az olyan felépítésű szűrők terjedtek el, amelyek csak egy bemeneti analóg-digitális konverziót és egy kimeneti digitális-analóg konverziót igényelnek [10].

A digitális szűrők a mintavételező szűrőosztály azon csoportját alkotják, ahol a tárolás és a műveletvégzés egyaránt digitális úton történik (gyakorlatban a digitális szűrő elnevezés az itt használnál szélesebb értelemben is felbukkan). Előnyeiket, hátrányaikat a cikk bevezetőjében már áttekintettük. Alkalmazásuk akkor kedvező, ha digitális rendszerben kerülnek felhasználásra, hiszen így a konverziók s az általuk okozott kvantálási torzítások elmaradnak. A digitális műveletvégzés kerekítési hibái természetesen nem kerülhetők el. A digitális szűrők két módon is realizálhatók, speciális célú hardware-ral és digitális számítógéppel. A kifejezetten digitális szűrést végző hardware-ral a real-time jelfeldolgozás nagyobb frekvenciáig lehetséges. Az általános célú számítógépen a digitális szűrőt software úton, programozással állítjuk elő. Elsősorban nem real-time feldolgozásra, valamint a hardware digitális szűrő szimulációjára alkalmas.

4. Véges és végtelen memóriájú szűrők

A mintavételező szűrők a kimeneti jelet a bemeneti jel T -időközönként vett értékeiből határozzák meg. Attól függően, hogy a kimenet számításakor véges számú vagy végtelen sok bemeneti mintát vesz figyelembe, véges vagy végtelen memóriájú mintavételező szűrőről beszélünk.

A véges memóriájú mintavételező szűrők impulzus válasza, $k(t)$ súlyfüggvénye véges számú Dirac-impulzusból áll:

$$k(t) = \sum_{n=0}^M c_n \delta(t - nT), \quad (6)$$

memóriájuk tehát MT időtartamú. Éppen ezért ezeket véges súlyfüggvény-szélességű (finite-/duration-/impulse response, FIR) szűrőknek is nevezik. Véges memóriájú szűrők esetén tehát az (1), (2), (3), (4) összefüggésekben $n=0, 1, 2, \dots, M$.

A végtelen memóriájú mintavételező szűrőkre (infinite-/duration-/impulse response, IIR) az összefüggések megszorítás nélkül érvényesek. A memória nagyságát illetően az analóg szűrőknek a végtelen memóriájú mintavételező szűrők felelnek meg.

4.1 Folyamatos jelfeldolgozás

A véges memóriájú szűrőt véges számú bemeneti minta tárolásával realizálhatjuk. Végtelen memóriájú

szűrő realizálása a bemeneti minták tárolásával nem oldható meg. A jelenlegi kimeneti értékek végtelen sok múltbeli bemeneti értéktől való függését lehetővé tehetjük azonban azáltal, hogy a kimeneti érték meghatározásához nem csupán a jelenlegi és véges számú múltbeli bemeneti értéket vesszük figyelembe, hanem véges számú múltbeli kimeneti értéket is. Mivel a múltbeli kimenetet régebbi bemenetek alapján számítottuk, a jelenlegi kimenet közvetlenül ezekről is függ.

Az elmondottakat egy egyszerű példán illusztráljuk. Legyen a diszkrét idejű szűrő y_k kimeneti értéke az alábbi módon előállítva:

$$y_k = x_k + \frac{1}{2} y_{k-1}.$$

Ennek a szűrőnek válasza az $x_0 = 1$ egységimpulzusra:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad y_k = \frac{1}{2^k}.$$

Ugyanezt a választ adja az egységimpulzusra az a szűrő is, amelynek a jelenlegi kimeneti jele végtelen sok múltbeli bemeneti jeltől a következőképpen függ:

$$y_k = x_k + \frac{1}{2} x_{k-1} + \frac{1}{4} x_{k-2} + \dots + \frac{1}{2^k} x_{k-n},$$

$x_0 = 1$ esetén ugyanis

$$y_0 = x_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{2} x_{1-1} = \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad y_k = \frac{1}{2^k} x_{k-k} = \frac{1}{2^k}.$$

Tehát a diszkrét idejű mintavételező szűrőket leíró differenciaegyenlet általában a következőképpen alakul:

$$y_k = \sum_{i=0}^M d_i x_{k-i} - \sum_{i=1}^K b_i y_{k-i}, \quad (7)$$

ahol d_i és b_i a súlyozó együtthatók. A d_i -k a bemeneti mintákat közvetlen (direkt) súlyozó együtthatók, a b_i -k pedig a visszacsatolt (back) múltbeli kimeneti minták súlyozó együtthatói. A (7) szerinti számítási algoritmus a kimeneti mintákat k egymást követő értékeire folyamatosan állítja elő.

Látható (7)-ből, hogy végtelen memória megkövetelése esetén tárolni kell az M darab x_{k-i} és a K darab y_{k-i} értéket, és ismerni kell a jelenlegi bemeneti értéket. Az y_{k-i} értékeket azonban előzőleg már ki kell számítani, hogy y_k -t előállíthassuk, így y_k egy rekurziós formula segítségével határozható meg. Innen ered a rekurzív szűrő elnevezés.

Ha véges memóriával megelégszünk, (7)-ben $b_i = 0$ helyettesítéssel a kimenet csak a jelenlegi és véges számú múltbeli bemeneti érték függvénye lesz, és így diszkrét konvolúcióval közvetlenül meghatározható. A formula rekurziós jellege megszűnik, ezért nevezik az ilyen szűrőket az előző ellentétpárjaként nonrekurzív szűrőknek [13].

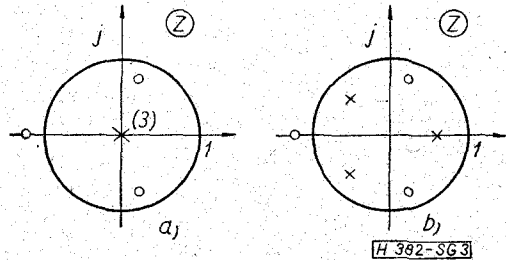
A mintavételező szűrők leírására szolgáló differenciaegyenletek legcélszerűbb módon Z transzformációval oldhatók meg. A Z transzformációt a (7) egyenletre alkalmazva, zérus kezdeti feltételek esetén a mintavételező szűrőket leíró transzfer függvényt

állíthatjuk elő:

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^M d_i z^{-i} - Y(z) \sum_{i=1}^K b_i z^{-i}, \quad (8)$$

$$K(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M d_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^K b_i z^{-i}} = \frac{D(z)}{B(z)}. \quad (9)$$

Itt $X(z)$ az $\{x_k\} = \{x(kT)\}$ minták, $Y(z)$ az $\{y_k\} = \{y(kT)\}$ minták Z transzformáltja, amelyeket definíció szerint a $K(z)$ transzfer függvény kapcsol össze. Az eredményül kapott $K(z)$ transzfer függvény racionális tört-



3. ábra. A pólus-zérus elrendezés a) véges és b) végtelen memóriájú szűrők esetén

függvény, amely a z komplex síkon zérus-pólus elrendezésével (3. ábra) adható meg. A valós d_i , b_i együtthatók következtében a szingularitások valósak vagy konjugált komplex párokat alkotnak. Nonrekurzív szűrők esetén $K(z)$ nevezője leegyszerűsödik, ebből következően pólusok csak az origóban helyezkednek el (a z^{-1} síkon csak zérusok vannak). Rekurzív szűrők pólusai az egész z síkon lehetnek, ennek ára azonban az, hogy a z sík egységkörén vagy azon kívül fekvő pólusok az áramkört instabillá teszik, hiszen a pólusok az s síkon a $j\omega$ tengelyre vagy a jobb félsíkra kerülnek. A rekurzív szűrők stabilitása tehát a b_i értékektől függ, míg a nonrekurzív szűrők természetesen mindig stabilak. Stabil szűrők esetén $K(z)$ -ből $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel nyerjük vissza a $K(j\omega)$ átviteli karakterisztikát (instabilitás esetén, mint tudjuk, az átviteli karakterisztika nem értelmezhető). A súlyfüggvény c_n ($n=0, 1, \dots$) együtthatóit a $K(z)$ (9) összefüggéséből a (4)-gyel való összevetéssel határozhatjuk meg a számláló polinomnak a nevező polinommal való osztásával vagy Jenkins módszerével [9]. Az utóbbi, rekurziós módszer azon a felismerésen alapszik, hogy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K(z) = c_0.$$

Így

$$K_n(z) = z[K_{n-1}(z) - c_{n-1}], \quad K_0(z) = K(z)$$

értelmezéssel:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K_n(z) = c_n.$$

Ezek szerint, ha a nevező legmagasabb fokszámú tagjának együtthatója, $b_0 = 1$, akkor:

$$c_0 = d_0,$$

$$c_1 = d_1 - b_1 c_0,$$

$$c_2 = d_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1,$$

$$c_n = d_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 - \dots - b_1 c_{n-1} = d_n - \sum_{i=1}^n b_i c_{n-i}. \quad (10)$$

Ha $n > M$, $d_n \equiv 0$, ha $n > K$, $b_n \equiv 0$.

A (7) egyenlet fizikailag könnyen realizálható a minták tárolásával és a súlyozott minták összegezésével a 4. ábrán látható tömbvázlat szerint. A súlyozás a $K(z)$ transzfer függvényből közvetlenül kiolvasható d_i és b_i együtthatókkal való szorzás útján történik. A mintasorozatok folyamatos feldolgozása érdekében a tárolást léptető tárolással, tulajdonképpen késleltetéssel oldjuk meg. Az ábra T feliratú blokkjai olyan késleltetőknél felelnek meg, amelyek egy mintavételi időközzel egyenlő, azaz T késleltetést adnak. Az egymást követő blokkok így a különbözőképpen késleltetett mintákat tárolják.

A 4. ábra szerinti realizáló struktúra rekurzív szűrőt állít elő. Látható, hogy a múltbeli kimeneti minták figyelembevételét a kimenet visszacsatolásával éri el. A visszacsatolás megoldásától függően különböző realizáló struktúrák lehetségesek [6, 14]. Az ábrából jól látható, hogy nonrekurzív szűrők esetén a visszacsatolások megszűnnek, és ún. transzverzális struktúrához jutunk. A visszacsatolás hiánya eredményezi a nonrekurzív szűrők abszolút stabilitását.

A 2. táblázat összegzi az elmondottakat, a véges és végtelen memóriájú szűrők tulajdonságait és az eddig megismert, legszokásosabb megvalósítási formát. A 4. ábra szerinti alapvető struktúra átrendezésével nyerhető különböző struktúrákkal egy következő cikkben foglalkozunk.

A véges memóriájú jelfeldolgozás azonban nemcsak nonrekurzív, a végtelen memóriájú jelfeldolgozás nemcsak rekurzív úton oldható meg.

A rekurzív szűrőkkel kapcsolatban meg kell jelezni, hogy memóriájuk, bár általában végtelen, elfajult esetben véges is lehet. Más megfogalmazásban: véges memóriájú szűrő rekurzív szűrőként is realizálható. Tekintsük például az alábbi véges memóriájú szűrő transzfer függvényét:

$$K(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-M},$$

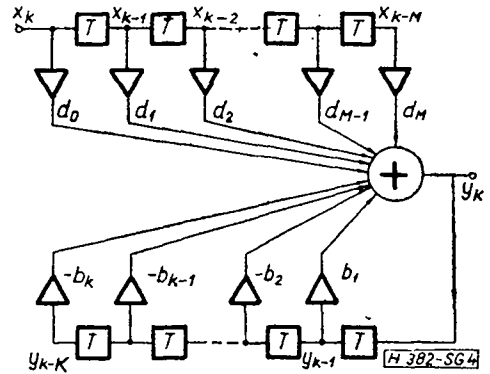
mivel $K(z)$ véges mértani sor összege, írható:

$$K(z) = \frac{z^{-M-1} - 1}{z^{-1} - 1} = \frac{1 - z^{M+1}}{z^M(1 - z)}.$$

Az így nyert transzfer függvényt visszacsatolással realizálhatjuk.

A véges memóriájú szűrők rekurzív előállítását tetszőleges esetben is lehetséges. Jelölje K_l ($l = 0, 1, 2, \dots, M$) a $K(z)$ transzfer függvény $\omega_l = 2\pi l / (M+1)T$ ekvidisztáns frekvenciákhoz tartozó értékét. (4)-ből a véges memóriának megfelelően:

$$K_l = \sum_{n=0}^M c_n z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega_l T}} = \sum_{n=0}^M c_n e^{-j \frac{2\pi n l}{M+1}}. \quad (11)$$



4. ábra. A mintavételező szűrőket leíró differenciaegyenlet közvetlen realizálása

2. táblázat

Memória	VÉGES	VÉGTELEN
Transzfer függvény	Speciális racionális törtfüggvény $b_1 \equiv 0$	Racionális törtfüggvény $b_1 \neq 0$
Zérus-pólus elrendezés a z^{-1} síkon	Csak zérusok	Zérusok-pólusok
Alapvető megvalósítása; név:	NONREKURZÍV	REKURZÍV
Eljárás	Konvolúcióval, visszacsatolás nélkül	Visszacsatolással
Kimeneti jelet meghatározza	Bemeneti jel	Bemenet + múltbeli kimenet
Stabilitás	Stabil	b_1 -ktől függ
Struktúra [13, 14]	Transzverzális, kaskád	Direkt, kaskád, párh., létra, hullám stb.

Az átviteli karakterisztika K_l mintáit éppen a súlyfüggvény c_n együtthatóinak diszkrét Fourier-transzformáltjával állítottuk elő [11]. A transzformáció megfordításával a d_n súlyozó együtthatókkal meggyező c_n -ek:

$$c_n = \frac{1}{M+1} \sum_{l=0}^M K_l e^{j \frac{2\pi n l}{M+1}}, \quad n=0, 1, \dots, M. \quad (12)$$

Ha most (12)-t a véges memóriájú szűrők

$$K(z) = \sum_{n=0}^M c_n z^{-n}$$

transzfer függvényébe helyettesítjük, rendezés után a véges mértani sor összegképletének felhasználásával kapjuk:

$$K(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{l=0}^M K_l \sum_{n=0}^M [z^{-1} e^{j2\pi l / (M+1)}]^n = \frac{1 - z^{-(M+1)}}{M+1} \sum_{l=0}^M \frac{K_l}{1 - z^{-1} e^{j2\pi l / (M+1)}}. \quad (13)$$

Az így nyert $K(z)$ két tényezőre bontható, Az $1-z^{-(M+1)}$ tényező egy fésűszűrő transzfer függvénye, amelynek zérus helyei az egységkörön egyenletesen elosztva helyezkednek el. A második tényező $M+1$ darab párhuzamosan kötött, komplex együtt-hatós, elsőfokú ($K=1$) rekurzív szűrőt jelképez. A (11) bői következő $K_i = \bar{K}_{M+1-i}$ reláció felhasználásával az i -edik és $M+1-i$ -edik tag másodfokú ($K=2, M=1$), valós együtt-hatójú rekurzív szűrővé vonható össze (a pár nélkül álló K_0 és páratlan M esetén a $K_{(M+1)/2}$ minták csak valósak lehetnek) [5]. Sajnos, e speciális másodfokú tagok igen toleranciaérzékenyek.

A végtelen memóriájú jelfeldolgozás realizálására eddig a visszacsatolást használtuk fel. E rekurzív megoldás, az elfajult esetének tekinthető nonrekurzív megoldással együtt, a kimeneti mintasorozatot folyamatosan, időeltolástól független módon állítja elő. A minták meghatározásukat követően, közbenső tárolás nélkül jutnak a kimenetre.

4.2 Szakaszos jelfeldolgozás

A mintavételező szűrést — kisebb gyakorlati jelentőséggel és kizárólag diszkrét jelfeldolgozás esetén — szakaszos feldolgozással, szegmentálással is megvalósíthatjuk [5]. Ha a bemeneti mintasorozatot N számú mintát tartalmazó sorozatok (szegmensek) egymásutánjára bontjuk fel, a bemeneti mintasorozatot szegmensenként dolgozhatjuk fel. Egy bemeneti szegmensből — $M+K$ számú kezdeti feltétel ismeretében — a kimeneti minták N elemű sorozatát határozhatjuk meg. Ebben az esetben a (7) kifejezést a kezdeti feltételek kiemelésére az alábbi alakban célszerű tekinteni:

$$y_k = \sum_{i=0}^k d_{k-i}x_i - \sum_{i=0}^{k-1} b_{k-i}y_i + \sum_{i=k-M}^{-1} d_{k-i}x_i - \sum_{i=k-K}^{-1} b_{k-i}y_i, \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

Mivel a felbontás második tagjában szereplő y_i ($i=0, \dots, k-1$) értékek visszahelyettesítéssel kiküszöbölhetők, belátható, hogy az $\{y_k\}$ N elemű sorozat az előző sorozat utolsó M darab bemeneti és K darab kimeneti mintájának mint kezdeti feltételeknek és a jelenlegi bemeneti szegmensnek az ismeretében, véges konvolúciókkal meghatározható [5]. Bizonyítás nélkül:

$$y_k = \sum_{i=0}^k c_{k-i}x_i + \sum_{j=k-M}^k g_{k-j} \sum_{i=0}^{M-j-1} d_{j-i+1}x_{i-1} + \sum_{j=k-K}^k g_{k-j} \sum_{i=0}^{K-j-1} b_{j-i+1}y_{i-1}, \quad (14)$$

ahol c_n ($n=0, 1, \dots, N-1$) a súlyfüggvény együtt-hatói (10) szerint, g_n ($n=0, 1, \dots, \max(M, K)$) pedig az $1/B(z)$ transzfer függvényhez tartozó súlyfüggvény együtt-hatói. A (10) alapján

$$g_0 = 1,$$

$$g_n = \sum_{i=1}^n b_i g_{n-i}.$$

Speciálisan, véges memóriájú esetben a (14) összefüggés jelentősen egyszerűsödik:

$$y_k = \sum_{i=k-M}^k d_{k-i}x_i = \sum_{i=0}^M d_i x_{k-i}. \quad (15)$$

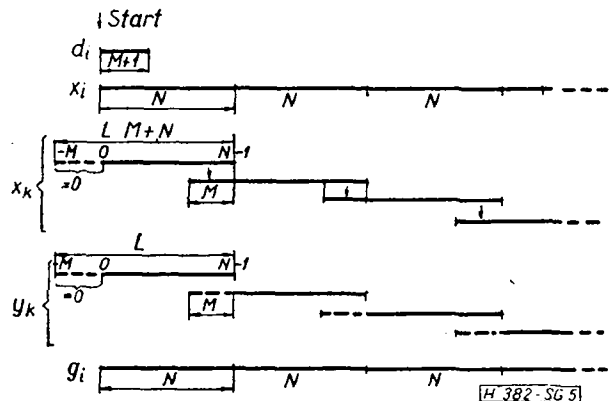
Amint a (14) és (15) összefüggésekből kitűnik, ezen átalakítás csak a végtelen memóriájú jelfeldolgozás esetén ad érdemben új eredményt: azaz végtelen memóriájú szűrés a bemeneti mintasorozat szegmentálásával, és az egyes szegmensekkel — az előző be- és kimeneti szegmens néhány utolsó elemének figyelembevételével — végzett véges konvolúciókkal is előállítható. A véges diszkrét konvolúcióval való számítás így a véges és végtelen memóriájú szűrők esetében egyaránt lehetséges. A végtelen memóriájú szűrők ilyen megvalósítási lehetősége — úgy érezzük — inkább csak elméleti jelentőségű.

A szegmentálás szerepe még hangsúlyozottabb jelleget nyer, ha a véges konvolúciókat diszkrét Fourier-transzformációval (DFT) számoljuk [2, 6]. A DFT véges L számú T -közű pontban megadott időfüggvényhez L számú, az $1/LT$ ($l=0, 1, \dots, L-1$) frekvenciákhoz tartozó spektrumaadat, — mint a (11)-ben láthattuk — a megfelelő z függvény $e^{j2\pi l/L}$ helyen vett helyettesítési értékeit rendeli. Mivel a DFT transzformáltak szorzása és a sorozat inverz transzformálása az időfüggvények konvolúciójának felel meg, a véges konvolúció műveletét három DFT transzformációval és egy szorzással helyettesíthetjük. Mivel a DFT transzformáció FFT

(Fast Fourier Transform) eljárással gyorsan, $\log L$ -al arányos idő alatt végrehajtható, szemben a konvolúció L^2 -tel arányos időigényével, belátható, hogy nagy L esetén a DFT eljárás előnyösebb. Bár a (14) alapján ilyen módon végtelen és véges memóriájú szűrést is végrehajthatunk, gyakorlatilag az utóbbi a jelentősebb. M fokszám és N elemű szegmensek esetén a (15) konvolúciós összefüggés $L=M+N$ választással transzformálandó:

$$Y_l = D_l \cdot X_l, \quad l=0, 1, \dots, L-1.$$

Itt X_l az éppen tekintett szegmens N eleméből és az előző szegmens utolsó M eleméből álló x_k ($k=-M, \dots, 0, 1, \dots, N-1$) sorozat (11) szerinti DFT-je, D_l pedig a $d_i = c_i$ ($i=0, 1, \dots, M$) és $d_i=0$ ($i=M+1, \dots, L$) összetételű mintasorozat transzformáltja. Az Y_l szorzat inverz transzformáltjaként nyerhető



5. ábra. Véges memóriájú szakaszos jelfeldolgozás

3. táblázat

Feldolg. módja	Folyamatos		Szakaszos	
	Rekurzív	Konvolúciós		DFT
Végtelen	Rekurzív	—	Véges konvolúciós	FFT
Véges	Fésűszűrő + rekurzív	Nonrekurzív	—	FFT

y_k ($k = -M, -1, 0, 1, \dots, N-1$) sorozat nemnegatív indexű elemei a keresett kimenetet adják. Az 5. ábra hosszú bemeneti sorozat esetén mutatja a szegmentálás módját, a tekintetbe vett elemeket [6]. Nyilvánvaló, hogy a feldolgozás megszakításmentességéhez a bemeneten és kimeneten puffer tárolók elhelyezése szükséges. Ez is indokolja, hogy bár 12–32-nél nagyobb fokszám esetén a véges memóriájú szűrő FFT eljárással gyorsabb a nonrekurzív előállításnál, gazdaságosabbá — jelenleg — csak 200...500 fokszám felett válik [1, 7].

A 3. táblázat a véges és végtelen memóriájú jel-feldolgozás összes ismert megvalósítási módját rendszerezi. Mindkét típus elvileg három különböző módon állítható elő, ezért a véges memóriájú szűrőknek a nonrekurzívval, a végtelen memóriájú szűrőknek a rekurzívval való azonosítása — bár elvitathatatlanul a leggyakoribb megvalósítási formájuk — fogalmi zavart okozhat.

5. Összefoglalás

Az előzőekben a mintavételező szűrők osztályozását különböző szempontok szerint végeztük el. Az osztályozások 1. táblázathoz hasonló elrendezésű összesítése a mintavételező szűrők lehetséges típusait mutatja be (4. táblázat).

Az analóg mintavételező és a kvázidigitális szűrők főként véges memóriájú, nonrekurzív változatban kerülnek megvalósításra. A nonrekurzív szűrőt szinte mindig megcsapoltt analóg, illetve digitális késleltető láncsal, — a visszacsatolástól mentes 4. ábra szerinti elrendezéssel — ún. transzverzális struktúrával

valósítják meg. Innen ered e szűrőtípusok megnevezése [10, 12].

A digitális szűrők véges és végtelen memóriájú változata egyaránt elterjedt [8]. A véges memóriájú szűrőt elsősorban nonrekurzív úton, esetleg nagy fokszám esetén FFT eljárással, a végtelen memóriájú szűrőt pedig különböző struktúrájú rekurzív szűrővel állítják elő. Hardware és software realizációk egyaránt lehetségesek.

IRODALOM

- [1] Bergland, G. D.: FFT Hardware Implementations. An overview. IEEE Au-17. pp. 104–108. Jun. 1969.
- [2] Cooley, J. W.—Tukey, J. W.: An algorithm for machine calculation of complex Fourier series. Math. Computation, Vol. 19. pp. 297–301. Apr. 1965.
- [3] Eriksson, L. E.: Tapped delay lines using BBD technique. Royal Inst. of Techn. Stockholm. Technical Report. No. 62. 1973. febr.
- [4] Forgács G.—Lőrinczy A.—Tüttö P.: Töltés-továbbítású eszközök — a félvezető technika új iránya. Híradástechnika, 24. k. 7. sz. pp. 202–206. 1973.
- [5] Gold, B.—Jordan, K. L.: A note on digital filter synthesis. Proc. IEEE, Vol. 56. pp. 1717–1718. 1968. Oct.
- [6] Gold, B.—Rader, C. M.: Digital Processing of Signals. McGraw Hill, New York 1969.
- [7] Herrman, O.: Véges memóriájú szűrők. Előadás. Summer School on Circuit Theory, Prága 1974.
- [8] Jury, E. I.: Theory and Application of the Z-transform method. John Wiley, New York, 1964.
- [9] Jenkins: A useful recursive form obtaining inverse Z-transform, Proc. IEEE Vol. 55. Apr. 1967.
- [10] Leuthold, P.: Filternetzwerke mit digitalen Schieberegistern. Philips Research Reports, Suppl. 1967. No. 5.
- [11] Pálmai L.-né: Integráltranszformáció gyors végrehajtása számítógépen. Híradástechnika. 23. évf. 5. sz. pp. 138–144. 1972. máj.
- [12] Puckette, G. M.—Butler, W. J.—Smith, D. A.: Bucket-Brigade transversal filters. IEEE Comm. Vol. 22. No. 7. pp. 926–934. 1974.
- [13] Rabiner, L. R.—Rader, C. M.: Digital signal processing. IEEE Selected reprint series, 1972.
- [14] Sallai Gy.—Géher K.: Digitális szűrők. Tanulmány a Műszeripari Kutató Intézet számára, Budapest, 1974.
- [15] Sangster, F. L. J.: The bucket-brigade delay line in shift register for analogue signals. Philips Techn. Rev. Vol. 31. No. 4. pp. 97–110. 1970.
- [16] Szabó Z.—Székely V.: Analóg léptető regiszterek és vastagréteg megvalósításuk. Híradástechnika, 25. k. 6. sz. pp. 167–175. 1974.

4. táblázat

	Analóg tárolás		Digitális tárolás		
	Folyt. idejű	Diszkrét idejű	Folyt. idejű	Diszkrét idejű	
Analóg mintavételezés	Transzverzális	Transzverzális	—	Transzverzális kvázidig.	Véges memóriá
	(elvileg lehet)	(elvileg lehet)	—	(elvileg lehet)	
Digitális mintavételezés	—	—	—	Nonrekurzív v. FFT dig. sz.	Végtelen memóriá
	—	—	—	Rekurzív dig. sz.	