Dr. SIMON GYULA
BME Híradástechnikai Elektronika Intézet

# Nemlineáris karakterisztikájú eszközök egyfajta linearizálása és ennek numerikus optimálása

ETO 519.712.7:536.531

Számos műszaki problémával kapcsolatban felmerül annak igénye, hogy az alkalmazott elem (pl. átalakító) kimeneti jele a független változó lehető lineáris függvénye legyen. Ha a karakterisztika nem lineáris, akkor a kimeneti jelet megfelelő kompenzáló karakterisztika segítségével módosítani kell.

A továbbiakban általános módszert ismertetünk, amely egyszerű függvénytranszformáció bevezetésével a linearitási paraméterek nagymérvű javításához vezet.

## 1. A függvénytranszformációk vizsgálata

Tekintsük az $y=f(x)$ függvényt, amely az $[a, b]$ intervallumban folytonos, a függvény és differenciálhányadosa monoton. Az intervallum alsó határpontjában húzott érintőhöz viszonyított helyzete szerint kétféle függvényt különböztethetünk meg (1. ábra). Ha

$$\Delta=|f(b)-f(a)|-|M(b-a)|>0, \quad \text{akkor}$$

a függvény, a továbbiakban (alulról) konvex (1. görbe), ha viszont $\Delta<0$, akkor a továbbiakban (alulról) konkáv.

Itt
$$M=\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}.$$

Az általánosabb tárgyalásmód kedvéért normáljuk a függvényt úgy, hogy bevezetjük az

$$u=\frac{x-a}{b-a} \quad \text{és} \quad v=\frac{y-f(a)}{M(b-a)}$$

új változókat. Az új koordinátarendszerben a normált függvény a 2. ábra szerint alakul. Könnyen belátható, hogy

$$\delta=\frac{\Delta}{M(b-a)}, \tag{1}$$

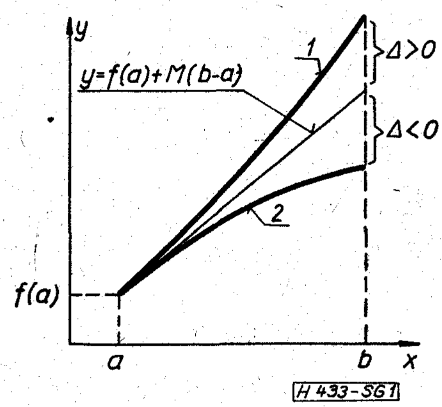
és általánosabban: valamely egyenestől értelmezett relatív eltérésként az (1) által definiált jellemzőt választva, ez valóban a linearitási hiba szokásos definíciójával egyenértékű.

Az eredeti függvény linearitáshibáját transzformáció segítségével szeretnénk csökkenteni. A transzformáció utáni új függő változónk legyen z.

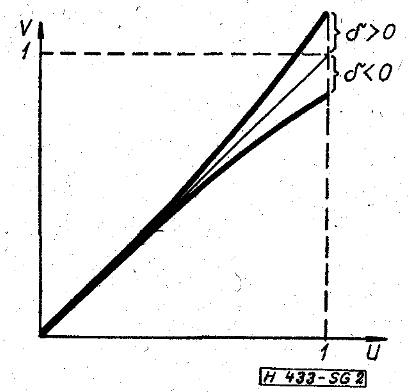
A választott transzformáció:

$$z=\frac{v(u)}{v(u)+K}, \tag{2a}$$

Beérkezett: 1975. XI. 26.




1. ábra




2. ábra

vagyis

$$z=1-\frac{K}{v(u)+K}. \tag{2b}$$

A (2a) és (2b) kifejezések alapján belátható, hogy linearitási szempontból a

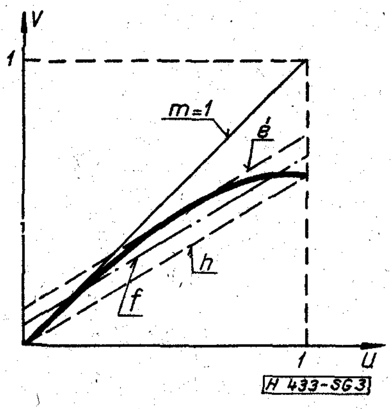
$$z_1=\frac{v(u)}{v(u)+K},$$

illetve

$$z_2=\frac{K}{v(u)+K}$$

transzformáltak egyenértékűek.

Eredeti függvényünk maximális nemlinearitási hibájának jellegét a 3. ábra segítségével szemléltethetjük. Ha adott görbének a közelítő függvénytől való maximális eltérését szeretnénk minimálni, akkor biztosítanunk kell, hogy egyenlő abszolút értékű hibák lépjenek fel (Csebisev-közelítés). A 3. ábra rögzített görbéhez tartozó optimálisan közelítő egyenes meghatározását szemlélteti. A h húr és a húrral párhuzamos é érintő közé berajzolt f felező egyenes lesz, a Csebisev-értelemben optimálisan közelítő lineáris függvény.




*3. ábra*

A rendszer szabadsági fokának növelése a transzformáció bevezetésével lehetséges. Az eggyel több zérus hibájú pont és ezzel együtt eggyel több helyi hiba-szélsőérték megvalósításának feltétele nyilvánvalóan az, hogy a z függvény az érdekes tartományban $(0 \leqq u \leqq 1)$ inflexiós ponttal rendelkezzen, vagyis legyen olyan u érték, melynél a transzformált függvény második deriváltja zérus.

Vizsgáljuk meg ennek feltételét:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{K}{(v+K)^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}-2\cdot\frac{K}{(v+K)^3}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2=0.$$

Így az inflexiós pontra:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}\,\frac{v+K}{2}=\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2. \qquad (3)$$

Minthogy $\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2>0$, így (3) teljesítéséhez konvex függvénynél $v+K>0$, míg konkáv függvénynél $v+K<0$ szükséges. A (3) feltétel teljesítése $K$ megfelelő megválasztásával nyilván biztosítható tetszés szerinti u értékre. Másik fajta függvényünknél konstans értéket szeretnénk közelíteni. Eredeti függvényünk $v(u)$ az érdekes tartományban monoton, s differenciálhányadosa szintén monoton. A transzformáció az alábbi:

$$z(u)=v(u)\cdot\frac{K}{g(u)+K}, \qquad (3a)$$

ahol $g(u)$ ugyanolyan tulajdonságú, mint $v(u)$.

A szélsőérték feltétele $z'(u)=0$ alapján:

$$K\cdot v'+f\cdot v'-v\cdot f'=0,$$

ami $K$ megfelelő megválasztásával nyilván biztosítható.

## 2. A javulás mértéke

A legegyszerűbb esetektől eltekintve (pl. konstans közelítése hatványsorral: Csebisev-polinomok) a Csebisev-jellegű optimális közelítések csak numerikus módszerekkel találhatók meg. Az elérhető javulás nagyságrendi becslésére válasszuk az alábbi másodfokú konkáv függvényt:

$$v=u-\delta\cdot u^2, \qquad (4)$$

és legyen δ értéke 10%.

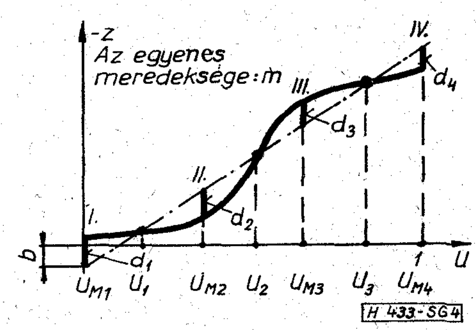
(1) alapján a linearitáshibát a következőképpen írhatjuk fel:

$$l=d/m,$$

ahol d a névleges lineáris karakterisztikától való eltérés, míg m ezen egyenes meredeksége. A 3. ábra alapján a Csebisev-metrikában optimális egyenestől való három egyenlő abszolút értékű maximális eltéréshez tartozó linearitáshiba esetünkben:

$$l=\frac{\delta}{4(1-\delta)}=2{,}78\%. \qquad (5)$$

Válasszuk most meg a (2a) transzformáló kifejezésben $K$ értékét úgy, hogy a transzformált görbe $U_1=1/6$; $U_2=1/2$ és $U_3=5/6$ pontjai essenek egy egyenesre (4. ábra).




*4. ábra*

A numerikus számítást elvégezve az eredmények:

$$K=-8{,}561,$$

$$m=\ 0{,}1176,$$

$$b=-0{,}000096.$$

A meredekségre normált l linearitási hiba értékek az egyes tartományokban:

| Tartomány | I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|---|
| l[‰] | 0,81 | −0,17 | 0,18 | −0,9 |

A végeredményből arra következtethetünk, hogy a zérus hibájú pontok megválasztása nem optimális, mert a hibák abszolút értéke igen különböző. A numerikus optimálás algoritmusa éppen ezen alapulhat: a zérus hibájú pontok eltolhatók úgy az u tengely mentén, hogy a maximális eltérések abszolút értéke (gyakorlatilag persze megengedett hibakorláton belül) azonos legyen. Az is kitűnik, hogy a nem optimális metszéspontelosztás ellenére a javulás mértéke kb. 1,5 nagyságrendet tesz ki.

A numerikus analízis általános tételei rendszerint csak a javulás-függvény jellegére adnak felvilágosítást, de a műszaki gyakorlat szempontjából érdekes számszerű eredmények nem származtathatók. Ezért a javulás mértékének általánosabb tárgyalásától ezen a helyen eltekinthetünk.

## 3. Elektronikus alkalmazások lehetőségei

Az alkalmazások körét most olyan esetekre szűkítjük, mikor az átalakításnál szerepet játszó függvény ellenállás jellegű. Ilyen analóg rendszereknél nemlineáris transzfer karakterisztikájú linearizáló áramkör használható, digitális kijelzésű esetben a korrekció történhet az $A/D$ átalakító kimeneti jelének módosításával is (korrekciós program). Ezek a megoldások viszonylag költségesek és bonyolultak. A linearitáshiba az 1. pontban említett egyszerű transzformációval (a $K$ konstans most fizikailag pozitív vagy negatív ellenállás) csökkenthető.

### *3.1 Platina hőmérséklet-átalakító ellenállás linearizálása*

Az ellenállás értéke a hőmérséklet függvényében az alábbi:

$$R/R_0=1+\alpha[T-\delta(t-1)t-\beta(t-1)t^3],$$

ahol $T$ a hőmérséklet C°-ban, $t=T/100$ és

$$\alpha=0{,}003916,$$

$$\beta=0{,}11, \qquad \text{ha} \quad T<0°\text{C},$$

$$\beta=0{,}0, \qquad \text{ha} \quad T\geq 0°\text{C},$$

$$\delta=1{,}49,$$

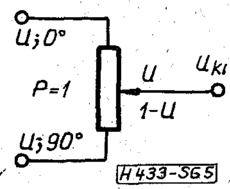
$$R_0=100 \text{ ohm (általában)}.$$

A (4) összefüggésben szereplő $\delta$ érték $\Delta T=200$ °C hőmérséklet-változásra kb. 3%, így linearizálás nélkül a linearitási hiba erre a tartományra (5) alapján kb. 0,75% ÷ 1,5°C. A karakterisztika konkáv, ezért negatív ellenállásra van szükség. A numerikus optimálásra Fortran program készült. Ennek bemenő adata az alsó és felső hőmérséklethatár. A számítások és mérések tanulsága szerint 200 °C-os tartományban a linearitási hiba jóval 1‰ alá szorítható. A szükséges negatív ellenállás értéke kb. 2,6 kohm. A gyakorlati megvalósításnál a rendszer hibáját már nem a linearitási hiba korlátozza, hanem a nagy áramszintű működtetésnél a platina saját melegedése, míg kis áramszint alkalmazásakor a kapcsolás egyéb ellenállásainak és műveleti erősítőinek hőmérsékleti driftje.

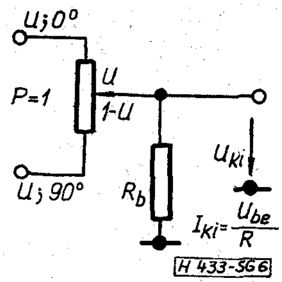
### *3.2 Fázistoló rendszer amplitúdóhibájának minimálása*

Kétfázisú oszcillátor kimeneti jeleiből az 5. ábrának megfelelő kapcsolásban folyamatosan változtatható fázisú kimeneti jelet állíthatunk elő, amelynek amplitúdója

$$\hat{U}_{ki}=U\sqrt{(1-u)^2+u^2},$$




5. ábra




6. ábra

vagyis

$$v=\frac{\hat{U}_{ki}}{U}=\sqrt{1-2u+2u^2},$$

míg fázisszöge:

$$\varphi=\text{arc tg}\left(\frac{u}{1-u}\right).$$

Az $\hat{U}_{ki}/U$ maximális értéke 1 (ha $u=0$ vagy $u=1$), minimális értéke $1/\sqrt{2}$ (ha $u=0{,}5$). Fázisszögtől független amplitúdóra törekszünk, így a közelítő egyenes meredeksége rögzített, 0 értékű. A relatív hibát most a meredekség helyett értelemszerűen az $\hat{U}_{ki}/U$ legjobb közelítő értékére vonatkoztatjuk, vagyis $l=d/b$. Az eredeti rendszer relatív hibája így 17,16%. A 6. ábrának megfelelő elrendezés is bonyolultabb transzformációnak felel meg:

$$z=v\cdot\frac{K}{K+u-u^2}.$$

Az $u=x+0{,}5$ függvénytranszformáció bevezetésével egyszerűen bizonyítható, hogy mind $v$, mind $z$ az $u=0{,}5$-ös pontra vonatkozóan páros függvény, így a vizsgálatot elegendő a $0\leq u\leq 0{,}5$ intervallumra elvégezni.

A transzformáció jellege tehát a (3*a*) összefüggésnek megfelelő, az áramköri megoldás viszont a 3.1 alattival rokon.

A numerikus optimálásnál a $0\leq u\leq 0{,}5$ intervallumban most csak két zérus hibájú pont választható. Az $U_1=0{,}125$ és $U_2=0{,}375$ kezdeti értékekből kiindulva és a hibák abszolút értékének eltérését $\leq 0{,}001$-re választva három ciklus lefutása után:

$$K=-0{,}854,$$

$$b=1{,}008$$

$$U_1=5{,}3\cdot 10^{-4},$$

$$U_2=0{,}1785,$$

és az egyes tartományok maximális hibái:

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $U_{Mi}$ | 0 | 0,053 | 0,332 |
| $\Delta_{Mi}$ | −0,0076 | 0,0072 | −0,0078 |

vagyis az eredő amplitúdóhiba 1% alatt marad. Ez a módszer egyszerűbb, olcsóbb és jobb paraméterekkel rendelkező áramköri megvalósítást tesz lehetővé, mint a szokásos megoldások.

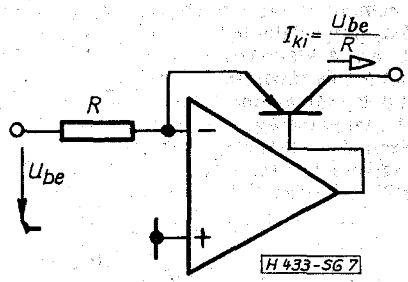
## 4. Áramköri elemek

### *4.1 Feszültségvezérelt áramgenerátorok*

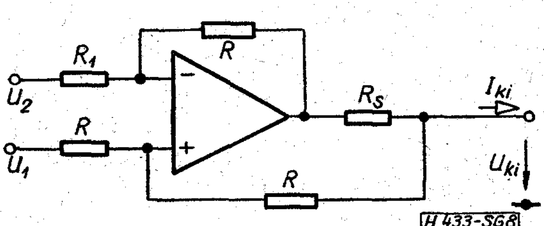
A teljesség igénye nélkül néhány megoldás ismertetése következik. Aszimmetrikus terhelés állandó áramú táplálására a legegyszerűbb megoldás a 7. ábra szerinti, annek egyenáramú beállítási problémái lehetnek. A 8. ábra szerinti megoldásban ideális műveleti erősítőt feltételezve $R_1 = R^2/(R+R_S)$ választással:

$$I_{ki} = \frac{U_1 - U_2}{R \times R_S}, \tag{6}$$

vagyis a meredekség abszolút értéke mindkét bemenetről azonos.




7. *ábra*




8. *ábra*

### *4.2 Pozitív vagy negatív kimeneti ellenállású generátor*

A 8. ábra szerinti elrendezésre:

$$I_{ki} = \frac{U_1}{2R_S}\left(1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R_S}{R}\right) - \frac{U_2}{R_S}\frac{R}{R_1} + \frac{U_{ki}}{2R_S}\left(\frac{R}{R_1} - \frac{R_S}{R} - 1\right), \tag{7}$$

vagyis a kimeneti vezetés

$$G_{ki} = \frac{1}{2R_S}\left(1 - \frac{R}{R_1} - \frac{R_S}{R}\right).$$

A negatív kimeneti vezetésre beállított rendszernél a lezáró vezetés megengedett értéktartománya az egyenáramú stabilitás biztosítására a visszacsatolt rendszer vizsgálatából:

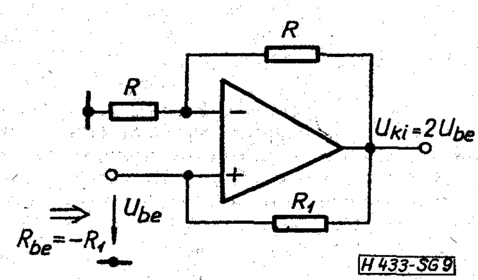
$$|G_{ki}| < G_t < \infty \quad \text{(rövidzárstabil).}$$

Pozitív kimeneti vezetésű rendszerben egyenáramú stabilitási probléma nincs.

Ez a megoldás nyilván alkalmas a 3.1 pontban vázolt feladat ellátására.

### *4.3 Negatív ellenállás megvalósítása*

A 3.1 pontban vázolt rendszer áramgenerátoros táplálással és párhuzamos negatív ellenállás beiktatásával is megvalósítható (két műveleti erősítő kell). A 3.2 pontban leírt feladat megoldásához mindenképpen negatív ellenállás szükséges. Az egyik nyilvánvaló lehetőség a 8. ábra szerinti kapcsolás a 4.2 pont szerinti beállításban, bemeneti vezérlés nélkül. Sokkal előnyösebb a 9. ábra szerinti NIC-es




9. *ábra*

megoldás, mert a negatív ellenállás megvalósításán kívül a negatív ellenálláson fellépő feszültséggel arányos feszültséggenerátoros kimenete ($U_{ki}$) is van.

Az egyenáramú stabilitás feltétele, hogy a bemenet és föld között jelentkező generátor-vezetés, $G_t$ értéke:

$$\frac{1}{R_1} < G_t < \infty \quad \text{(rövidzárstabil).}$$

Ha az invertáló és nem invertáló bemeneteket felcseréljük, az egyenáramúlag stabil rendszerre

$$0 \leqq G_t < \frac{1}{R_1}$$

adódik (szakadásstabil).

Az eddigiekben vázolt feladatok (3.1 és 3.2 pontok) megoldása rövidzárstabil rendszerekkel lehetséges.

## 5. Számítástechnikai megjegyzések

A 2. pont számításai zsebkalkulátorral történtek (SR 10). A 3.1 és 3.2 pont optimáló programjai Fortran nyelvűek és CDC számítógépen futottak.

A zérus hibájú pontok korrigálására igen gyorsan konvergáló algoritmus:

$$\Delta U_i = 0{,}5 \cdot (u_{M(i+1)} - u_{M(i)}) \frac{d_{M(i+1)} + d_{M0)}}{d_{M(i+1)} - d_{M(i)}}.$$

## IRODALOM

[1] *Kis* O.—*Kovács M.:* Numerikus módszerek. Műszaki Könyvkiadó, 1973.

[2] *Tietze—Schenk:* Analóg és digitális áramkörök. Műszaki Könyvkiadó, 1973.