HÍRADÁSTECHNIKA

DR. BOLGÁRFALVI KÁROLY
Távközlési Kutató Intézet

Koncentrált paraméterű, lineáris, időinvariáns és passzív n-kapuk ábrázolása a Hilbert-térben

ETO 513.882:519.56:621.372.22:621.372.6

Korábban láttuk [1], hogy a meghatározott határfeltétellel rendelkező lineáris passzív n-kapuk N_{pH} halmazán az n-kapuk n-kapuvá való összekapcsolása bináris műveletet határoz meg. Maga az N_{pH} halmaz pedig additív félcsoportot alkot az összekapcsolási műveletre, mint bináris műveletre vonatkozólag. Az N_{pH}-beli n-kapuk ábrázolását ezen félcsoportnak valamilyen V vektortér lineáris operátorai félcsoportjába való bármely homomorfizmusát értjük. Ebben az esetben a V vektorteret az ábrázolás terének nevezik. Ha a V vektortér egy K kommutatív test feletti vektortér, akkor az ábrázolást K test feletti ábrázolásnak nevezik.

Ugyancsak láttuk az [1]-ben az n-kapuk ábrázolását a Schwartz-féle kompakt szupportú vizsgálófüggvények és általánosított függvények n-dimenziós vektorterében, melyet D_n-el, illetve D_n'-el jelöltünk. Továbbá említettük, hogy az n-kapuk különböző ábrázolásaira úgy jutunk, hogy különböző V vektortereket választunk a különböző funkcionális terek közül. Most a Hilbert-térbeli ábrázolást fogjuk tárgyalni.

1. A Hilbert-tér és operátorai

1.1 A Hilbert-tér fogalma

1. Definíció. Az $f, g, h, \ldots, x, y, \ldots$ elemek V halmazát lineáris térnek vagy vektortérnek nevezzük a K számtesten, ha

I) bármely két V-beli f és g elemmel megfelelésbe állítható egy ugyancsak V-hez tartozó x elem, melyet az f és g összegének neveznek és $x=f+g$-vel jelölnek, miközben ezen művelet kielégíti a következő követelményeket (axiómákat):

i) $f+g=g+f$ (kommutativitás)
ii) $(f+g)+h=f+(g+h)$ (asszociativitás)
iii) valamennyi $f\in V$ esetén létezik egyetlen olyan $\in V$ elem, hogy
$f\neq\in=f$ (összegezésre vonatkozó neutrális elem)

II) valamennyi $f\in V$ elemmel és $\alpha\in K$ számmal megfelelésbe állítható egy V-hez tartozó y elem, melyet az f elem α számmal való szorzatának neveznek és $y=\alpha f$-el jelölnek, miközben ezen művelet kielégíti a következő követelményeket:

i) $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f \quad \alpha, \beta\in K$ (asszociativitás)
ii) a K számtestben létezik olyan $1\in K$ elem, hogy valamennyi $f\in V$ esetén
$1\cdot f=f$ (skalár szorzás neutrális eleme)
iii) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$ (skalár összegezésre vonatkozó disztributivitás)
iv) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$ (vektor összegezésre vonatkozó disztributivitás).

2. Definíció. A V vektorteret Banach-térnek vagy normál térnek nevezik, ha valamennyi $f\in V$ elemmel megfelelésbe állítható egy nem negatív $||f||$ szám, melyet az f elem normájának neveznek és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

i) $||\alpha f||=|\alpha|\cdot||f|| \qquad \alpha\in$ K skalár
ü) $||f+g||\leq||f||+||g||$
iii) $||f||=0$, akkor és csakis akkor, ha $f=$ és a V

tér teljes a normára vonatkozólag, vagyis valamennyi önmagában konvergens sorozatnak van a V térben határértéke.

A Banach-térben a sorozatok konvergenciája a nomával van definiálva. Így $f_n\to f$ akkor és csakis akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||=0 \qquad (n=1, 2,\ldots). \tag{1}$$

A Banach-tér konkrét példája az L_1 tér, mely az összes olyan mérhető komplex értékű $f(t)$ függvény összessége a valós $t(-\infty<t<\infty)$ változó felett, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty. \tag{2}$$

Az integrál Lebesgue értelemben van véve. Természetesen az L_1 tér teljes.

Beérkezett: 1975. V. 30.

A későbbiek folyamán vizsgálni fogjuk az olyan n-dimenziós V_n vektorteret, melynél valamennyi vektorkomponens az L_1 térbe esik:

$$\underset{\sim}{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} f_i \in L_1 \quad (t=1,\,2,\ldots n). \tag{3}$$

Ezt a teret L_{1n}-el jelöljük. Az L_{1n}-beli normát a következő módon definiáljuk:

$$\|\underset{\sim}{f}\|_1=\sum_{r=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|fr(t)|\,dt<\infty \tag{4}$$

3. Definíció. A lineáris V teret Hilbert-térnek nevezzük, ha bármely f és g elempárhoz hozzá van rendelve valamilyen $(f,\,g)$ komplex szám, melyet az f és g belső szorzatának neveznek és amely a következő követelményeknek tesz eleget:

i) $(\alpha f,\,g)=\alpha(f,\,g) \quad \alpha\in K$

ü) $(f_1+f_2,\,g)=(f_1,\,g)+(f_2,\,g)$

iii) $(f,\,g)=\overline{(g,\,f)}$, ahol a felülvonás konjugált komplex értékre való áttérést jelent.

iv) $(f,\,f)>0$, ha $f\neq 0$.

Könnyű belátni, hogy a Hilbert-tér a Banach-tér speciális alakja, ahol a norma így van definiálva

$$\|f\|=(f,\,f)^{1/2}. \tag{5}$$

A Hilbert-tér konkrét példája az L_2 tér, mely az összes olyan mérhető komplex értékű $f(t)$ függvény összessége a valós $t(-\infty<t<\infty)$ változó felett, hogy

$$\int_{\infty}^{-\infty}|f|(t)|^2\,dt<\infty \tag{6}$$

Az integrál itt is Lebesgue értelemben van véve és az L_2 tér mint ismeretes, teljes.

Az L_2 térben a belső szrozat a következőképpen van definiálva:

$$(f,\,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(t)g(t)\,dt<\infty \tag{7}$$

A következőkben olyan n-dimenziós H_n vektorteret fogunk vizsgálni, melynél valamennyi vektorkomponens az L_2 térbe esik

$$\underset{\sim}{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_2 \\ f_n \end{bmatrix} f_i\in L_2 \quad (i=1,\,2,\ldots,\,n). \tag{8}$$

Ezt a teret L_{2n}-el jelöljük. Az L_{2n}-beli belső szorzat lesz:

$$(\underset{\sim}{f},\,\underset{\sim}{g})=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{n}\bar{f}r(t)gr(t)\,dt<\infty. \tag{9}$$

Az előző megfontolások alapján, ha $\underset{\sim}{f}\in L_{2n}$, akkor az $\underset{\sim}{f}$ normájának négyzete

$$\|\underset{\sim}{f}\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{n}|fr(t)|^2\,dt=(f,\,f). \tag{10}$$

Jelöljük az $\underset{\sim}{f}$ vektor transzponáltját $\underset{\sim}{f}'$-vel, az $\bar{f}'$ transzponált konjugáltját pedig $\underset{\sim}{f}^*$-al. Ebben az esetben a (9) belső szorzatot így írhatjuk fel:

$$(\underset{\sim}{f},\,\underset{\sim}{g})=\int_{-\infty}^{\infty}\underset{\sim}{f}^*(t)\,g(t)\,dt, \tag{11}$$

ahol az integranduszt a közönséges skaláris vektorszorzás szabályai szerint lehet kifejteni.

Bármely két L_{2n}-beli $\underset{\sim}{f}$ és $\underset{\sim}{g}$ elemre érvényes az igen fontos Schwartz-féle egyenlőtlenség, amely szerint

$$|(\underset{\sim}{f},\,\underset{\sim}{g})|\leq\|f\|_2\,\|g\|_2 \tag{12}$$

1.2 A Hilbert-térbeli operátorok

4. Definíció. Az L_{2n}-beli operátor egy olyan A függvény, mely értelmezve van L_{2n} valamilyen D részhalmazán és egy vagy több L_2-beli $A.\underset{\sim}{f}$ értéket szolgáltat valamennyi D-beli $\underset{\sim}{f}$ elemre.

A D halmazt az A operátor D(A) értelmezési tartományának nevezik. Az összes $A\cdot\underset{\sim}{f}$ $\underset{\sim}{f}\in$ D(A) érték halmazát az A operátor R(A) értéktartományának nevezik. Az összes $\langle\underset{\sim}{f},\,A\cdot\underset{\sim}{f}\rangle$, $\underset{\sim}{f}\in$ D(A) és $A\cdot\underset{\sim}{f}\in$ R(A) alakú elem halmazát az A operátor G(A) gráfjának nevezik. Itt nyilván D(A)$\subset L_{2n}$, R(A)$\subset L_{2n}$ és G(A)$\subset L_{2n}\times L_{2n}$.

5. Definíció. Az L_{2n}-beli A operátort lineárisnak nevezzük, ha a G gráfja lineáris sokaság olyan szempontból, hogy összeg és aránytartó.

Bevezetjük a következő jelölést: $<\underset{\sim}{f},\,\underset{\sim}{g}>\,\in$ G(A) azt jelenti, hogy $\underset{\sim}{f}\in$ D(A), $\underset{\sim}{g}\in$ R(A) és $A\underset{\sim}{f}$ létezik és értéke éppen $\underset{\sim}{g}$. Ezen jelölés segítségével valamely L_{2n}-beli A operátor gráfja akkor és csakis akkor lineáris sokaság, ha teljesülnek ezek a feltételek:

i) $\langle\underset{\sim}{f},\,\underset{\sim}{g}\rangle\in$ G(A)-ból azonnal következik, hogy $\alpha\langle\underset{\sim}{f},\,\underset{\sim}{g}\rangle=\langle\alpha f,\,\alpha g\rangle\in$ G(A) (aránytartóság)

ii) $\langle\underset{\sim}{f_1},\,\underset{\sim}{g_1}\rangle\in$ G(A) és $\langle\underset{\sim}{f_2},\,\underset{\sim}{g_2}\rangle\in$ G(A)-ból azonnal következik, hogy $\langle\underset{\sim}{f_1}+\underset{\sim}{f_2},\,\underset{\sim}{g_1}+\underset{\sim}{g_2}\rangle\in$ G(A) (összegtartóság).

A fenti definícióból az is következik, hogy ha az A operátor lineáris, akkor a D(A) értelmezési és R(A) értéktartománya is lineáris sokaságot képez az L_{2n}-ben.

6. Definíció. Az L_{2n}-beli A operátort egyértékűnek nevezik, ha valamennyi D(A)-beli $\underset{\sim}{f}$ elemhez csak egyetlen $A\cdot\underset{\sim}{f}$ elemet rendel hozzá.

1. Állítás. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a lineáris A operátor egyértékű legyen az, hogy A. 0-hoz egyetlen 0 érték legyen hozzárendelve.

Bizonyítás. Nyilván minden lineáris halmaz tartalmazza a zérus elemet, ezért minden lineáris operátor gráfjában előfordul a $\langle 0,\,0\rangle$ elem. Innen következik, hogy 0 az A. 0 egyik értéke, tehát a feltétel szükséges.

Hogy kimutassuk a feltétel elégségességét, legyen $\langle f_1, g_1\rangle$, $\langle f, g_2\rangle \in G(A)$. Ekkor

$$\langle \underset{\sim}{f_1}\underset{\sim}{g_1}\rangle - \langle \underset{\sim}{f_1}\underset{\sim}{g_2}\rangle = \langle\ 0,\ \underset{\sim}{g_1} - \underset{\sim}{g_2}\rangle \in G(A).$$

Tehát az A 0 értékhez $\underset{\sim}{g_1} - \underset{\sim}{g_2}$ tartozik. Ámde ha az A operátor egyértékű, akkor $\underset{\sim}{g_1} = \underset{\sim}{g_2}$ és $\underset{\sim}{g_1} - \underset{\sim}{g_2} = 0$, tehát a feltétel elégségessége is bizonyítva van.

Megemlítjük, hogy az egyértékű L_{2n}-beli operátort L_{2n}-beli transzformációnak is nevezik.

Az L_{2n}-beli lineáris A transzformációt korlátosnak nevezik, ha

$$\sup_{\underset{\sim}{f} \in} \frac{||A\underset{\sim}{f}||}{||\underset{\sim}{f}||} \equiv ||A|| < \infty. \tag{13}$$

2. Állítás. Bármely lineáris T transzformációnál, mely a lineáris normált V teret lineáris normált V' térbe képezi le, a következő feltételek egyenértékűek:

i) T folytonos;
ii) T folytonos valamelyik pontban;
iii) T korlátos, vagyis létezik olyan pozitív C állandó, hogy $||T\cdot f|| \leq C||f||$ valamennyi $f \in V$ esetén.

Bizonyítás. Ha a T folytonos az f_0 pontban, akkor létezik olyan pozitív B állandó, hogy $Tf - f_0 = ||Tf - Tf_0|| \leq 1$, ha $||f - f_0|| \leq B$. Jelöljük $(f - f_0)$-t h-val, akkor $||T(h)|| \leq 1$, ha $||h|| \leq B$ és tetszőleges $g \neq 0$ esetén lesz

$$||Tg|| = \frac{||g||}{B} ||T \frac{B}{||g||} g|| \leq \frac{||g||}{B}$$

vagyis T kielégíti az iii) feltételt $C = 1/B$ állandó esetén. Ellenben ekkor

$$||Tf - Tf_1|| = ||T(f - f_1)|| \leq C||f - f_1|| \leq e, \quad \text{ha}$$

$$||f - f_1|| < \frac{\varepsilon}{C}$$

tehát T folytonos valamennyi f_1 pontban q.e.d.

6. Definíció. Az L_{2n}-beli korlátos (folytonos) lineáris A transzformáció $||A||$ normájának nevezik a C állandók közül a legnagyobbat, vagyis

$$||A|| = \sup_{f \neq 0} \frac{||Tf||}{||f||}. \tag{14}$$

1.3 Kiterjesztési tétel

A következőkben szükségünk lesz a kiterjesztési tételre, melyet rövid előkészítés után ismertetünk.

7. Definíció. A $D \subset L_{2n}$ halmazt sűrűnek mondjuk az L_{2n}-ben, ha bármely $e > 0$ és $f \in L_{2n}$ esetén létezik olyan $g \in D$, hogy $||f - g|| < e$.

Könnyű belátni, hogy ha D sűrű az L_{2n}-ben, akkor L_{2n} összeesik a D zárásával. Ha L_{2n} Hilbert-tér, akkor teljes is, vagyis valamennyi L_{2n}-beli Chauchy-sorozat konvergál az L_{2n}-beli határértékhez. Tehát ha

$$\lim_{n, m \to \infty} ||\underset{\sim}{f_n} - \underset{\sim}{f_m}|| = 0 \tag{15}$$

akkor létezik olyan $\underset{\sim}{f} \in L_{2n}$ elem, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \underset{\sim}{f_n} = f. \tag{16}$$

3. Állítás. (Kiterjesztési tétel.) Tegyük fel, hogy V_n Banach-tér, vagyis teljes normált tér és A egy V_n-beli korlátos lineáris transzformáció, melynek $D(A)$ értelmezési tartománya sűrű a V_n-ben. Ebben az esetben A definiálható valamennyi $\underset{\sim}{f} \in V_n$-re oly módon, hogy a linearitás és a $||A||$ norma megmaradjon [2].

Jól ismert, hogy az L_{1n} és L_{2n} tér teljes. Továbbá az L_{1n} és L_{2n}-beli azon $f(t)$ vektorfunkciók, melyek elegendő nagy negatív t esetén eltűnnek, sűrűek a megfelelő L_{1n}, illetve L_{2n} térben. Tehát ha ezeket vesszük valamely A lineáris operátor $D(A)$ értelmezési tartományául, akkor az A operátor kiterjeszthető az egész L_{1n}, illetve L_{2n} térben.

Jelölje D_n a Schwartz-féle korlátos szupportú vizsgálófüggvények terét. Az $L_{1n} \cap D_n$, illetve $L_{2n} \cap D_n$ halmaz nyilván sűrű az L_{1n}, illetve L_{2n} térben. Tehát az $L_{1n} \cap D_n$, illetve $L_{2n} \cap D_n$ halmazon értelmezett A operátor szintén kiterjeszthető az egész L_{1n}, illetve L_{2n} térre.

1.4 Fourier-transzformáció az L_{2n}, illetve L_{1n} térben

Most a Fourier-transzformáció elméletével fogunk foglalkozni az L_{jn} $(j = 1,2)$ térben. Legyen $f(t) \in L_2$, akkor a $\varphi(\omega)$ Fourier-transzformáltja így van definiálva:

$$\varphi(\omega) = \overline{\lim_{a \to \infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} f(t) e^{i\omega t}\, dt \tag{17}$$

ahol a $\overline{\lim}$ a középértékhez való konvergenciát jelenti.

Ki lehet mutatni [3], hogy ha $\varphi(\omega)$ létezik, akkor négyzetesen integrálható és kielégíti az uniter tulajdonságot:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi\omega|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \tag{18}$$

A Plancherel-tétel jóval általánosabb esetre vonatkozik [3], ha $\varphi_1(\omega)$ és $\varphi_2(\omega)$ az L_2 térbeli $f_1(t)$ és $f_2(t)$ Fourier-transzformáltja, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}_1(\omega)\, \varphi_2(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}_1(t)\, f_2(t)\, dt. \tag{19}$$

A (17) Fourier-transzformáció megfordítása

$$f(t) = \overline{\lim_{a \to \infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} \varphi(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \tag{20}$$

és ez érvényes majdnem mindenütt.

Ha felhasználjuk az L_2-beli belső szorzat jelölését, akkor a (19) Plancherel-tétel állítása így írható fel:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (f_1, f_2). \tag{21}$$

Az L_1 térbeli $f(t)$ függvény Fourier-transzformáltja így van definiálva:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt \tag{22}$$

és az integrált abszolút értékre nézve konvergál. Ezt a Fourier-transzformáltat L_1 Fourier-transzformáltnak nevezzük, szemben az L_2 térbeli Fourier-transzformálttal, melyet L_2 Fourier-transzformáltnak hívunk. Egy adott függvény L_1 és L_2 Fourier-transzformáltja majdnem mindenhol megegyezik, ha mind a kettő létezik.

Ha $\underset{\sim}{f}(t)\in L_{jn}$, $j=1,2$, akkor a Fourier-transzformáltja a definíció szerint egy $\underset{\sim}{F}(\omega)$ oszlopvektor, mely az $f_i(t)$ komponensek Fourier-transzformáltját tartalmazza ugyanazon sorrendben. Vagyis, ha

$$\underset{\sim}{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \underset{\sim}{F}(\omega)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \tag{23}$$

ahol

$$F_i(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\, e^{i\omega t}\, dt.$$

Az L_{2n} térbeli Plancherel-tétel ilyen alakot vesz fel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\sim}{F}_1^*(\omega)\, \underset{\sim}{F}(\omega)\, d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\sim}{f}_1^*(t)\, \underset{\sim}{f}_2(t)\, dt \tag{24}$$

vagy az L_{2n} térbeli belső szorzat jelöléssel így írható fel:

$$(\underset{\sim}{F}_1, \underset{\sim}{F}_2)=(\underset{\sim}{f}_1, \underset{\sim}{f}_2). \tag{25}$$

1.5 *Az L_{2n} és L_{1n} térbeli operátorok Fourier-transzformáltjára vonatkozó tételek*

Most azokat a lineáris, korlátos transzformációkat vizsgáljuk, melyek értelmezési tartománya az egész tér és amelyek a transzlációs operátorral kommutálódnak. Kimutatjuk ezek speciális tulajdonságait.

4. Állítás. (Bochner L_2 tétele.) Legyen A egy lineáris, korlátos transzformáció, mely az egész L_2-őt L_2-re képezi le. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az A operátor a transzlációs operátorral kommutálódjék az, hogy ha

$$g(t)=Af(t) \tag{26}$$

akkor létezzék egy $a(\omega)$ mérhető függvény, mely majdnem valamennyi ω-ra egyenletesen korlátos úgy, hogy

$$\theta(\omega)=a(\omega)\,\varphi(\omega) \tag{27}$$

ahol $\theta(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ a $g(t)$ és $f(t)$ függvény L_2 Fourier-transzformáltja.

A tétel bizonyítását lásd a [4]-ben.

A fenti tétel igen könnyen kiterjeszthető L_{2n}-re. Tegyük fel, hogy A lineáris, korlátos transzformáció, mely a transzlációs operátorral kommutálódik és az egész L_{2n}-t L_{2n}-re képezi le. Ebben az esetben a Bochner-tétel értelmében létezik n^2 mérhető és korlátos $a_{kr}(\omega)$ függvény, hogy

$$\underset{\sim}{\theta}(\omega)=A_n(\omega)\,\underset{\sim}{\varphi}(\omega) \tag{28}$$

ahol

$$\underset{\sim}{\theta}(\omega)=\begin{bmatrix} \theta_1(\omega) \\ \theta_2(\omega) \\ \vdots \\ \theta_n(\omega) \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\varphi}(\omega)=\begin{bmatrix} \varphi_1(\omega) \\ \varphi_2(\omega) \\ \vdots \\ \varphi_n(\omega) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A_n(\omega)=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Következmény. Ha A egy lineáris, korlátos transzformáció, mely a transzlációs operátorral kommutálódik és az egész L_{2n}-t L_{2n}-re képezi le és

$$\underset{\sim}{g}(t)=A\underset{\sim}{f}(t), \quad \underset{\sim}{f}(t)\in L_{2n} \tag{29}$$

akkor az L_2 Fourier-transzformáltja írható:

$$\underset{\sim}{\theta}(\omega)=A_n(\omega)\,\underset{\sim}{\varphi}(\omega) \tag{30}$$

ahol $A_n(\omega)$ egy $n\times n$ mátrix a $(-\infty<\omega<\infty)$ tartományban, melynek valamennyi elemére létezik olyan rögzített α pozitív szám, hogy

$$|a_{ar}(\omega)|<\alpha \qquad (h,\ r=1,\ 2,\dots,\ n)$$

majdnem mindenütt a $(-\infty<\omega<\infty)$ tartományban. Röviden ezt így jelöljük:

$$|A_n(\omega)|<\alpha.$$

A következő tételünk leírja a lineáris, korlátos és a transzlációs operátorral kommutálódó azon transzformációk struktúráját, melyek a teljes L_{1n}-t L_{1n}-re képezik le.

5. Állítás. (Bochner L_1-tétele.) Legyen $\underset{\sim}{g}=A\cdot\underset{\sim}{f}$ egy transzformáció, mely L_{1n}-t L_{1n}-re képezi le. Akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy A lineáris, korlátos és a transzlációs operátorral kommutálódó legyen az, hogy

$$\underset{\sim}{\theta}(\omega)=A_n(\omega)\,\underset{\sim}{\varphi}(\omega) \tag{31}$$

ahol $\underset{\sim}{\theta}(\omega)$ és $\underset{\sim}{\varphi}(\omega)$ a $\underset{\sim}{g}(t)$ és $\underset{\sim}{f}(t)$ L_{1n} Fourier-transzformáltja és A_n a $B_n(\tau)$ korlátos variációjú $n\times n$ mátrix Fourier-Stieltjest transzformáltja legyen:

$$A_n(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}\, dB_n(\tau) \tag{32}$$

ahol $B_n(\tau)$ korlátos variációjú $n\times n$ mátrix a $(-\infty<\tau<+\infty)$ tartományban, vagyis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |db_{hr}(\tau)|<\infty \qquad (h,\ r=1,\ 2,\dots,\ n). \tag{33}$$

Továbbá a $\underset{\sim}{g}=A\cdot\underset{\sim}{f}$ ekvivalens ezen kifejezéssel:

$$\underset{\sim}{g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} dB_n(\tau)\, \underset{\sim}{f}(t-\tau) \tag{34}$$

valamennyi L_{1n}-hez tartozó $\underset{\sim}{f}(t)$ esetén.

A tétel bizonyítását lásd az [5]-ben.

1.6 A komplex Fourier-transzformáció

Az $f(t)\in L_2$ függvény komplex Fourier-transzformáltja így van definiálva:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{itz}\,dt \tag{35}$$

ahol

$$z=\omega+i\beta.$$

Könnyű belátni, hogy $f(t)=0$, $t<0$ maga után vonja azt, hogy $\varphi(z)=\varphi(\omega+i\beta)$ analitikus $\beta>0$ esetén. Továbbá, ha $\beta>0$, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\omega+i\beta)|^2\,d\omega=$$

$$=\int_0^{\infty} |f(t)|^2\,e^{-2\beta t}\,dt\leq\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt=K<\infty \tag{36}$$

ahol K a β-tól független állandó. Lényegileg ezen eredmény fordítottját mondja ki a Titchmarsh-tétel [3].

6. Állítás. (Titchmarsh-tétele.) A négyzetesen integrálható függvények azon osztálya, mely eltűnik az argumentumának negatív értékére, azonos azon függvényosztállyal, melynek L_2-Fourier transzformáltja analitikus a $\beta>0$ felső félsíkon és kielégíti a (36) egyenlőtlenséget.

$$\lim_{\beta\to 0^+}\varphi(\omega+i\beta)=\varphi(\omega) \tag{37}$$

határérték majdnem valamennyi ω-ra létezik és kielégíti az

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-z}\,dx\begin{cases}=\varphi(x) & \text{ha} \quad \text{Im } z>0\\ =0 & \text{ha} \quad \text{Im } z<0\end{cases} \tag{38}$$

diszperzió relációt.

Egy igen fontos következmény az, hogy valamenynyi $\beta>0$-nál analitikus és egyenletesen korlátos $\varphi(z)$ esetén a $\lim\limits_{\beta\to 0^+}\varphi(\omega+i\beta)$ határérték majdnem mindenhol létezik.

7. Állítás. (Paley—Wiener-tétel.) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $a(\omega)$ egy olyan négyzetesen integrálható függvény L_2-Fourier-transzformáltjának abszolút értéke legyen, mely negatív t esetén eltűnik és nem zérus majdnem mindenütt az, hogy

$$\left.\begin{array}{ll}\text{i)} & a(\omega)\geq 0 \text{ majdnem mindenütt,}\\ \text{ii)} & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a^2(\omega)\,d\omega<\infty\\ \text{iii)} & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln a(\omega)|}{1+\omega^2}\,d\omega<\infty\end{array}\right\}. \tag{39}$$

A t paramétertől függő $[A(t)]$ mátrix esetén az L_{2n}-beli Titchmars-tétel a következőket állítja: azon L_{2n}-beli $\underset{\sim}{f}(t)$ függvények osztálya, mely az argumentum negatív értékénél eltűnik, azonos azon L_{2n}-beli függvények osztályával, melyek $\underset{\sim}{F}(\omega+i\beta)$ komplex Fourier-transzformáltja analitikus $\beta>0$-nál és kielégíti az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\sim}{F}^*(\omega+i\beta)\,\underset{\sim}{F}(\omega+i\beta)\,d\omega=K<\infty,\quad \beta>0 \tag{40}$$

egyenlőtlenséget, ahol K a β-tól független. A $\lim\limits_{\beta\to 0^+}\underset{\sim}{F}(\omega+i\beta)=\underset{\sim}{F}(\omega)$ határérték majdnem mindenütt létezik és kielégíti az

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\underset{\sim}{F}(z)}{x-z}\,dx=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{F}(x), & \text{ha} & \text{Im } z>0\\ 0\;, & \text{ha} & \text{Im } z<0\end{Bmatrix}. \tag{41}$$

2. A lineáris, idüinvariáns n-kapuk ábrázolása az L_{2n} térben

2.1 A lineáris, időinvariáns és passziv n-*kapuk* L_{2n} *térbeli ábrázolásának alapjai*

Láttuk [1], hogy a linearitás passzív, időinvariáns n-kapuk meghatározott határfeltétellel rendelkező N_{PIH} halmazán az n-kapuk n-kapuvá való összekapcsolása egy bináris műveletet határoz meg, és maga az N_{PIH} halmaz pedig additív félcsoportot alkot az összekapcsolási műveletre, mint bináris műveletre vonatkozólag.

1. Definíció. Az n-kapuk ábrázolásán az n-kapuk halmazán értelmezett félcsoport ábrázolását értjük.

2. Definíció. A lineáris n-kapu L_{2n} térbeli ábrázolásán olyan L_{2n}-be eső értelmezési tartományú lineáris operátort értünk, melynek értéktartománya szintén az L_{2n}-be esik.

3. Definíció. Ha a lineáris n-kapu egyértékű, akkor a lineáris n-kapu L_{2n} térbeli ábrázolása egyértelműen képezi le L_{2n}-t L_{2n}-be, vagyis ekkor az n-kapu ábrázolása egy L_{2n} térbeli transzformáció lesz.

4. Definíció. Ha a lineáris n-kapu egyértelmű és folytonos, akkor az n-kapu L_{2n} térbeli ábrázolása egy folytonos transzformáció lesz az L_{2n} térben. Ellenben ekkor az 1. pont 2. Állításából következik, hogy az L_{2n} térbeli folytonos transzformáció korlátos is.

5. Definíció. Ha a lineáris, egyértékű és folytonos n-kapu időinvariáns, akkor az n-kapu L_{2n} térbeli ábrázolása kommutálható a a_τ transzlációs operátorral.

1. Állítás. A lineáris, egyértékű, folytonos és időinvariáns n-kapu L_{2n} térbeli ábrázolásakor létezik a Bochner-tétel értelmében n^2 mérhető és korlátos $a_{kr}(\omega)$ függvény, hogy

$$\underset{\sim}{\theta}(\omega)=[A_n(\omega)]\,\underset{\sim}{\varphi}(\omega) \tag{1}$$

ahol

$$\underset{\sim}{\theta}(\omega)=\begin{bmatrix}\theta_1(\omega)\\ \vdots\\ \theta_n(\omega)\end{bmatrix}\quad \text{és}\quad \underset{\sim}{\varphi}(\omega)=\begin{bmatrix}\varphi_1(\omega)\\ \vdots\\ \varphi_n(\omega)\end{bmatrix}. \tag{2}$$

A $\underset{\sim}{g}(t)$ felelet és $\underset{\sim}{f}(t)$ gerjesztés vektor L_2-Fourier-transzformáltja és

$$[A_n(\omega)]=\begin{bmatrix}a_{11}(\omega) & a_{12}(\omega) & \dots & a_{1n}(\omega)\\ a_{21}(\omega) & a_{22}(\omega) & \dots & a_{2n}(\omega)\\ \vdots & & & \\ a_{n1}(\omega) & a_{n2}(\omega) & \dots & a_{nn}(\omega)\end{bmatrix} \tag{3}$$

egy n×n mátrix, melynek valamennyi $a_{kr}(\omega)$ elemére létezik olyan rögzített α pozitív szám, hogy

$$|a_{kr}(\omega)| < \alpha \quad (h, r = 1, 2, \dots, n) \tag{4}$$

majdnem mindenütt a $(-\infty < \omega < \infty)$ tartományban.

6. Definíció. Ha a lineáris, egyértékű, folytonos és időinvariáns n-kapu passzív, akkor az $\underset{\sim}{f}(t)$ gerjesztés vektor és $\underset{\sim}{g}(t)$ felelet vektor szorzata integráljának valós része tetszőleges τ idő esetén nem negatív:

$$\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\tau} \underset{\sim}{f}^*(t)\, \underset{\sim}{g}(t)\, \mathrm{d}t \geq 0 \tag{5}$$

és a skalár szorzat valós része sem negatív

$$\mathrm{Re}\, (\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{g}) \geq 0 \tag{6}$$

Az L_{2n} térbeli Plancherel-tétel alapján az $\underset{\sim}{f}(t)$ és $\underset{\sim}{g}(t)$-re, valamint a $\varphi(\omega)$ és $\Theta(\omega)$ Fourier-transzformáltjára írható

$$[\underset{\sim}{\varphi}(\omega), \underset{\sim}{\theta}(\omega)] = [\underset{\sim}{f}(t), \underset{\sim}{g}(t)] \tag{7}$$

és passzív n-kapu esetén

$$\mathrm{Re}\, [\underset{\sim}{\varphi}(\omega), \underset{\sim}{\theta}(\omega)] \geq 0. \tag{8}$$

7. Definíció. Az n-kaput kauzálisnak nevezik, ha bármely két megengedhető $f_1(t)$ és $f_2(t)$ gerjesztés és valós τ esetén az $f_1(t) \to f_2(t)$ $t \leq \tau$ maga után vonja a $g_1(t) \to g_2(t)$ $t \leq \tau$-t, ahol $g_1(t) = A \cdot f_1(t)$ és $g_2(t) = A \cdot f_2(t)$ és A az n-kaput ábrázoló operátor.

2. Állítás. A lineáris, egyértékű, folytonos, időinvariáns és passzív n-kapu mindig kauzális.

A tétel bizonyítását lásd a [6]-ban.

A Titchmarsh tételből következik, hogy $\underset{\sim}{\theta}(\omega)$-nak lineáris, egyértékű, folytonos, időinvariáns és passzív n-kapu esetén létezik $\underset{\sim}{\theta}(z)$ analitikus folytatása az Im z 0 felső félsíkon $(z = \omega + i\beta)$, mégpedig olyan, hogy

$$\lim_{\beta \to 0^+} \underset{\sim}{\theta}(z) = \underset{\sim}{\theta}(\omega) \quad \text{majdnem mindenütt} \tag{9}$$

és

$$\sum_{r=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_r^*(\omega + i\beta)\, \theta(\omega + i\beta)\, \mathrm{d}\omega < K \tag{10}$$

ahol K a $\beta > 0$-tól független állandó. Mindebből arra lehet következtetni, hogy $A_n(\omega)$-nak is van korrekt analitikus folytatása, mégpedig $A_n(z)$ alakú. Erre írható:

$$\underset{\sim}{\theta}(z) = A_n(z) \cdot \underset{\sim}{\varphi}(z) \tag{11}$$

ahol a $\underset{\sim}{\varphi}(z)$ a $\underset{\sim}{\varphi}(\omega)$ analitikus folytatása.

Könnyű belátni, hogy az analitikus folytatás arányos a Laplace-transzformálttal. A Laplace-transzformáltra legkönnyebben úgy jutunk, hogy vesszük az $L_{2n} \cap D_n$ gerjesztő függvényeket, melyek az L_{2n} téren kívül a Schwartz-féle kompakt szupportú vizsgálófüggvények D_n terébe is tartoznak. Ismeretes [1], a lineáris, egyértékű, folytonos és időinvariáns n-kapu D_n térbeli ábrázolása egy konvolúciós mátrix ábrázolás

$$g_i(t) = \int \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t-\tau) f_j(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad t = 1, 2, \dots, n. \tag{12}$$

A lineáris, egyértékű, folytonos, idővariáns és passzív n-kapunál a konvolúciós mátrix ábrázolásnak létezik Laplace-transzformáltja:

$$\underset{\sim}{G}(p) = [A_n(p)] \underset{\sim}{F}(p) \tag{13}$$

ahol

$$\underset{\sim}{G}(p) = \begin{bmatrix} G_1(p) \\ \vdots \\ G_n(p) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underset{\sim}{F}(p) = \begin{bmatrix} F_1(p) \\ \vdots \\ F_n(p) \end{bmatrix} \tag{14}$$

a $g(t)$ és $f(t)$ vektorok Laplace-transzformáltja. Mivel az $L_{2n} \cap D_n$ sűrű az L_{2n}-ben, tehát az 1.4 pontbeli kiterjesztési tétel L_{2n}-re alkalmazható.

3. Állítás. A lineáris, egyértékű, folytonos, időinvariáns és passzív n-kapu ábrázolásának Laplace-transzformáltja a p változó pozitív reális függvénye.

A tétel bizonyítását lásd a [6]-ban.

2.2 Racionális ábrázolás

Az előző pontból világos, hogy annak szükséges feltétele, hogy egy adott $[A(p)]$ n×n mátrix egy lineáris, egyértékű, folytonos, időinvariáns és passzív n-kapu ábrázoló mátrixának Laplace-transzformáltja legyen az, hogy az $[A(p)]$ mátrix pozitív reális legyen. Most vizsgáljuk egy adott mátrix pozitív reális voltára vonatkozó feltételeket.

8. Definíció. Az n×n méretű $[A(p)]$ mátrixot pozitív reálisnak nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

i) Az $[A(p)]$ analitikus a $p = a + i\omega$ sík $\sigma > 0$ feltételt kielégítő nyílt jobboldali félsíkján;

ii) Az $[A(p)]$ valós, ha p valós (realitási feltétel)

iii) Az $[A(p)]$-nek az

$$[A_H(p)] = \frac{[A_*]^T + [A]}{2} \tag{15}$$

hermitikus része pozitív semidefinit a $\sigma > 0$ nyílt jobb oldali félsíkon. (Itt az alsó csillag index hermitikus konjugálást jelent, vagyis a p változónak $(-p)$-vel való helyettesítését. A felső T index transzponálást jelent.)

A hálózatelméletből ismeretes, hogy a koncentrált paraméterű, lineáris, passzív és időinvariáns n-kapu ábrázoló mátrixának Laplace-transzformáltja a p komplex változónak nemcsak pozitív reális, hanem racionális mátrixa is. Ezzel a mátrixszal kapcsolatos a racionális ábrázolás fogalma.

9. Definíció. A koncentrált paraméterű, lineáris, időinvariáns és passzív n-kapu ábrázoló mátrixának Laplace-transzformáltját az n-kapu racionális ábrázolásának nevezzük.

A következőkben csakis az n-kapuk racionális ábrázolásával fogunk foglalkozni. A pozitív reális és racionális mátrixokat PR mátrixoknak fogjuk nevezni. Most vizsgáljuk a PR mátrixok tulajdonságait.

A PR mátrix esetén a pozitív realitás első két tulajdonságát könnyű ellenőrizni. Azonban a harmadik feltétel ellenőrzése nehézségekbe ütközik. Az egykapu áramkörökhöz hasonlóan az $[A_H(p)] \geq [0]$ feltétel ellenőrzése is visszavezethető a $p = i\omega$ képzetes tengelyen való ellenőrzésre és ekkor kapjuk:

10. Definíció. Az n×n méretű $[A(p)]$ mátrix akkor, és csakis akkor PR mátrix, ha teljesülnek a következő feltételek:

i) Az $[A(p)]$ mátrix a p valós együtthatójú racionális függvényeit tartalmazza elemként.

ii) Az $[A(p)]$-nek nincs pólusa a p sík $\sigma > 0$ feltételt kielégítő nyílt jobb oldali félsíkon.

iii) Az $[A(p)]$-nek az $i\omega$ képzetes tengelyen fekvő pólusai egyszerűek és az esetleges origóban, illetve végtelenben fekvő pólustól eltekintve konjugált párokban fordulnak elő.

iv) Az $i\omega$ képzetes tengelyen fekvő valamennyi pólushoz tartozó $[K]$ reziduum mátrix hermitikus és pozitív definit, vagy sémidefinit ($[K] \leq [0]$).

v) Az $[A_H(i\omega)] \geq [0]$ feltétel mindannyiszor fennáll, valahányszor $[A_H]$ definiálva van.

A hálózatelméletből ismeretes, hogy a veszteségmentes n-kapu áramkörök $[A(p)]$ ábrázoló mátrixa olyan pozitív reális mátrix, melynek hermitikus része zérussal azonos, vagyis

$$[A_H(p)] \equiv [0]. \tag{16}$$

A (16) feltételt fel lehet írni ilyen alakban is:

$$[A] = -[A_*]^T. \tag{17}$$

A koncentrált paraméterű, lineáris, időinvariáns, passzív és veszteségmentes n-kapu ábrázoló mátrixának az $[A(p)]$ Laplace-transzformáltja nemcsak a (16) feltételt kielégítő pozitív reális mátrix, hanem racionális is. Tehát ez a mátrix az n-kapunak szintén racionális ábrázolása lesz és ezen feltételeket kielégítő mátrixokat LPR mátrixoknak fogjuk nevezni. Íme a definíció:

11. Definíció. A racionális és az $[A_H(p)] \equiv [0]$ feltételt kielégítő $[A(p)]$ mátrixot LPR mátrixnak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi (szükséges) feltételek

i) Az $[A(p)]$ összes pólusa a képzetes tengelyen fekszik.

ii) Az origóban és a végtelenben fekvő pólusok kivételével a pólusok konjugált párokban fordulnak elő.

iii) A pólusok egyszerűek és hermitikus pozitív semidefinit $[K_i]$ reziduum mátrixszal rendelkeznek.

2.3 A racionális ábrázolás fokszáma

12. Definíció. A racionális ábrázolás fokszáma alatt a megfelelő PR vagy LPR mátrix fokszámát értjük.

A mátrix fokszámát többféleképpen lehet bevezetni. Itt mi most McMillan [7] tárgyalását fogjuk követni.

Kimutatható, hogy bármely racionális $[Z(p)]$ mátrix esetén (akár PR vagy LPR, akár nem) létezik egy numerikus $\delta(Z)$ függvény, mely a mátrixra általánosítja a racionális függvények fokszámának szokásos definícióját. Most elsoroljuk ezen $\delta(Z)$ fokszám tulajdonságait:

i) $\delta(Z)$ egy egész szám, mely ≥ 0.

ii) Ha $\delta(Z) = 0$, akkor $[Z(p)]$ állandó, vagyis nem függ p-től.

iii) Ha $[Z^{-1}(p)]$ létezik, akkor $\delta(Z) = \delta(Z^{-1})$.

iv) Ha $[Z(p)] = [Z_1(p)] + [Z_2(p)]$, ahol $[Z_1(p)]$ véges a $[Z_2(p)]$ valamennyi pólusánál és $[Z_2(p)]$ véges a $[Z_1(p)]$ valamennyi pólusánál, akkor

$$\delta(Z) = \delta(Z)_1 + (Z_2) \tag{18}$$

v) Ha $[Z(p)] = f(p)[R]$, ahol $f(p)$ egy skalár szorzó és $[R]$ egy állandó mátrix, akkor

$$\delta(Z) = [\text{az } f \text{ fokszáma}] \cdot [\text{az } (R) \text{ rangja}] \tag{19}$$

Itt az $f(p)$ fokszáma ez az összeg:

$$\sum_{p_0} [\text{az } f(p) \text{ pólusának rendszáma } p_0\text{-nál}] \tag{20}$$

ahol p_0 befutja az $f(p)$ összes pólusát, beleértve a ∞-t is.

vi) Ha $[A]$ és $[B]$ állandó, nem szinguláris mátrix, akkor

$$\delta(Z) = \delta(A\ Z\ B) \tag{21}$$

vii) Ha $[Z(p)]$ olyan $m \times m$ méretű $[Z_1(p)]$ mátrixból van képezve, melyet zérusok szegélyeznek, akkor

$$\delta(Z) = \delta(Z_1). \tag{22}$$

Először is definiáljuk a racionális skalár függvény pólusának rendszámát:

13. Definíció. Ha $R(p)$ ilyen alakú racionális függvény

$$R(p) = (p - p_0)^m\ R_1(p) \tag{23}$$

ahol $R_1(p)$ véges és nem zérus p_0-nál és m-nek tetszőleges előjele van, akkor m-et az R(p)-ben szereplő $(p - p_0)$ kitevőjének nevezik. Az

$$\mathrm{r} = \sup\ (-\mathrm{m},\ 0) \tag{24}$$

számot az $R(p)p_0$ pontban levő pólusa rendszámának hívják, még ha r=0 is.

Az r rendszám bevezetése után így definiáljuk az $R(p)$ skalár függvény p_i pontbeli fokát:

$$\delta[R(p), p_i] = \begin{cases} p_i \text{ fokszáma, ha } p_i \text{ pólusa } R(p)\text{-nek} \\ 0, \text{ ha } p_i \text{ nem pólusa } R(p)\text{-nek.} \end{cases} \tag{25}$$

Az $R(p)$ fokszáma pedig nem más, mint az összes pólusa rendszámának az összege:

$$\delta[R(p)] = \delta(R(p), \infty) + \sum_{i=0}^{n} \delta(B(p), p_i) \tag{26}$$

ahol az összegezést nyilván az $R(p)$ összes véges pólusára kell elvégezni. Az $R(p)$-t felírhatjuk részlettörtes kifejezés alakjában a véges pólusoknál h_i főrésszel és a végtelennél pedig h_∞-el:

$$R(p) = h_\infty + \sum_{i=0}^{n} h_i \tag{27}$$

Ekkor látható, hogy

$$\delta[R(p),\ p_i]=\delta(h_i,\ p_i)=\delta(h_i) \tag{28}$$

véges pólus esetén. Ha $R'(p)=R\left(\frac{1}{p}\right)$ jelölést bevezetjük, akkor

$$\delta[R(p),\ \infty]=\delta(h_\infty)=\delta(R'(p),\ 0). \tag{29}$$

Végeredményben az $R(p)$ foka a részlettörtes kifejezés segítségével így definiálható: összegezni kell a véges pólusoknál $\delta(h_i)$-t és hozzá kell adni $\delta(h_\infty)=$ $=\delta[R'(p),\ 0]$-t. Ez az az ötlet, melyet a legcélszerűbb a mátrixokra általánosítani.

Legyen $[Z(p)]$ egy n×n mátrix, melynek $Z_{rs}(p)$ elemei a p komplex változó racionális függvényei; írhatjuk:

$$Z_{rs}(p)=\frac{N_{rs}(p)}{D_{rs}(p)} \tag{30}$$

ahol N_{rs} és D_{rs} relatív prím polinómok. Legyen $\psi_Z(p)$ az összes $D_{rs}(p)$ ($1\leq r,\ s\leq n$) legkisebb közös többszöröse, mely úgy van normalizálva, hogy á p $\psi_Z(p)$-beli legnagyobb hatványának az együtthatója (a vezér együttható) eggyel egyenlő. Ekkor $\psi_Z(p)$ a $[Z(p)]$-vel egyértelműen meg van határozva.

A $\psi_Z(p)[Z(p)]$ mátrixnak polinóm elemei vannak. A Smith-féle normál alakja egy $[E(p)]$ diagonál mátrix:

$$\underset{\sim}{E}(p)=\begin{bmatrix} E_1(p) & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & E_2(p) & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & E_R(p) & \\ & & & & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=[A(p)]\ \psi_Z(p)[Z(p)]\,[B(p)], \tag{31}$$

mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

i) R a $\psi_Z\,(p)[Z(p)]$ rangja.
ii) Valamennyi $E_i(p)$ eggyel egyenlő vezéregyütthatójú polinóm.
iii) Valamennyi $E_i(p)$ az $E_{i+1}(p)$-nek tényezője, $1\leq i\leq R-1$.
iv) Az $[A(p)]$ és $[B(p)]$ polinóm mátrixnak állandó, zérustól különböző determinánsa van.
v) $E_1(p)E_2(p)\ldots E_k(p)$ a $\psi_Z(p)[Z(p)]$ összes k-sorú minor determinánsának a normalizált (és ezért egyetlen) legnagyobb közös osztója.

Fennáll a következő unicitási lemma:

1. Lemma. Ha bármely $[E^\circ(p)]$ mátrix kielégíti a fenti (31) alakot és az i)—v) tulajdonságokat, akkor $[E^\circ(p)]=[E(p)]$.

Bizonyításként lásd Bocher [8] 94 paragrafusának 1. tételét, melynek ez a tétel egy egyszerű variációja.

14. Definíció. A $[Z(p)]$-nek van egy $[W(p)]$ normál alakja, mely nem más, mint a $\psi_Z(p)[E(p)]$ mátrix. Így írhatjuk fel a $[W(p)]$ elemeit

$$[W(p)]=[A(p)]\,[Z(p)]\,[B(p)]=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{e_1(p)}{\psi_1(p)} & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \frac{e_2(p)}{\psi_2(p)} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & \frac{e_R(p)}{\psi_R(p)} & & \\ & & & & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

ahol az $e_k(p)$, $\psi_k(p)$ polinómok mindegyikének a vezéregyütthatója egy.

A $[W(p)]$ normál alak az alább felsorolt tulajdonságokkal rendelkezik:

i′) R a $[Z(p)]$-nek a rangja.
ii′) Mindegyik $e_k(p)$ tényezője az $e_{k+1}(p)$-nek, $1\leq k\leq R-1$ és mindegyik $\psi_j(p)$ tényezője a $\psi_{j-1}(p)$-nek, $2\leq j\leq R$.
iii′) Valamennyi k-ra, $1\leq k\leq R$, $e_k(p)$ és $\psi_k(p)$ egygyei egyenlő vezér együtthatójú polinóm.
iv′) $[A(p)]$ és $[B(p)]$ polinóm mátrixok, melyek állandó, zérustól különböző determinánssal rendelkeznek.
v′) $\psi_1(p)=\psi_Z(p)$.

A $[W(p)]$ unicitása az 1 Lemmából azonnal következik. Tehát bármely $[W^\circ(p)]$, mely kielégíti a (32) alakot és az i′)—v′) tulajdonságokat, valójában $[W(p)]$.

Az unicitás tételének van egy sor következménye:

1. Következmény. $[W(p)]$ önmagának is normál alakja.

2. Következmény. Legyen $\varphi(p)$ egy racionális függvény és

$$[Z_1(p)]=\varphi(p)\,[Z(p)]. \tag{33}$$

Legyen $[W(p)]$ a $[Z(p)]$ normál alakja és $[W_1(p)]$ a $[Z_1(p)]$ normál alakja. Ebben az esetben:

$$[W_1(p)]=\varphi(p)\,[W(p)]: \tag{34}$$

3. Következmény. Ha $[C(p)]$ és $[D(p)]$ állandó és zérustól különböző determinánsú polinóm mátrix, akkor a $[Z(p)]$ és a $[C(p)][Z(p)][D(p)]$ normál alakja ugyanaz.

15. Definíció. A p_0 pont a $[Z(p)]$ pólusa, ha $[Z(p)]$ valamelyik elemének pólusa van a $p=p_0$ pontnál. Ha a p_0 nem pólusa $[Z(p)]$-nek, akkor azt mondják, hogy $[Z(p_0)]$ véges, vagy hogy $[Z(p)]$ véges a p_0-nál.

Most vizsgáljuk egy adott racionális $[Z(p)]$ mátrixot. Felbontva $[Z(p)]$-t részlettörtekre, lesz:

$$[Z(p)]=[H_\infty]+\sum_{i=0}^{m}[H_i] \tag{35}$$

ahol a $[H_l]$ és $[H_\infty]$ főrészek ilyen alakot vesznek fel:

$$[H_l]=\frac{[K_{l,p}]}{(p-p_l)^k}+\frac{[K_{l,p-2}]}{(p-p_l)^{k-1}}+\ldots+\frac{[K_{l,1}]}{(p-p_l)} \tag{36}$$

$$[H_\infty]=p^k[K_{\infty,k}]+\ldots+p[K_{\infty,1}]+[K_\infty] \tag{37}$$

ahol valamennyi $[K_{l,m}]$ állandó mátrix, mely $[Z(p)]$-vel egyértelműen definiálva van.

16. Definíció. Ha $[Z(p)]$ a (35) egyenlet alakjában van adva a (36) és (37) segítségével, akkor a k szám a $[Z(p)]$ p_l-nél levő pólusának a rendszáma.

Ha $[Z(p)]$-nek (35) alakja van $p_l\neq\infty$ esetén, akkor $[Z(p)]$ néhány zérustól különböző elemének nevezője tartalmazza a $(p-p_l)^k$ tényezőt és nincs olyan elem, melynek rendszáma k-nál nagyobb volna a p_l pólusnál. Tehát a $(p-p_l)^k$ osztja $\psi_Z(p)$-t, de a $(p-p_l)$ magasabb hatványa már nem. Tehát iii') alapján a $[Z(p)]$ normál alakjának első eleme tartalmaz egy k-ad rendű pólust $p=p_l$-nél. Innen következik, hogy $p_l\neq\infty$ akkor, és csakis akkor k-ad rendű pólusa $[Z(p)]$-nek, ha k-ad rendű pólusa $[W(p)]$-nek is.

17. Definíció. Vizsgáljuk most a $[Z(p)]$ valamelyik k-ad rendű pólusának a $[H_l]$ fő részét. Mivel $[H_l]$ racionális, tehát van $W(p)$ normál alakja. Legyen γ_l az

$$\frac{e_l(p)}{\psi_l(p)} \tag{38}$$

l-edik diagonális elem p_l pólusnál levő rendszám. Ekkor $\gamma_l\geq\gamma_{l+1}$ és $\gamma_1=k$. Tehát az összes γ_l-t fel lehet írni egy rendezett sorban:

$$S(H_l,\ p_l)=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_h]. \tag{39}$$

18. Definíció. Vizsgáljunk két $[Z(p)]$ és $[Z_1(p)]$ mátrixot, melynél

$$\left.\begin{aligned} S(Z,\ p_l)&=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n] \\ S(Z_1,\ p_l)&=[\gamma_1',\ \gamma_2',\ \ldots,\ \gamma_n'] \end{aligned}\right\}. \tag{40}$$

Azt mondjuk, hogy

$$S(Z_1p_l)\geq S(Z_1,\ p_l) \tag{41}$$

akkor, és csakis akkor, ha

$$\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_h\geq\gamma_1'+\gamma_2'+\ldots+\gamma_h' \tag{42}$$

bármelyik $k=$ í, 2,..., n esetén. Azt mondjuk, hogy

$$S(Z_1p_l)=S[Z_1,\ p_l) \tag{43}$$

ha $\gamma_h=\gamma_h'$ bármelyik $k=1,\ 2,\ldots,$ n esetén.

A [7]-ben bizonyítva van néhány $S(Z,\ p_l)$-re vonatkozó tétel, melyet most bizonyítás nélkül ismertetünk.

4. Állítás. Legyen $p_l\neq\infty$ a $[Z(p)]$ egy pólusa. Legyen továbbá $[F(p)]$ egy racionális n$\times$n mátrix, mely véges p_l-nél. Ekkor

$$S(Z_1p_l)\geq S(FZ_1p_l). \tag{44}$$

Pontosabban, ha $[F(p)]$ nem szinguláris p_l-nél, akkor

$$S(Z,p_l)=S(Z_1,\ p_l). \tag{45}$$

5. Állítás. Ha $p_l\neq\infty$ és

$$[Z(p)]=[Z_1(p)]+[Z_2(p)] \tag{46}$$

ahol $[Z_2(p)$j véges p_l-nél, akkor

$$S(Z,p_l)=S(Z_1,\ p_l). \tag{47}$$

Az 5. Állítás segítségével könnyű kimutatni, hogy ha $[Z(p)]$-nek (35) alakja van, akkor $S(Zp_l)=$ $=S(H_l,\ p_l)$ $p_l\neq\infty$ esetén.

6. Állítás. Legyen $[Z(p)]$ olyan, hogy $p=p_l\neq\infty$ esetén csak egyetlen fődiagonálison fekvő eleme rendelkezzék pólussal. Legyen $\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\sigma_n$ ezen pólus rendszámai, melyek úgy vannak megszámozva, hogy

$$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\ldots\geq\sigma_n. \tag{48}$$

Ekkor

$$S(Z,p_l)=[\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\sigma_n]. \tag{49}$$

19. Definíció. Legyen

$$p=T(q)=\frac{\alpha q+\beta}{\gamma q+\delta} \tag{50}$$

egy nem szinguláris, biracionális transzformáció a q síkról a p síkra. Jelöljük az inverzét így:

$$q=T^{-1}(p) \tag{51}$$

Adva van egy racionális $[Z(p)]$. Ekkor

$$[Z_1(q)]=[Z(T(q)] \tag{52}$$

mátrix racionális q-ban.

Bármelyik olyan p_l esetén, hogy $T^{-1}(p_l)\neq\infty$, definiáljuk

$$S_T(Z,p_l)=S[Z_1,\ T^{-1}(p_l)]. \tag{53}$$

7. Állítás. Ha p_l és $T^{-1}(p_l)$ véges, akkor

$$S_T(Z,p_l)=S(Z_1,\ p_l). \tag{54}$$

20. Definíció. Adva van valamilyen p_l. Legyen $p=T(q)$ egy nem szinguláris, biracionális transzformáció, hogy $q_l=T^{-1}(p_l)\neq\infty$. Ekkor így definiáljuk $S^*(Z,\ p_l)$-t:

$$S^*(Z,p_l)=S(Z,p). \tag{55}$$

8. Állítás. A 4., 5. és 6. Állítás érvényes S^*-ra a p_l véges voltának korlátozása nélkül.

9. Állítás. Ha a 19. Definíciót S^*-ra kiterjesztjük, definiálva

$$S_T^*(Z,p_l)=S^*(Z_1,\ T_1(p_l)) \tag{56}$$

akkor a 7. Állítás fennáll S^*-ra a p_l, vagy $T^{-1}(p_l)$-re való korlátozás nélkül.

21. Definíció. Legyen

$$S^*(Z,p_l)=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n]. \tag{57}$$

Definiáljuk

$$\delta(Z,p_l)=\gamma_1+\gamma_2<\ldots<\gamma_n \tag{58}$$

$$\delta(Z)=\sum_{pl}\delta(Z,p_l), \tag{59}$$

ahol az összegezés a $[Z(p)]$ valamennyi p_l pólusára vonatkozik, beleértve $p_\infty=\infty$-t is. Ez a $\delta(Z)$ a $[Z(p)]$ mátrix foka, mely a korábban említett i) – vii) tulajdonságokkal rendelkezik.

Az i)—vii) tulajdonságokkal sorrendben fogjuk ellenőrizni, kivéve a iii)-t, melyet utoljára hagyunk.

i)—ii) tulajdonság ellenőrzése: Nyilván $\delta(Z)$ egy egész szám és nem negatív. Ha $\delta(Z)=0$, akkor az összes γ valamennyi p_i-nél zérus. Ezért sem p_i, sem ∞ nem pólusa $[Z]$-nek. Tehát $[Z(p)]$ valamennyi eleme a p-től független állandó.

iv) tulajdonság ellenőrzése: Tegyük fel, hogy

$$[Z(p)]=[Z_1(p)]+[Z_2(p)] \tag{60}$$

ahol valamennyi $[Z_l(p)]$, $l=1, 2$, véges a másik valamennyi pólusánál. A $[Z(p)]$ pólusai ekkor a $[Z_1]$ mátrix $p_i^{(1)}$ pólusainak és a $[Z_2]$ mátrix $p_i^{(2)}$ pólusainak az összege. Valamennyi pólusnál alkalmazva az 5. Állítást, írható

$$\delta(Z,p_i^{(l)})=\delta(H_i, p_i) \tag{61}$$

Felbontva a $\delta(Z)$-t definiáló összeget a $p_i^{(1)}$ és $p_i^{(2)}$ szerinti összegre bizonyítható, hogy

$$\delta(Z)=\delta(Z_1)+\delta(Z_2) \tag{62}$$

ami nem más, mint a iv) tulajdonság.

v) tulajdonság ellenőrzése: Ha

$$[Z(p)]=f(p)[R] \tag{63}$$

ahol $[R]$ egy állandó mátrix, akkor a $[Z(p)]$ normál alakja $f(p)$-szer egy ugyanolyan rangú diagonál mátrix, mint $[R]$. Az v) tulajdonság innen azonnal következik.

vi) tulajdonság ellenőrzése: Ha

$$[Z_1(p)]=[A][Z(p)][B] \tag{64}$$

ahol $[A]$ és $[B]$ állandó és nem szinguláris mátrix, akkor $[Z_1(p)]$ és $[Z(p)]$ pólusai ugyanazok. Mindektőnél a 4. Állítást alkalmazva a 8. Állításbeli kitágított értelemben, tehát $\delta(Z_1)=\delta(Z)$. Ez a vi) tulajdonság.

vii) tulajdonság ellenőrzése: Ha $[Z_1(p)]$ zérussal szegélyezett $[Z(p)]$, akkor mindkettő azonos pólusokkal rendelkezik. Az 1 Lemmából azonnal bizonyítható, hogy a $[Z_1(p)]$ normál alakja ugyanaz, mint a $[Z(p)]$-é zérussal szegélyezve. Mivel $[Z_1T(q)]$ is a zérussal szegélyezett $\{Z[T(p)]\}$, innen következik, hogy

$$S^*(Z_1,p_i)=S^*(Z,p_i) \tag{65}$$

valamennyi p_i pólusnál, ahonnan $\delta(Z_1)=\delta(Z)$. Ez a vii) tulajdonság.

iii) tulajdonság bizonyítása: Bizonyítanunk kell, hogy ha $[Z(p)]$ nem szinguláris, akkor

$$\delta(Z)=\delta(Z^{-1}). \tag{66}$$

Bizonyítás. Választunk egy olyan $p=T(q)$ biracionális transzformációt, hogy a $p=T(\infty)$ esetén úgy $[Z(p)]$, mint $[Z^{-1}(p)]$ véges legyen. Legyen továbbá

$$[Z_1(q)]=[Z(T(q))]. \tag{67}$$

Ekkor

$$[Z_1^{-1}(q)]=[Z^{-1}(T(q))]. \tag{68}$$

Legyen $[W_1(q)]$ a $[Z_1(q)]$ normál alakja, mely

$$\frac{e_h(q)}{\psi_h(q)} \tag{69}$$

diagonális elemekkel rendelkezik. Mivel $[Z_1(q)]$ rangja n, ezek egyike sem tűnik el azonosan.

Először azt állítjuk, hogy $\delta(Z)=\delta(Z_1)$. A $[Z]$ mátrix p_i pólusai pontosan azok a

$$p_i=T(q_i) \tag{70}$$

pontok, ahol q_i befutja a $[Z_1]$ mátrix pólusait. Valamennyi pólusnál

$$S^*(Z,p_i)=S_T^*(Z,p_i)=S^*(Z_1, q_i) \tag{71}$$

a 9. Állítás alapján. Ezért $\delta(Z, p_i)=\delta(Z_1, p_i)$ és az állítás az összes pólusra való összegezésből következik. Ekkor ehhez hasonlóan $\delta(Z^{-1})=\delta(Z_1^{-1})$.

Ezután azt állítjuk, hogy $\delta(Z_1)$ éppen a

$$\psi_1(q)\,\psi_2(q)\,\ldots\,\psi_n(q) \tag{72}$$

polinóm fokszáma. A $\delta(Z_1, q_i)$ a $(q-q_i)$ kitevője ebben a polinómban és ezen polinóm zérusai éppen a $[Z_1(q)]$ pólusai.

Megfigyeljük, hogy a

$$[W_1(q)]=[A(q)]\,[Z_1(q)]\,[B(q)] \tag{73}$$

akkor

$$[W_1^{-1}(q)]=[B^{-1}(q)]\,[Z_1^{-1}(q)]\,[A^{-1}(q)]. \tag{74}$$

A $[W^{-1}(q)]$ mátrix

$$\frac{\psi_k(q)}{e_k(q)} \tag{75}$$

diagonális elemmel rendelkezik. Nyilván, ha ezeket reverz sorrendben elrendezzük, akkor egy normál alakot kapunk. Tehát a (75) függvény a $[Z_1^{-1}(q)]$ normál alakjának a diagonális eleme. A fenti megfontolást alkalmazva $[Z_1^{-1}(q)]$-ra, kimutatható, hogy $\delta(Z_1^{-1})$ az

$$e_1(q)\ldots e_n(q) \tag{76}$$

fokszáma.

Végül megjegyezzük a determináns összefüggést

$$|W_1(q)|=|A(q)|\cdot|Z_1(q)|\cdot|B(q)|= \\ =(\text{állandó}).\ |Z_1(q)| \tag{77}$$

mivel az $[A]$ és $[B]$ mátrix determinánsa állandó. Továbbá $[Z_1(q)]$-nak nincs pólusa $q=\infty$-nél, ezért a determináns ott véges. Ugyanez érvényes $[Z_1^{-1}(q)]$-ra, még ha

$$|Z_1(\infty)|=0. \tag{78}$$

Ekkor közvetlen számítással

$$|W_1(q)|=\frac{e_1(q)\cdot e_2(q)\,\ldots\,e_n(q)}{\psi_1(q)\,\psi_2(q)\,\ldots\,\psi_n(q)} \tag{79}$$

Mivel ez véges és nem zérus $q=\infty$ esetén, tehát a számlálónak és a nevezőnek ugyanazon fokszáma van. Végeredményünk tehát

$$\delta(Z)=\delta(Z_1)=\text{fok}\,(\pi_k \psi_k)=\text{fok}\,(\pi_k e_k)= \\ =\delta(Z_1^{-1})=\delta(Z^{-1}). \tag{80}$$

Az i)—vii) tulajdonság alapján könnyen belátható, hogy egy *PR* mátrix foka — amely mátrix fizikailag egy n-kapuval realizálható — nem más, mint azon reaktáns elemek minimális száma, mely az n-kapu fizikai realizációjához elengedhetetlenül szükséges.

IRODALOM

[1] *Bolgárfalvy Károly*, Az n-kapuk ábrázoláselméletének alapjai, TKI Közlemények (megjelenés alatt).

[2] *A. C. Zaanen*, Linear Analysis, Interscience Publisher, New York N. Y.; 1953.

[3] *E. C. Titchmarsh*, Theory of Fourier Integrals, Claderon Press, Oxford, Eng. 2nd ed; 1948.

[4] *S. Bochner* and *K. Chandrascharan*, Fourier Transforms, Princeton Univ. Press, Princeton, N. Y. 1949.

[5] *E. Hille*, Functional Analysis and Semi-Groups, American Mathematical Society; 1948.

[6] *A. H. Zemanian*, An N-Port Realizability Theory Based on the Theory of Distributions.

[7] *B. Mc-Millan*, Introduetion of Formai Realizability Theory 11. B.S.T.J. vol. 31., No. 2., March 1952.

[8] *M. Bocher*, Introduetion to Higher Algebra, New York, 1930.