HÍRADÁS-TECHNIKA

LAJTHA GYÖRGY — SZENTIRMAI ZSOLT

Előfizetőtől előfizetőig terjedő összeköttetés minőségi jellemzőinek felosztása a szakaszok között

ETO 621.391.8:654.1

Egy összeköttetés szakaszai között tapasztalati adatok, nemzetközi ajánlások alapján lehet a minőségi követelményeket felosztani, és az egyes szakaszokra érvényes előírásokat elkészíteni. Az előírások felosztása az egyes szakaszok között a műszaki lehetőségek fejlődésével időnként megváltozhat. A követelmények szigorításának vagy enyhítésének nagy gazdasági kihatása van.

A következőkben ezért megnézzük, hogy milyen módon lehet gazdaságilag optimális felosztást biztosítani.

E cikkben csak olyan jellemzőkkel foglalkozunk, amelyek az összeköttetés mentén „lineárisan összegeződnek", azaz az összeköttetés jellemzője egyenlő az egyes szakaszok jellemzőinek összegével. Ilyenek pl. a zajok, a torzítások és a csillapítás.

Matematikai modell

Általános eset

Tekintsünk egy n szakaszból álló összeköttetést és ennek ξ minőségi jellemzőjét, amely valószínűségi változó. Az összeköttetés annál jobb minőségű, minél kisebb ξ, pontosabban minél ritkábban vesz fel ξ nagy értékeket. Tehát egy összeköttetés akkor jó minőségű, ha ξ várható értéke és szórása kicsi (ilyen pl. a zajteljesítmény, a csillapítás stb.

Tegyük fel, hogy a ξ jellemző az n egymás után köthető szakasz $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jellemzőinek összegeként áll elő, azaz

$$\xi=\sum_{i=1}^{n} \xi_i .$$

Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mennyiségek független, azonos eloszlású valószínűségi változók $m_1, m_2, \ldots, m_n$ várható értékekkel és $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ szórásokkal. Vezessük be az $m=(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ és $\sigma=\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ jelöléseket és nevezzük ezeket minőségi paramétereknek.

Beérkezett: 1975. III. 4.

Tegyük fel továbbá, hogy az összeköttetés létesítésének költsége az m és σ minőségi paraméterektől függ, vagyis adva van egy 2n változós, valós értékű $K(m, \sigma)$ függvény.

A ξ mennyiségtől azt követeljük meg, hogy egy X_0 értéket az eseteknek legfeljebb $100 \cdot \delta$ százalékában lépjen túl, azaz

$$P(\xi \geqq X_0) \leqq \delta \tag{1}$$

legyen, ahol X_0 és $\delta > 0$ adott, rögzített számok.

Az (1) feltétel természetesnek tűnik, ha ξ pl. zajt jelöl és X_0 a legfeljebb δ valószínűséggel túlléphető zajteljesítmény. (1) tehát egy minőségi előírást fejez ki. Hogy ez az előírás mennyire szigorú, az X_0 és δ értékétől függ.

Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók eloszlástípusa ismert, és ξ eloszlásfüggvényének típusa ezek segítségével meghatározható, akkor egy $F(X_0; m, \sigma)$ függvényhez jutunk. Ennek segítségével az (1) feltétel a következőképpen írható:

$$1-F(X_0; m, \sigma) \leqq \delta, \quad \text{azaz}$$

$$F(X_0; m, \sigma) \geqq 1-\delta. \tag{2}$$

Célunk olyan m és σ értékrendszerek meghatározása, amelyekkel a (2) feltétel teljesül, és a $K/m, \sigma)$ költségfüggvény minimális.

A ξ mennyiségnek az összeköttetés szakaszai (vagy berendezésegységei) közötti optimális szétosztását tehát a

$$K(m, \sigma) \text{ legyen minimális és}$$

$$F(X_0; m, \sigma) \geqq 1-\delta \tag{3}$$

feltételes szélsőérték számítási feladat megoldása szolgáltatja, amely megadja azt az m_i, σ_i értéksorozatot, amelyet a szakaszokra elő kell írni.

Az, hogy egy ilyen (3) alakú feladat megoldható-e, illetve milyen módszerrel oldható meg, természetesen a K és F függvényektől függ.

A következőkben a gyakorlat szempontjából nem ésszerűtlen további feltételeket teszünk, hogy a (3) feladat megoldhatóságáról többet mondhassunk.

Normális eloszlás esete

Tekintsük az előző pontban vázolt modellt a következő megszorítással:

Tegyük fel, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, normális eloszlású valószínűségi változók.

Ez esetben ξ is normális eloszlású valószínűségi változó $\sum_{i=1}^{n} m_i$ várható értékkel és $\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2}$ szórással, vagyis a szakaszok minőségi paramétereinek összege az eredő.

A (3) feladat feltételi egyenletét most így írhatjuk:

$$\Phi\left(\frac{X_0-\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}\right) \geqq 1-\delta, \tag{4}$$

ahol Φ a standard (0 várható értékű, 1 szórású) normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

A Φ függvény szigorúan monoton növekvő, inverze zárt alakban nem adható meg. Azonban csaknem minden matematikai statisztikakönyvben megtalálható a Φ függvénynek egy elég részletes értéktáblázata, amelyből kikereshető az $(1-\delta)$-hoz — vagy ahhoz közeli értékhez — az a C_δ szám, amelyhez Φ az $1-\delta$ értéket rendeli. Néhány, gyakorlatilag jelentős δ értékhez tartozó C_δ számot az 1. táblázatban adtunk meg. Ebből kiolvasva, pl. $\delta=0{,}0096$ esetén $C_\delta=2{,}34$.

1. táblázat

δ	$1-\delta$	σ_δ
0,050 5	0,9495	1,64
0,0495	0,9505	1,65
0,0301	0,9699	1,88
0,0294	0,9706	1,89
0,0102	0,9898	2,32
0,0096	0,9904	2,34

Ezzel a (4) feltétel a következő alakot ölti:

$$X_0-\sum_{i=1}^{n} m_i - C_\delta \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} \geqq 0. \tag{5}$$

A vizsgált — (3)-nak megfelelő — feladat most tehát az alábbi:

$K(m, \sigma)$ legyen minimális, ha

$$X_0-\sum_{i=1}^{n} m_i - C_\delta \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} \geqq 0. \tag{6}$$

Látható, hogy ha ξ normális eloszlású, akkor a (3) feladat egyenlőtlengsége egyszerű — jól kezelhetőnek látszó — alakot ölt.

A költségfüggvény

Eddig nem vizsgáltuk a minőségi paraméterek és a K függvény kapcsolatát.

Általános törvényként fogadhatjuk el, hogy a minőség javítása a költségek növekedésével jár. Más szóval: a költség egy adott technikai szinten csak a minőség rovására csökkenthető.

Mivel — mint említettük — a minőség a minőségi paraméterek monoton csökkenő függvénye, a fenti szabály értelmében ez a költségfüggvényre is igaz. Ilyen tulajdonságúak pl. a

$$K(\mathbf{m}, \sigma)=\sum_{i=1}^{n} Q_i\left(\frac{a}{m_i^k}+\frac{b}{\sigma_i^k}\right)$$

$$(k \text{ természetes szám } Q_i \geqq 0) \tag{7}$$

és a

$$K(m, \sigma)=\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} Q_i\left(\frac{a_k}{m_i^k}+\frac{b_k}{\sigma_i^k}\right) \tag{8}$$

függvények.

Ebben az esetben a (6) feladat egyenlőtlensége egyenlőséggel helyettesíthető, azaz a probléma modellje most a

$K(m, \sigma)$ legyen minimális, ha

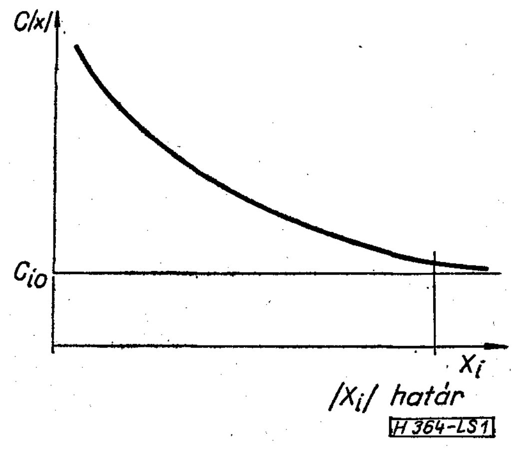
$$X_0-\sum_{i=1}^{n} m_i - C_\delta \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = 0 \tag{9}$$

feltételes szélsőérték-számítási feladat.

A tapasztalat szerint a valóságos költség és a minőségi paraméterek közötti kapcsolat akár (7), akár (8) alakú lehet.

A (7)-ben és (8)-ban szereplő a és b együtthatók vagy kísérleti vagy elméleti alapon meghatározhatók. A kísérleti meghatározás gazdasági műszaki feladatoknál azt jelenti, hogy különböző paraméterű berendezések, létesítmények árát meghatározva, a kapott pontokat monoton csökkenő görbével közelítve, az 1. ábrán láthatóhoz hasonló karakterisztikát kapjuk. A karakterisztikához tartozó együtthatókat az „n-pontos" approximációval számíthatjuk. Az eljárás alkalmazását megnehezíti, hogy az árak különbözősége nem egyértelmű és nem kizárólag a minőségtől függ.

A függvény meghatározása néhány esetben egészen egyszerűen megoldható. Így pl. a forgalmi veszteség csökkentése az alkalmazott gép, egység vagy



1. ábra

áramkör darabszámának növelésével és így költségnöveléssel jár. Ha feltételezzük — a gyakorlatban nem helytálló — lineáris összegeződést, akkor a teljes $x_i=10$ Erlang-forgalom átviteléhez B veszteség esetén n egység (áramkör) kell. Nyilvánvalóan látszik, hogy a költség az egységek vagy áramkörök számával növekszik lineárisan, a forgalommal nincs lineáris kapcsolatban.

A gyakorlatban a forgalom adott, és a veszteségeket lehet szétosztani. Ha a ξ_i minőségi jellemző arányos a B veszteséggel, akkor az egymás után következő szakaszok között kell a B-t optimálisan szétosztani. Lineáris összegeződést feltételezve $X_0=$ $=B_0=0{,}2$ veszteséget akarunk az egyes szakaszokon szétosztani. Nézzük meg, az egyes szakaszok költsége hogyan változik attól függően, hogy az egyes szakaszokon a veszteség hányad részét engedjük meg. Ehhez táblázatosan felírjuk 10 Erlang-forgalom esetére a veszteség és az áramkörszám összefüggéseit:

$B=$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
$N=$	14	16	17	18	19	20	21

A következő két példa még szemléletesebb, különösen a csillapításra vonatkozó példa, mert az ár és a minőség között ebben az esetben zárt formába foglalható összefüggést lehet találni.

Elsőként nézzük meg az átviteltechnika területén a modern berendezések zajkiosztását. Vegyük pl. hogy az elemszám négyzete arányos a csillapítással. A zajteljesítmény $W=e^{-a}$ összefüggés kapcsolódik a csillapításhoz. Ebből kifejezve:

$$W/W_0=e^{-rk^2},$$

ahol k az elemszám. A költségek $a_i=a_0+r_0k$ kifejezéssel írhatók fel, ahol r és r_0 az adott konstrukcióra jellemző tényező. A zajteljesítmény relatív értékének reciprokát írjuk fel, és közelítsük az exponenciális kifejezés sorának első tagjával:

$$\frac{W_0}{W}=e^{rk^2}=1+rk^2.$$

Ebből

$$k^2=\frac{1}{r}\left(\frac{W_0}{W}-1\right),$$

$$K_i(\overline{w})=a_0+\frac{r_0}{r}\cdot\sqrt{\frac{W_0}{W}-1}$$

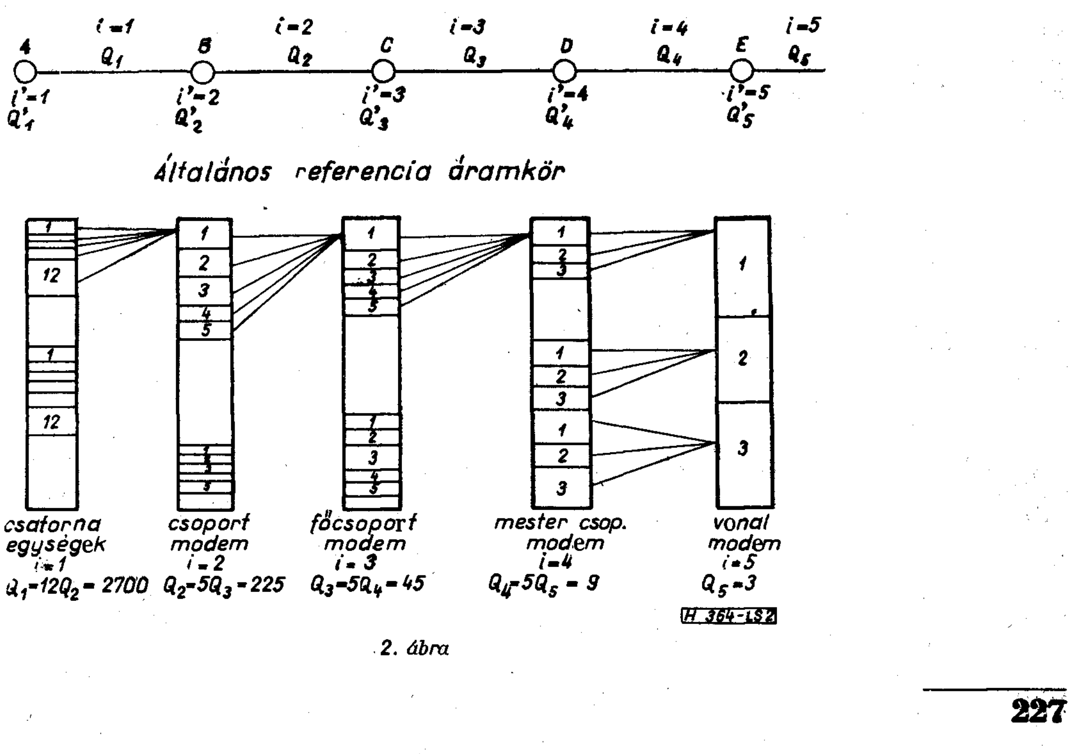
sorbafejtéssel a $K_i(\overline{w})$ függvény $\sum_{k=0}^{l}\frac{a_k}{\overline{w}^k}$ alakra hozható. Az itt szereplő $\overline{W}$ megfelel az általános modell m-jének.

Itt kell megjegyezni, hogy a kiszámított a_i együtthatók adott berendezéstípusra állandóak, ezért azokat nem kell i indexszel ellátni, csak a_0, a_1, a_2, ... betűk szerepelnek az összefüggésekben.

A legjellegzetesebb példa a helyi kábelek egyenérték-csillapítása, ami az érátmérővel közvetlen kapcsolatban van, és elég nagy kapacitású kábeleknél az érátmérő és a kábel ára között is törvényszerű a kapcsolat. Közelítőleg azt lehet mondani, hogy az egyenérték-csillapítás fordítva arányos az árral. Ebben az esetben a közelítés első tagja már kielégítő pontosságú eredményt ad.

A példák alapján látható, hogy a költség és a minőség között a kapcsolat felírható. Ennek általánosítása érdekében a 2. ábrán egy referencia áramkört rajzolunk fel, amelyre felírjuk annak főbb jellemzőit, és ezekre végezzük el a minőségi paraméterek gazdaságilag optimális felosztását. Ugyanezen az ábrán látható továbbá az átviteltechnikai berendezés vázlata is, ahol a berendezés egységei között hasonló elvek alapján oszthatók szét a minőségi jellemzők megengedett értékei.

A Q együttható az azonos típusú szakaszok (ill. berendezések) darabszáma a teljes hálózatban. Szemlélet alapján is nyilvánvaló, hogy azokat a szakaszokat kell legolcsóbban megvalósítani, vagyis a minőségi jellemzőkből arra a szakaszra kell a legenyhébb követelményt megengedni, amelyekből legtöbb van



2. ábra

a hálózatban. A teljes hálózat létesítési költsége ugyanis

$$K(\mathrm{m})=C+\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{a_k}{m_i^k},$$

ahol n vagy a referencia áramkör mentén levő szakaszok száma, vagy bármilyen átviteltechnikai vagy kapcsolástechnikai berendezés fokozatainak száma. $K(\mathrm{m})$ megadja egy minőségi paraméter változásának a függvényében a teljes hálózat vagy berendezés költségeit. Mindazon költségtényezőket, melyek a vizsgált ξ_i jellemzőtől függetlenek, a C jelű tag foglalja magába.

A feladat megoldása

Az előző pontban szereplő (3) és (6) feladatok megoldásáról addig nem sokat mondhatunk, míg az F, illetve a K függvényekre további kikötéseket nem teszünk.

Látni fogjuk, hogy bizonyos konkrét esetekben az ilyen feladatok egzakt vagy numerikus módszerekkel megoldhatók.

Tiszta k-ad fokú költségfüggvény esete

Tekintsük a (9) feladatot a (7) költségfüggvénnyel:

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i\left(\frac{a}{m_i^k}+\frac{b}{\sigma_i^k}\right)\to \mathrm{Min!}$$

$$X_0=\sum_{i=1}^{n}m_i-C_\delta\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}=0,\quad \text{ahol} \tag{10}$$

$$0<\delta<0{,}5,\quad C_\delta=\Phi^{-1}(1-\delta),$$

$$a>0,\quad b\geqq 0,$$

$$m_i>0,\quad Q_i>0,\quad \sigma_i>0,$$

k természetes szám.

Tekintettel arra, hogy a minimalizálandó függvény és a feltételi egyenlet baloldalán álló függvény folytonosan differenciálható, a (10) feladat megoldását kereshetjük az ismert Lagrange-féle módszerrel.

A Lagrange-függvény:

$$G(\mathbf{m},\sigma,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}Q_i\left(\frac{a}{m_i^k}+\frac{b}{\sigma_i^k}\right)-\lambda X_0+\lambda\sum_{i=1}^{n}m_i+$$
$$+\lambda C_\delta\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}. \tag{11}$$

A (11) függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial G}{\partial m_i}=Q_i\cdot\frac{-ak}{m_i^{k+2}}+\lambda,\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_i}=Q_i\cdot\frac{-bk}{\sigma_i^{k+1}}+\lambda C_\delta\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}},\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}=-\left(X_0-\sum_{i=1}^{n}m_i-C_\delta\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}\right).$$

A keresett m, a, λ értékrendszernek ki kell elégítenie a következő egyenletrendszert.

$$\text{I.}\quad Q_i\cdot\frac{-a\cdot k}{m_i^{k+1}}+\lambda=0,\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$\text{II.}\quad Q_i\cdot\frac{-b\cdot k}{\sigma_i^{k+1}}+\lambda C_\delta\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}}=0,\quad (i=1,\ldots,n)$$

$$\text{III.}\quad X_0-\sum_{i=1}^{n}m_i-C_\delta\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}=0. \tag{12}$$

(12) I. egyenleteiből következik, hogy

$$m_i=m_1\sqrt[k+1]{\frac{Q_i}{Q_1}}\quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{13}$$

Ennek felhasználásával írható, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}m_i=m_1\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{Q_i}{Q_1}}.$$

Vezessük be az $A=\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{Q_i}{Q_1}}$ jelölést.

Tehát:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i=m_1A. \tag{14}$$

(14) és a III. egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}=\frac{X_0-m_1A}{C_\delta}. \tag{15}$$

A II. egyenletekben a (15) egyenlőséget felhasználva, majd az egyenleteket rendre σ_i^{k+1}-nel megszorozva adódik:

$$-Q_ibk+\lambda C_\delta^2\frac{1}{X_0(-m_1)A}\cdot\sigma_i^{k+2}=0,\quad (i=1,\ldots,n). \tag{16}$$

(16)-ból a $\lambda=Q_1\cdot\frac{ak}{m_1^{k+1}}$ összefüggés felhasználásával és rendezéssel nyerjük, hogy:

$$\sigma_i^2=\sqrt[k+2]{\frac{b^2(x_0-m_1A)^2\cdot m_1^{2(k+1)}}{c_\delta^4\cdot a^2}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt[k=2]{\left(\frac{Q_i}{Q_1}\right)^2},\quad (i=1,\ldots,n). \tag{17}$$

Vezessük be a

$$B=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_i}{Q_1}\right)^{\frac{2}{k+2}}\right]^{\frac{k+2}{2}}$$

jelölést.

Ennek és a (17) egyenletnek a felhasználásával jutunk a következő összefüggéshez:

$$\sqrt[k+2]{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = \sqrt[k+2]{\frac{b(X_0 - m_1 A)\cdot m_1^{k+1}}{C_\delta^2 a}} \cdot \sqrt[k+2]{B} \qquad (18)$$

A (18) összefüggés alapján a III. egyenletből következik, hogy

$$X_0 - m_1 A = C_\delta \sqrt[k+2]{\frac{b(X_0 - m_1 A) m_1^{k+1}}{C_\delta^2 a}} \cdot \sqrt[k+2]{B}\,. \qquad (19)$$

Innen rendezéssel adódik, hogy

$$m_1 = \frac{X_0}{A + \sqrt[k+1]{\frac{b}{a} \cdot C_\delta^k \cdot B}}\,. \qquad (20)$$

Végül (17)-ben felhasználva a (20) összefüggést, rendezés után nyerjük, hogy

$$a_i^2 = m_i^2 \sqrt[k+1]{\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{C_\delta}\right)^2} \cdot \sqrt[k+2]{\left(\frac{Q_i}{Q_1}\right)^2} \cdot \sqrt[(k+1)(k+2)]{B^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (21)$$

ahol a és b a költségfüggvény együtthatói és Q, A, B a hálózatban levő szakaszok számától függő számértékek.

Tekintettel arra, hogy a minimálandó függvény konvex az

$$\{(m, a);\quad m_i > 0;\quad a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

halmazon, a kapott egyetlen megoldás csak lokális minimum lehet, amely nyilvánvalóan globális minimum is.

A gyakorlatban a minőségi jellemzők, illetve paraméterek pozitív mennyiségek, tehát joggal szorítkozunk a szóban forgó halmazra.

Determinisztikus eset

Most tekintsük a (10) feladatnak azt a speciális esetét, amikor $b = 0$. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a költség nem függ a a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ paraméterektől (a szórásoktól).

Ez olyankor fordul elő, amikor a ξ_i minőségi jellemző minden esetben az m_i értékkel egyenlő, és a gyártás vagy fenntartás során nem kell gondot fordítani σ_i kis értéken tartására. Ez esetben a (20), illetve (13) és (21) formulák szerint a minőségi paraméterek optimális szétosztása a következő:

$$\begin{cases} m_i = \dfrac{\sqrt[k+1]{Q_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[k+1]{Q_i}} \cdot X_0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) & (22) \\ \sigma_i^2 = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). & (23) \end{cases}$$

A (23) egyenlőségek nem meglepőek, hiszen a költség akkor és csak akkor nem függ a szórástól, ha ξ determinisztikus (nem valószínűségi) változó.

(22) tehát a

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \dfrac{a}{m_i^k} \quad \text{legyen minimális, ha} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_i = X_0 \quad (m_i > 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \qquad (24)$$

feladat megoldása.

Nem tiszta k-ad fokú költségfüggvény esete

Vizsgáljuk meg a következő esetet. Legyen a szétosztandó minőségi jellemző determinisztikus, X_0 előírt értékkel. Tegyük fel, hogy a költségfüggvény (8) alakú, de természetesen most $b_k = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, l)$.

Tekintsük tehát a következő feladatot:

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{a_k}{m_i^k} \to \text{Min!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = X_0 \qquad (25)$$

$$m_i > 0, \quad Q > Q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez a (24)-hez hasonló, kicsit általánosabb költségfüggvénnyel.

Ha (25)-öt a Lagrange-féle módszerrel próbáljuk megoldani, akkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\sum_{k=2}^{l+1} (k-1) a_k \left(\frac{Q_i}{m_i^k} - \frac{Q_{i+1}}{m_{i+1}^k}\right) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i - X_0 = 0. \qquad (26)$$

Ezt kell megoldanunk az $[m;\ m_i > 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n)]$ halmazon.

A (26) egyenletrendszer egzakt megoldása nem látszik egyszerűnek, ezért numerikus módszerhez célszerű folyamodnunk.

Alkalmazhatjuk például a közismert általánosított Newton—Raphson-módszert.

Gyakorlatban el is végeztük a (25) feladat, illetve a (26) egyenletrendszer megoldását abban az esetben, amikor $l = 3$. A Newton—Raphson-algoritmus elindításához szükséges induló értékeket a (22) formulákkal — $k = 1$ választással — határoztuk meg.

Konkrét számításokat végeztünk — természetesen számítógéppel — különböző X_0, n, $\{Q_i\}_{i=1}^{n}$ és $\{a_k\}_{k=1}^{3}$ értékekre.

A számítások eredményét rögzített Q_i értékekre a_2 és a_3 változtatásával a 2. táblázatban összesítettük. A függőleges tengelyre felírtuk Δm_i értékét, ahol

$$\Delta m_i = \frac{m_i(a_2 = 0,\ a_3 = 0)}{m_i(a_2,\ a_3)} \cdot 100,$$

vagyis Δm_i százalékában az első közelítés viszonyát adja a pontos értékhez. Ha $a_1 \cong 0$, akkor az első közelítés a másodfokú taghoz illeszkedik. Ezt tekintjük kiindulási alapnak. Ennek megfelelően az első és harmadfokú tagot elhanyagoljuk a zárt alakban végrehajtott számításnál, így $m_i(a_1 = 0,\ a_3 = 0)$ zárt alakban meghatározható érték. A különböző esetekre fel-

2. táblázat

$X_0 = 10\,000$
$N=3,\ Q_1=1,\ Q_2=10,\ Q_3=100$

a_1	a_2	a_3	Δm_1	Δm_2	Δm_3
10 000	10 000	10 000	99,8885	99,9852	100,016
10 000	20 000	50 000	99,777	99,9704	100,032

$N=4,\ Q_1=1,\ Q_2=10,\ Q_3=100,\ Q_4=1000$

a_1	a_2	a_3	Δm_1	Δm_2	Δm_3	Δm_4
10 000	10 000	10 000	99,5842	99,8953	99,9945	100,026
10 000	20 000	50 000	99,1686	99,7906	99,9886	100,051

$N=5,\ Q_1=1,\ Q_2=10,\ Q_3=100,\ Q_4=1000,\ Q_5=10\,000$

a_1	a_2	a_3	Δm_1	Δm_2	Δm_3	Δm_4	Δm_5
10 000	10 000	10 000	98,6122	99,5909	99,9043	100,004	100,035
10 000	20 000	50 000	97,2389	99,1824	99,8086	100,008	100,071

rajzolt négy görbeseregből egyöntetűen leolvasható, hogy a (22) szerinti induló értékek a berendezés- és hálózattervezési gyakorlatban előforduló X_0, n, Q_i és a_k értékek esetén nem térnek el a realizáció során értelmezhető mértékben a numerikus eljárással kapható pontos m_i optimális értéktől. Nem követünk el tehát nagy hibát, ha a (22) zárt formulával meghatározható megoldást használjuk fel determinisztikus minőségi jellemzők felosztására.

Hasonló numerikus ellenőrzés alapján feltételezhetjük, hogy sztochasztikus minőségi jellemzők esetében a tervezéshez elegendő pontosságú közelítő megoldást kaphatunk a (20) és (21) összefüggések felhasználásával. Felhívjuk még egyszer a figyelmet, hogy (20) és (21) csak normális eloszlású ξ_i minőségi jellemzők esetén ad megoldást.

Példák

Zajkiosztás

Nagyvárosi hálózatban összesen $x_0=2000$ pW a megengedett maximális zajteljesítmény. Az előfizetői és trönkhálózati sík áramkörszámainak aránya $1:\sqrt{0,12}$. Ezeket az adatokat felhasználva, lineárisan változó költségtényezővel számolva a következőket kapjuk:

$$m_1=\frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}\,[1+\sqrt{0,12}]}\,X_0\cong\frac{1}{1,35}\,X_0$$

és

$$m_2=\frac{\sqrt{0,12Q_1}\,X_0}{\sqrt{Q_1}\,[1+\sqrt{0,12}]}\cong\frac{0,35}{1,35}\cdot X_0.$$

A kiindulásnál felvett $x_0=2000$ felhasználásával az előfizetői hálózatra 1480 pW, a trönkhálózatra pedig 510 pW maximális zaj engedhető meg.

Várakozási idők felosztása

Ugyancsak a nagyvárosi hálózatban akarjuk felosztani a kápcsolás felépítési és várakozási időket. Mivel az áramkör számok aránya nem változik, ezért az előző pontban megadott összefüggések alapján számítható m_1 és m_2 értéke. Ha X_0 a teljes megengedett várakozási idő 100 ms, akkor az első szakasz végén

$m_I=\frac{1}{1,35}\,X_0=0,74\cdot 100$ m s $=74$ ms a megengedett várakozás, ebből automatikusan adódik, hogy a második szakasz végén $m_2=26$ ms várakozási idő engedhető meg.

Ha a várakozási időket a helyközi áramkör mentén akarjuk felosztani, akkor a 3. táblázatban levő Q_i áramkörszámarányokat vesszük figyelembe. Legyen a teljes megengedett várakozási idő $X_0=20$ s. Tételezzük fel továbbá, hogy a várakozási idő és a költség között lineáris kapcsolat van, tehát elegendő továbbra is az elsőfokú taggal való közelítés.

A számításhoz meghatározzuk $\sqrt{Q}\ A=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{Q_i}$ értékét:

$$\sqrt{Q}\ A=\sqrt{Q_1}\,[1+\sqrt{0,2}+\sqrt{0,1}+\sqrt{0,04}+\sqrt{0,011}]\cong$$
$$\cong\sqrt{Q_1}\,[1+0,45+0,32+0,2+0,1]\cong 2,1\sqrt{Q_1}\,.$$

Ezután rendre a következő időértékek adódnak:

$$m_1=\frac{\sqrt{Q_1}}{2,1\sqrt{Q_1}}\cdot 20=9,6\ \text{ms},$$

$$m_2=\frac{0,45}{2,1}\cdot 20=4,4\ \text{ms},$$

3. táblázat

A hálózati sík	Az előző síkban levő ák. száma	Beérkező forgalom A_1	Helyi forgalom A_1	Továbbmenő hányad	A teljes forgalom	Az áramkörök teljes kihasználása	Q_i
1	1	0,12	—	—	—	0,12	Q_1
2	Q_1	$0,12Q_1$	—	0,6	$0,12.0,6Q_1$	0,36	$0,2Q_1$
3	$0,2Q_1$	$0,072Q_1$	$0,028Q_1$	0,5	$0,05Q_1$	0,5	$0,1Q_1$
4	$0,1Q_1$	$0,05Q_1$	$0,025Q_1$	0,4	$0,03Q_1$	0,75	$0,04Q_1$
5	$0,04Q_1$	$0,03Q_1$	$0,01Q_1$	0,25	$0,010Q_1$	0,9	$0,011Q_I$

$$m_3=\frac{0,32}{2,1}20=3,1 \text{ ms},$$

$$m_4=\frac{0,2}{2,1}\cdot 20=1,9 \text{ ms},$$

$$m_5=\frac{0,1}{2,1}\cdot 20=1,0 \text{ ms}.$$

Itt feltételeztük, hogy a helyközi hálózat minden kapcsolási pontján azonos értékű elemekkel lehet az átlagos várakozási időket csökkenteni. A számítás nem veszi figyelembe a lefoglalt áramkörök értékét, melyek a várakozási idők alatt nincsenek kihasználva. Ezért az átlagos várakozási idők felosztására további forgalmi-gazdasági szempontok alapján kapunk eredményt. Itt csak mint számítási példa szerepel.

Vivőfrekvenciás berendezés zajainak felosztása

Vizsgáljunk egy 2700-csatornás vivőfrekvenciás végberendezést. A teljes referenciahálózatból a végberendezésekre 2500 pW zajt engedhetünk meg. Egy homogén szakaszra közben levő csoport- és főcsoportmodulációkra és a hangfrekvenciás végponton levő berendezésekre 600 pW-ót engedhetünk meg. Ezeknek a kiindulási adatoknak a felhasználásával vivőfrekvenciás modem fokozatot kell tervezni. Ha a zajra egyáltalán nincs kikötés, akkor szűrőt nem kell alkalmazni, és a modulátort sem kell kiegyenlíteni. Szigorítva az előírásokat a költségek rohamosan növekszenek.

A tapasztalat szerint a költségek a

$$K_i=15+\frac{60000}{m_i}+\frac{25000}{m_i}$$

függvénnyel közelíthetők.

Fejezzük ki m_i értékét 100 pW-okban:

$$K_i=15+\frac{60}{m_i}+\frac{25}{m_i^3}.$$

Megjegyzendő, hogy a fix költségrész a minimumhelyet nem befolyásolja.

A közelítő szétosztási szabály szerint

$$m_i=X_0\cdot\frac{Q_i}{\sqrt{Q}\,A}.$$

Az ajánlások alapján egy végberendezésére $X_0=$ $=600$ pW. Egy végberendezésben levő egységek száma:

csatorna modem	$Q_1=2700$	$\sqrt{Q_1}=51{,}9615$
csoport modem	$Q_2=225$	$\sqrt{Q_2}=15{,}0000$
főcsoport modem	$Q_3=45$	$\sqrt{Q_3}=6{,}70820$
mestercsoport modem	$Q_4=9$	$\sqrt{Q_4}=3{,}00000$
vonal modem	$Q_5=3$	$\sqrt{Q_5}=1{,}73205$
		$\sqrt{Q_1}A=78{,}4017$

A közelítő megoldások:

$$m_1=600\cdot\frac{52}{78,4}=397,656,$$

$$m_2=600\cdot\frac{15}{78,4}=114,793,$$

$$m_3=600\cdot\frac{6,7}{78,4}=51,3371,$$

$$m_4=600\cdot\frac{3}{78,4}=22,9587,$$

$$m_5=600\cdot\frac{1,7}{78,4}=13,2552.$$

Numerikusan elvégezve a pontos számítást kapjuk, hogy:

$$m_1=397,596,$$
$$m_2=114,781,$$
$$m_3=\ 51,3413,$$
$$m_4=\ 22,9822,$$
$$m_5=\ 13,2999.$$

Az első közelítés és az optimum %-os aránya:

$$m_1=100,0150,$$
$$m_2=100,0100,$$
$$m_3=\ 99,9918,$$
$$m_4=\ 99,8977,$$
$$m_5=\ 99,6639.$$

Ezek az értékek kisebbek a gyakorlatban szokásos biztonságnál, tehát az első közelítés elfogadható.

Zajfelosztás a gyártási költségek figyelembevételével

Legyen a berendezés egy egységének előállítási költsége

$$K_2=15+\frac{60}{m_i}+\frac{100}{\sigma_i},$$

most tehát $a=60$, $b=100$ és $k=1$, vagyis a teljes költség:

$$K=\sum_{i=}^{5}Q_i\left[15+\frac{60}{m_i}+\frac{100}{a_i}\right],$$

ahol X_0 és Q_i értékei megegyeznek az előző példában szereplő modem számokkal. Ennek alapján:

$$A=\sqrt{\frac{Q_i}{Q_1}}=\frac{78,4017}{51,9615}=1,50884 \text{ és}$$

$$B=\left[\frac{Q_i}{Q_1}\right]^{2/3}=1,46359.$$

Válasszuk a $\delta=0,0096$, meglehetősen szigorú értéket. Ekkor $C_\delta=2,34$.

Behelyettesítve a (20), illetve (13) és (21) egyenletekbe, rendre az alábbi eredményeket kapjuk:

$$\begin{array}{ll} m_1 = 153{,}926 & \sigma_1 = 138{,}42 \\ m_2 = 44{,}4347 & \sigma_2 = 60{,}4605 \\ m_3 = 19{,}8718 & \sigma_3 = 35{,}3575 \\ m_4 = 8{,}88693 & \sigma_4 = 20{,}6772 \\ m_5 = 5{,}13087 & \sigma_5 = 14{,}3368 \end{array}$$

Összefoglalás

A cikkben közölt számítással bebizonyítottuk, hogy azokat az egységeket kell legolcsóbban megvalósítani, amiből a legtöbb van a hálózatban. Ez egyben azt is jelenti, hogy a minőségi követelményeket ezekre az egységekre kell legenyhébben megszabni. Az áramköri arányok és a költségfüggvények ismeretében végrehajtott számítások jelentős megtakarítást biztosítanak a hálózat kiépítése során. Célszerű ezért új hálózatok tervezésénél a minőségi paramétereket a gazdasági szempontok figyelembevételével szétosztani.

IRODALOM

[1] *Géher K.:* Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.

[2] *Géher, K.:* Theory of Network Tolerances. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.

[3] *P. Papantoni—Kazakos:* Bayes Estimation with Asymmetrical Cost Functions. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, January, 1975. pp. 93—95.

[4] *Broome, P. W.—Young, F. J.:* The Selection of Circuit Components for Optimum Circuit Reproducibility. IRE Trans. on C. T. March, 1962. pp. 18—23.

[5] *Ralston, A.:* Bevezetés a nnmerikusan alízisbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.