

Immittancia számítása topológiai formulával

ETO 519.54:621.372.5.049.61

Lineáris hálózatok bemeneti immittanciájának számolása elvi és gyakorlati szempontból megoldottnak tekinthető, e számítások lényegében véve a klasszikus hálózatanalízis módszereiből adódnak [1]. Ilyen hálózatok számítógépes tervezése azonban e már lezártnak tekinthető módszerek felülvizsgálását, kiegészítését, illetve új módszerek kidolgozását teszi szükségessé. Így napjainkban sokszor lehetővé és célszerűvé válik egy összetettebb tervezési probléma konkrét megoldásánál a hálózat operátoros immittanciáját is topológiai formulák felhasználásával számolni [6].

Topológiai formulák alkalmazását részben azok könnyen programozhatósága, részben pedig „bonyolultabb hálózatok” esetén betűgyűthetős függvénykapcsolatok számítógépen való felírása teszi célszerűvé [3]. A mechanikus munkák tetemes megnövekedése számítógép alkalmazásánál számos esetben nem jelent problémát, mert a többletmunka árán (amelyet a számítógép „végez” el) gyakran lehetővé válik elvileg és számítástechnikailag igen bonyolult matematikai módszer felhasználásának elkerülése.

Az eddig elmondottakból az tűnne ki, hogy a topológiai formulák alkalmazása számítógépes felhasználásánál előnyös, tehát például „kézi számolásra” nem alkalmas. Ez azonban távolról sem így igaz. E cikkben bemutatunk egy eljárást, amelynek felhasználásával RCL-hálózat operátoros immittanciája topológiai módszerrel számolható, és konkrét példát adunk rá, hogy e módszer még „kézi számolásra” is legalább olyan alkalmas, mint a klasszikus eljárások.

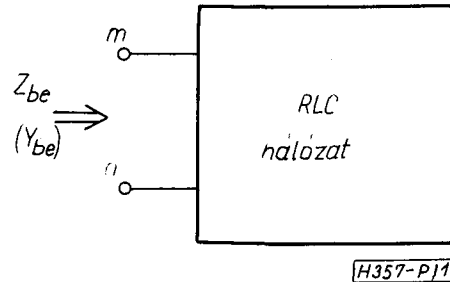
Topológiai formula immittancia előállításához

Mint ismeretes [5], RCL kétkapu hálózat transzfer impedanciája írható a következő formában:

$$Z_T = \frac{Z'_T}{I_T}, \quad (1)$$

ahol (1) számlálója a hálózatgráf be- és kimeneti pontjait szétválasztó (előjeles) 2-fák, nevezője pedig a hálózatgráf fái szerint képzett (operátoros) éladmittanciák szorzatösszege. Speciálisan, ha a be- és a kimeneti pontpárok egybeesnek (1), formula megadja a tekintett hálózat (operátoros) bemeneti impedanciáját:

$$Z_{be} = \frac{Z'_T}{I_T}. \quad (2)$$



1. ábra

illetve (operátoros) bemeneti admittanciáját:

$$Y_{be} = \frac{I_T}{Z'_T}, \quad (3)$$

(2) és (3) formula számlálójának és nevezőjének részletes felírásához tekintsük az 1. ábrán látható hálózat rajzát, ahol a hálózat bemeneti pontjai m , illetve n számozást nyerték. [3] figyelembevételével írhatjuk:

$$I_T = \sum_{\forall F} \left(\pi_{(i,j) \in F} Y_{ij} \right) \quad \text{és} \quad (4)$$

$$Z'_T = \sum_{\forall^2 F} \left(\pi_{(i,j) \in^2 F} \right) Y_{ij}. \quad (5)$$

(4) és (5)-ben F a hálózatgráf fája, F^2 a bemeneti pontokat szétválasztó 2-fája, Y_{ij} pedig a kapcsolat i . és j . számozású pontja közötti áramkört elem (operátoros) admittanciája. (Most az összes 2-fa előjele nyilvánvalóan pozitív).

A következőkben (2) és (3) formulák felhasználását tárgyaljuk a gráfelméleti fa előállítás módszer [4] alkalmazásával. (2) és (3) formulákban szereplő részgráfok generálása lényegében elintézett (fa és 2-fa generálások, lásd [4]). Vissza lehetne vezetni a 2-fa generálást is fa generálásra, mégpedig oly módon hogy az m . és az n . pont között egy ún. „ál-hálózati” elemet veszünk fel. Ezután tekintjük a hálózatgráf összes olyan fáját, mely tartalmazza az új elemnek megfelelő élet. Ezekből az „ál-hálózati” elemnek megfelelő élet törölve, éppen (2) számlálójában, illetve (3) nevezőjében szereplő részgráfok állanak elő.

Lehetséges azonban a szóban forgó topológiai formulákkal való számítástechnikai szempontból célszerűbb eljárást kidolgozni. Ehhez jelöljük G -vel a tekintett hálózat gráfját, M_G -vel pedig a hálózatgráf módosított adjacencia mátrixát. A hálózatgráf fák most célszerű $\nu(\mu^{-1}(M_n))$ alakban keresni. A fák előállítása közben a szükséges teljes ciklusvizsgálatokat érdemes úgy szervezni, hogy azokkal együtt (2) számlálójában, ill. (3) nevezőjében előforduló $F_{n,n}^2$ 2-fák is „előadódjanak”.

E célból tekintsük M_G -ből képezhető, a hálózatgráf fáji előállításához szóba jöhető összes $(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, 0)$ alakú soros reprezentációkat, ahol s_i az $1, 2, \dots, n$ természetes számok valamelyike $(i=1, \dots, n-1)$. Soroljuk osztályokba e soros reprezentációkat. Két soros reprezentáció kerüljön ugyanabba az osztályba, ha az m -edik elemükben megegyeznek. Nyilván az így definiált osztályozás egyértelmű, az osztályok maximális száma n , továbbá az egyes osztályok elemeinek száma azonos. Az így definiált osztályok bármelyike felhasználható a 2-fák előállítására, nem kell mást tennünk csupán, mint egy osztály elemeiben az $s_m=0$ helyettesítést elvégeznünk, és a 2-fák felkutatásához szükséges teljes ciklusvizsgálatot az így módosított soros reprezentációkon végrehajtunk.

Lehetőség nyílik a teljes ciklusvizsgálat olyan szervezésére is, hogy a soros reprezentációkon végighaladva egyetlen vizsgálatssorozat kiadja a fákat is és a 2-fákat is. Evégből az osztályokba sorolt reprezentációkon az egyik osztály elemein (pl. az első osztályán) „tüzetesebb” teljes ciklusvizsgálatot végzünk. Ez a következőképpen történik:

Legyen az egyik (első) osztály egy eleme $(s_1, \dots, s_m, \dots, 0)$. Ha a reprezentáción végrehajtott teljes ciklusvizsgálat véges kimenetelű, akkor az a hálózatgráf egy fáját reprezentálja, továbbá nyilván az $(s_1, \dots, s_{m-1}, 0, s_{m+1}, \dots, 0)$ egy alkalmas 2-fa soros reprezentációja.

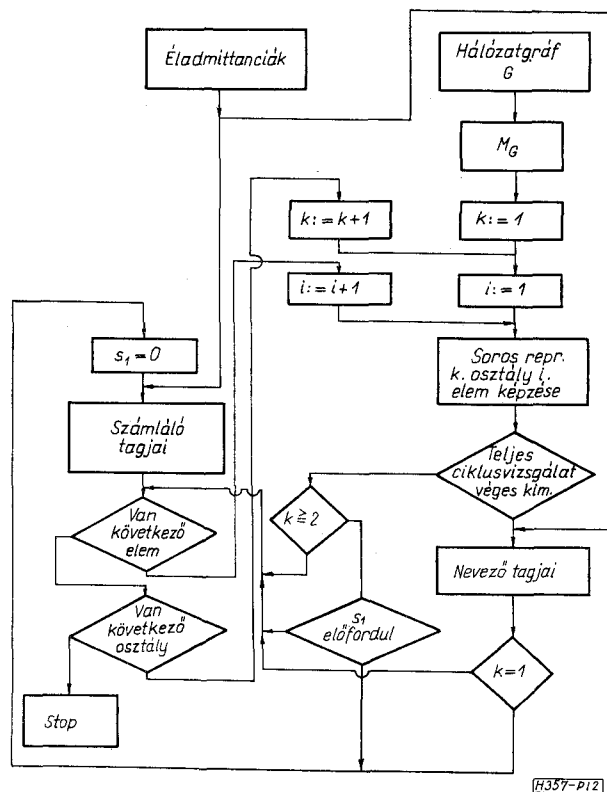
Ha a teljes ciklusvizsgálat kimenetele nem véges, akkor a szóban forgó soros reprezentáció nem állít elő fát, de 2-fát még nyerhetünk belőle. Evégből csak azt kell megfigyelnünk, hogy a nem véges kimenetelű ciklusvizsgálatokban az s_m elem előfordul-e. Ha igen, úgy a soros reprezentáció „módosítása” (ti. $s_m=0$ helyettesítéssel nyert soros reprezentáció) éppen egy alkalmas 2-fát jelöl.

A többi osztály elemein ezután a szokásos teljes ciklusvizsgálatot hajtjuk végre a fák előállítása céljából, mert a korábban elmondottak alapján az összes $F_{m,n}^2$ típusú 2-fa már az elsőnek tekintett osztály elemeinek „átvizsgálása” során előállt.

Természetesen az így szervezett „tüzetesebb” teljes ciklusvizsgálat a fa előállítási folyamatot lelassítja; ez az ára annak, hogy a 2-fa előállítást a fa előállítással összevontuk.

A szükséges részgráfok előállítása után az éleknek megfelelő paraméterértékek behelyettesítése következik, amelynek eredményeként előállnak a (2), ill. (3) formulák számlálói, ill. nevezőinek tagjai.

A 2. ábrán láthatunk egy, számítógépi program készítésére is alkalmas blokkvázlatot kétpólus impedancia előállításához. A blokkvázlatból kitűnik, amit már korábban is jeleztünk, hogy ilyen feladatok megoldásához a soros reprezentációkat általában nem természetes sorrendben célszerű képezni (amint azt a [4] módszernél láttuk), hanem osztályokba sorolva. A blokkvéma feltüntet két „számláló regisztert” is; az egyik (a k paraméterrel) az osztályokat, a másik (az i paraméterrel) pedig a k -edik osztályba sorolt reprezentációkat számolja. Megjegyezzük azonban, ha a kapcsolatban élünk az $m=1$ választással ami az általánosság megsértése nélkül megtehető, úgy az



2. ábra

osztályokba sorolás lehetséges a soros reprezentációk természetes sorrendben való felsorolásával.

Példa

Tekintsük a 3. ábrán látható ohmos ellenállással lezárt, kettős T kapcsolást, és feladatul tűzzük ki a bemeneti impedancia számítását.

Az ábrán a kapcsolási pontokat úgy számoztuk, hogy most $m=1, n=5$ teljesüljenek. A kapcsolatban szereplő paraméterértékeket relatív egységekben az áramköri elemek közelében tüntettük fel.

A 3. ábrából az M_G módosított adjacencia mátrix közvetlenül felírható:

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

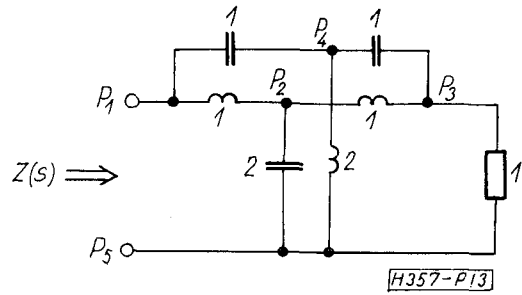
Az 1. táblázaton feltüntettük, az $s_3=0$ választással, a ciklusvizsgálatok számára szóba jöhető soros reprezentációkat, amelyeket (6)-ból képeztünk. A korábban tett megjegyzés értelmében a soros reprezentációk felírásánál a természetes sorrendet tarthattuk be.

A soros reprezentációk közül eleve kihagytuk azokat, amelyek biztosan nem szolgáltatnak alkalmas fát, ill. 2-fát. Ilyenek az 1. osztályban azok a soros reprezentációk, amelyekben sem az 5-ös, sem az 1-es szám nem fordul elő, továbbá a 2. osztályban azok a

1. táblázat

| k | i | Soros reprezentáció | Fa | 2-fa | Számoló tagja | | Együtth. | foksz. | |
|----|-------|---------------------|-------|------|---------------|--------|----------|--------|----|
| | | | | | Együtth. | foksz. | | | |
| 1 | 1 | 21210 | | + | 1 | -1 | | | |
| | 2 | 21230 | | + | 1 | -1 | | | |
| | 3 | 21250 | | + | 1/2 | -3 | | | |
| | 4 | 21410 | | + | 1 | 1 | | | |
| | 5 | 21430 | | | | | | | |
| | 6 | 21450 | | + | 1/2 | -1 | | | |
| | 7 | 21510 | | + | 1 | 0 | | | |
| | 8 | 21530 | | + | 1 | 1 | | | |
| | 9 | 21550 | | + | 1/2 | -2 | | | |
| | 10 | 23210 | | | | | | | |
| | 12 | 23250 | | | | | | | |
| | 13 | 23410 | | + | 1 | 1 | | | |
| | 15 | 23450 | + | + | 1/2 | -1 | 1/2 | -2 | |
| | 16 | 23510 | + | + | 1 | 0 | 1 | -2 | |
| | 17 | 23530 | + | + | 1 | 0 | 1 | -1 | |
| | 18 | 23550 | + | + | 1/2 | -2 | 1/2 | -3 | |
| | 19 | 25210 | + | + | 2 | 1 | 2 | 0 | |
| | 20 | 25230 | + | + | 2 | 1 | 2 | 0 | |
| | 21 | 25250 | + | + | 1 | -1 | 1 | -2 | |
| | 22 | 25410 | + | + | 2 | 3 | 2 | 2 | |
| | 23 | 25430 | | | | | | | |
| | 24 | 25450 | + | + | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| | 25 | 25510 | + | + | 2 | 2 | 2 | 1 | |
| | 26 | 25530 | + | + | 2 | 2 | 2 | 1 | |
| | 27 | 25550 | + | + | 1 | 0 | 1 | -1 | |
| | 2 | 3 | 41250 | + | | | | 1/2 | -2 |
| | | 6 | 41450 | + | | | | 1/2 | 0 |
| 7 | | 41510 | | | | | | | |
| 8 | | 41530 | + | | | | 1 | 1 | |
| 9 | | 41550 | + | | | | 1/2 | -1 | |
| 12 | | 43250 | | | | | | | |
| 15 | | 43450 | + | | | | 1/2 | 0 | |
| 16 | | 43510 | | | | | | | |
| 17 | | 43530 | + | | | | 1 | 1 | |
| 18 | | 43550 | + | | | | 1/2 | -1 | |
| 19 | | 45210 | | | | | | | |
| 20 | | 45230 | + | | | | 2 | 2 | |
| 21 | | 45250 | + | | | | 1 | 0 | |
| 22 | | 45410 | | | | | | | |
| 23 | 45430 | | | | | | | | |
| 24 | 45450 | + | | | | 1 | 2 | | |
| 25 | 45510 | | | | | | | | |
| 26 | 45530 | + | | | | 2 | 3 | | |
| 27 | 45550 | + | | | | 1 | 1 | | |

soros reprezentációk, amelyekben az 5-ös nem fordul elő. Az 54 lehetséges reprezentáció közül így eleve kimaradt 10 soros reprezentáció. Különben a soros reprezentációkat számoztuk („i” paraméter); a kihagyott soros reprezentációk sorszáma hiányzik. A táblázatban összesen 44 soros reprezentáció szerepel, 2 osztályba sorolva. A szükséges ciklusvizsgálatokat elvégezve közvetlenül a soros reprezentációkon a fának megfelelőket „+” jellel jelöltük meg. Minkét osztályban 12 fának megfelelő soros reprezentációt találtunk, amelyek közül az 1. osztályban kerültek egyben $s_1=0$ helyettesítéssel 2-fának is megfelelnek. Az első osztály elemei közül még 9 esetben találtunk 2-fának megfelelő soros reprezentációt. A táblázat két utolsó oszlopában feltüntettük a talált fa, ill. 2-fának megfelelő éladmittancia szorzatokat. E szorzatok szolgáltatják a bemeneti impedancia számlálójának, ill. nevezőjének tagjait.



3. ábra

2. táblázat

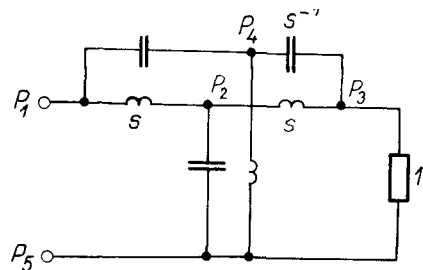
| A soros reprezentáció | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-----|----------|----------|------|----------|-----|---|-----|-----|----------------------|
| 1. | 2. | 3. | 4. | | | | | | | |
| helyén található | | | | | | | | | | |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 5 | 1 | 3 | 5 |
| számjel megfelel az | | | | | | | | | | |
| s^{-1} | s | s^{-1} | s^{-1} | $2s$ | s^{-1} | s | 1 | s | s | $\frac{1}{2} s^{-1}$ |
| szorzótényezőnek | | | | | | | | | | |

A megfelelő éladmittanciák helyettesítését megkönnyíti a 3. ábráról tett következő közvetlen megfigyelés a 2. táblázat szerint.

Végül a számláló és a nevező azonos fokszámú tagjainak összevonása, valamint a tört $2s^3$ -vel történő bővítése után nyerjük a bemeneti impedancia képletét:

$$Z(s) = \frac{4s^6 + 8s^5 + 14s^4 + 10s^3 + 8s^2 + 2s + 1}{4s^6 + 10s^5 + 14s^4 + 14s^3 + 8s^2 + 4s + 1}$$

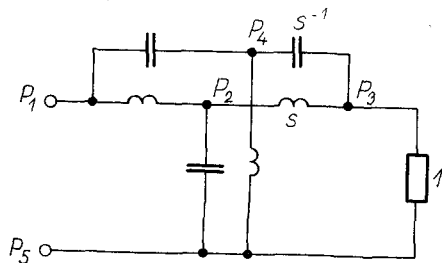
Megjegyezzük, hogy a számolást más módon elvégezve akár a csomóponti potenciálok módszerével. [2] akár elemi úton, pl. kétszeres delta-csillag átalakítással [2], akár szimmetrikus négy-pólus paraméterek meghatározásával [1], a számítási munka annyira tetemes, hogy a topológiai formulával történő „kézi



Soros reprezentáció: (23530)
Megfelelő nevező tag: $s^{-1} \cdot s^{-1} \cdot 1 \cdot s = s^{-1}$

H357-P14

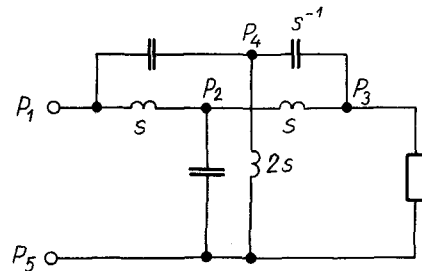
4. ábra



Soros reprezentáció: (03530)
Megfelelő számláló tag: $s \cdot 1 \cdot s^{-1} = 1$

H357-P15

5. ábra



Soros reprezentáció: (01250)
Megfelelő nevező tag:

$$s^{-1} \cdot s^{-1} \cdot \frac{1}{2} s^{-1} = \frac{1}{2} s^{-3}$$

H357-P16

6. ábra

számítás nehézsége” is vitatható. Bonyolultabb hálózatoknál gépi számolásra pedig a kidolgozott módszer igen elegendő.

A topológiai módszerrel történő számolás után illusztrációként kirajzolunk egy talált fát és két 2-fát, az egyszerűség kedvéért mindjárt az eredeti kapcsolási rajzon.

A 4. ábrán láthatjuk a táblázat $k=1$, $i=17$ jelű (23 530) soros reprezentációnak megfelelő fát, mégpedig úgy, hogy mindjárt ellenőrizhető hogy e fa a (2) formula nevezőjében éppen egy „s” értékű tagot eredményez.

Ugyanez a soros reprezentáció $s_1=0$ helyettesítéssel 2-fát szolgáltat ($k=1$), mégpedig egyik komponens izolált pont. A 2-fát és a megfelelő számlálóbéli „1” tag kiadódását az 5. ábrán szemlélhetjük.

A 6. ábrán viszont a $k=1$, $i=3$ jelű (01250) soros reprezentációnak megfelelő 2-fát rajzoltuk ki, annak

a feltüntetésével, hogy e talált 2-fa a számlálóba egy $1/2 s^{-3}$ tagot eredményez. E reprezentáció „átvizsgálása” nem eredményezett fát.

I R O D A L O M

- [1] Géher, K.: Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [2] Vágó, I.: Villamosságtan II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- [3] Pávó, I.: RLC-hálózatok transzfer impedancia függvényének felírása digitális számológépen. Mérés és Automatika, XVII. évfolyam, 1969. 4. szám.
- [4] Pávó, I.: Generation of the k-Trees of a Graph. Acta Cybernetica, Tom. 1., Fasc. 2, Szeged, 1971.
- [5] Pávó, I.: Hálózatérzékenység meghatározás topológiai formulával. Híradástechnika, XXIII. évf., 5. szám, 1972. május.
- [6] Pávó, I.: Lineáris hálózatok tervezése topológiai formulával, Kandidátusi értekezés, 1973.