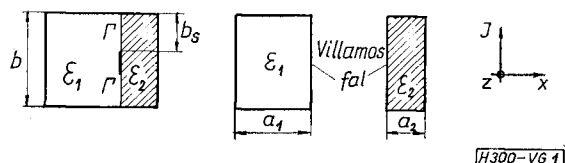


DR. VESZÉLY GYULA
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

A résztartományok módszere bonyolult keresztmetszetű csőtápvonalak analízisére

ETO 519.3:621.372.826

A résztápvonalak módszere a bonyolult keresztmetszetű és kitöltésű csőtápvonal egyszerűbb részekre darabolásából indul ki. A részeket a vágási vonal mentén villamos fallal lezárva nyerjük a résztápvonalakat (1. ábra). Feltételezzük, hogy a résztápvonalak kontúrgörbéje olyan ortogonális koordináta-rendszer koordinátavonala, amelyben a Helmholtz-egyenlet szeparálható.



1. ábra. Az eredeti tápvonal és a résztápvonalak. Adatok a numerikus számításhoz: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 8,875$, $a_2/a_1 = 1/9$, $a_2/h = 0,1$

A résztápvonalak módusaiból az alábbi gondolatmenet szerint nyerhetjük az eredeti feladat elektromágneses terét.

Válasszuk ismeretlenek a Γ apertúrán az apertúra vonalához tangenciális E_t transzverzális és E_z longitudinális villamos teret. Határozzuk meg az ezen villamos terek által a résztápvonalakban gerjesztett mágneses teret. Az ismeretlen villamos térerősségek meghatározására szolgáló egyenletrendszert úgy nyerjük, hogy megköveteljük a résztápvonal mágneses terek tangenciális komponensének folytonosságát az apertúrán:

$$[H_t^1(E_t, E_z) + H_t^2(E_t, E_z)]_{ap} = 0, \quad (1)$$

$$[H_z^1(E_t, E_z) + H_z^2(E_t, E_z)]_{ap} = 0. \quad (2)$$

(A folytonosságot összeg fejezi ki, mert a két oldalon gerjesztett mágneses tér ellenkező irányú.)

Ha a gerjesztő villamos tereket ismert alakú, ismeretlen együtthatójú függvények formájában vesszük fel, akkor (1) és (2) homogén lineáris egyenletrendszert

ad. Determinánsát nullává téve nyerjük az ismeretlen fázistényező meghatározására szolgáló egyenletet, majd a kiszámított fázistényezőhöz tartozó apertúra villamos tér is számítható az egyenletrendszerből.

A fent vázolt gondolatmenet az alábbiak szerint önthető matematikai formába.

Fejtsük sorba az apertúra teret egy-egy ortonormált teljes függvényrendszer szerint:

$$E_t = \sum_{k=0}^{\infty} V_k e_k(x_2), \quad (3)$$

$$E_z = \sum_{k=1}^{\infty} W_k \varphi_k(x_2). \quad (4)$$

Jelölje x_2 az apertúra irányú koordinátát. Az apertúra villamos tere által gerjesztett mágneses tér felírható a résztápvonalak Green-függvénye segítségével

$$iH_z^i(x_2) = \int_{\Gamma} G_{11}^i(x_2, x_2') E_t(x_2') dx_2' + \int_{\Gamma} G_{12}^i(x_2, x_2') E_z(x_2') dx_2', \quad (5)$$

$$H_t^i(x_2) = \int_{\Gamma} G_{21}^i(x_2, x_2') E_t(x_2') dx_2' + \int_{\Gamma} G_{22}^i(x_2, x_2') E_z(x_2') dx_2', \quad (6)$$

ahol $i = 1, 2$ a résztápvonal indexe.

A határfeltételek kielégítésénél azzal a nehézséggel találkozunk, hogy (5) és (6) minden x_2 -re előállítja a mágneses teret, míg az (1)–(2) határfeltételnek csak az apertúrán kell kielégülni. Az irodalomban szokásos eljárás az, hogy megköveteljük az

$$\int_{\Gamma} f_k(x_2) (H_t^1 + H_t^2) dx_2 = 0, \quad (7)$$

$$\int_{\Gamma} g_k(x_2) (H_z^1 + H_z^2) dx_2 = 0 \quad (8)$$

egyenletek teljesülését az f_k, g_k apertúrán értelmezett ortogonális teljes függvényrendszer minden elemére, az ún. vizsgáló függvényekre. A résztápvonal módszer variációs tárgyalásánál [1] adódó eredmény értelmezéséből következik, hogy esetünkben $f_k \equiv \varphi_k, g_k \equiv e_k$, ahol a jobb oldali mennyiségek a (3)–(4) egyenletekben szereplő sorfejtő függvények. Ezt felhasználva, valamint (5) és (6) kifejezését (7)-be és (8)-ba helyettesítve kapjuk

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} \varphi_k(x_2) \left[\int_{\Gamma} G_{11}^i(x_2, x_2') E_i(x_2') dx_2' + \int_{\Gamma} G_{12}^i(x_2, x_2') E_z(x_2') dx_2' \right] dx_2 = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} e_k(x_2) \left[\int_{\Gamma} G_{21}^i(x_2, x_2') E_i(x_2') dx_2' + \int_{\Gamma} G_{22}^i(x_2, x_2') E_z(x_2') dx_2' \right] dx_2 = 0. \quad (10)$$

(9)-nek és (10)-nek minden vizsgáló függvényre való előírása a határfeltételek pontos kielégítését eredményezné. A gyakorlatban véges sok vizsgáló függvényre követeljük meg (9) és (10) teljesülését és ekkor a határfeltételek kielégítése is közelítő.

Ha (9)-be és (10)-be helyettesítjük E_i és E_z sorát homogén lineáris egyenletrendszert kapunk. Ennek determinánsát nullával egyenlővé téve nyerjük a keresett fázistényezőt.

Vizsgáljuk az 1. ábrán látható szalagvonalat. Vegyük fel a (3)–(4) sorfejtést az alábbi alakban

$$E_i = \sum_k V_k \cos \frac{k\pi}{2b_s} y, \quad (11)$$

$$E_z = \sum_k W_k \sin \frac{k\pi}{2b_s} y, \quad (12)$$

ahol $k=1, 3, 5, \dots$

Felhasználva (11), (12)-t, valamint a Green-függvények résztápvonal módusok szerinti sorát (9) és (10) az alábbi eredményt adja:

$$\sum_{i=1}^2 \left(\tilde{\mathbf{P}} \langle k_0^2 \epsilon_i - \beta^2 \rangle \mathbf{G}^i \mathbf{P} \mathbf{V} - \beta \tilde{\mathbf{P}} \left\langle \frac{n\pi}{b} \right\rangle \mathbf{G}^i \mathbf{Q} \mathbf{W} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\beta \tilde{\mathbf{Q}} \left\langle \frac{n\pi}{b} \right\rangle \mathbf{G}^i \mathbf{P} \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{Q}} \left\langle \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k_0^2 \epsilon_i \right\rangle \mathbf{G}^i \mathbf{Q} \mathbf{W} \right) = 0, \quad (14)$$

ahol $\mathbf{G}^i = \langle k_0^2 \epsilon_i - \beta^2 - k_i^2 \rangle^{-1} = \langle (k_0^2 \epsilon_i - \beta^2 - k_i^2) \rangle^{-1}$,

\mathbf{V} és \mathbf{W} a (11) és (12) együtthatóiból képezett oszlopvektor, n a résztápvonalmódus második indexe, k_0 a szabadterei fázistényező, β a keresett fázistényező.

A \mathbf{P} és \mathbf{Q} mátrixok elemei:

$$P_{nk} = 2 \int_0^{b_s} \cos \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{k\pi}{2b_s} y dy, \quad (15)$$

$$Q_{nk} = 2 \int_0^{b_s} \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{k\pi}{2b_s} y dy. \quad (16)$$

A (13)–(14) rendszer determinánsát a perturbáció elméletben Weinstein-determinánsnak [2, 3] nevezik. Ha a szalag teljesen lefedi a dielektrikum felületét ($b_s=0$), akkor a perturbálatlan Helmholtz-egyenlet sajátértékei a résztápvonal módusokat adják. Igen szerencsés a fenti formalizmus abból a szempontból, hogy a legerősebb perturbációnak megfelelő szalag nélküli esetre ($b_s=b/2$) is egzakt eredményhez vezet. [(15) és (16) ilyenkor $b/4 \cdot \delta_{nk}$ eredményt ad és a determinánsból csak a főátló és a két mellékátló marad meg, amiből az LSE- és LSM-módusok diszperziós egyenlete kiadódik].

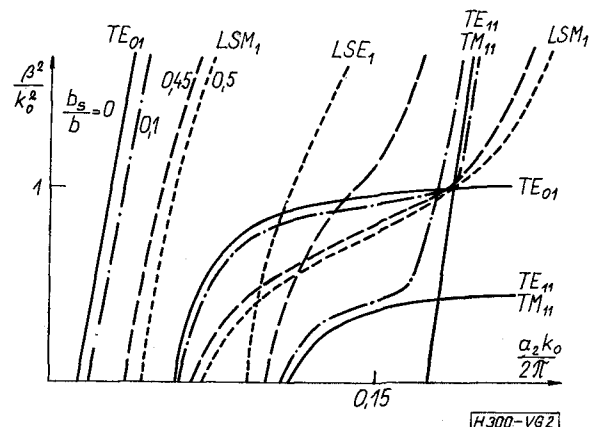
Kézenfekvő a fentiek alapján az a feltevés, hogy a szalagvonal módusok diszperziós görbéi kis b_s esetén a résztápvonal diszperziós görbékhez, kis $0,5b-b_s$ esetén pedig az LSE és LSM diszperziós görbékhez közel helyezkednek el. Továbbá azt várjuk, hogy ha b_s folytonosan változik 0 és $b/2$ között, akkor egy-egy szalagvonal diszperziós görbe a fenti görbék között mozog.

A determináns számítógépes kiértékelése alátámasztja a fenti hipotézist.

A kiértékelést páratlan indexű résztápvonalmódusokra végeztük $n=15$ -ig, a felületi tér sorában $k=1, 3, 5, 7$, egyéb adatok az 1. ábrán. A b_s/b viszonyt 0,45; 0,3 és 0,1 értékűnek választottuk. A 2. ábrán bemutatjuk a legalacsonyabb határfrekvenciájú módusokat.

Az ábrán az áttekinthetőség érdekében csak az $n=1$ indexű módusokat rajzoltuk meg. Látható, hogy az olyan módus görbéjéhez, amelynek mindkét indexe nullától különböző (TE_{11}) két szalagvonal diszperziós görbe is tart annak megfelelően, hogy $b_s=0$ esetén két egybeeső sajátértéke van.

Nem szoltunk eddig a kvázi TEM-módusról, ami a fenti szemléletes képbe nem illeszhető bele. (Ez a módus mind $b_s=0$ -nál, mind $b_s=b/2$ -nél eltűnik, nem létezik a tápvonalban.) A (13)–(14) rendszer determinánsának gyökei között a qTEM terjedési tényezőjét is megkaptuk. Felhasználva azonban a qTEM longitudinális terének kicsiny voltát egy igen egyszerű diszperziós egyenletet nyerhetünk. $E_z=0$ -ból $\mathbf{Q}=0$ következik, vagyis a determinánsból csak a bal felső blokk marad meg. Ez $E_i|_{\Gamma} = \text{konst}$ esetén csu-



2. ábra. A szalagvonal diszperziós görbék különféle b_s/b értékek esetén. A többi adatot 1. az 1. ábrán

pán az $n=1$ indexű résztápvonalakat figyelembe véve az alábbi eredményt adja:

$$\frac{k_0^2 \varepsilon_1 - \beta^2}{k_{x1}} \operatorname{cth} a_1 k_{x1} + \frac{k_0^2 \varepsilon_2 - \beta^2}{k_{x2}} \operatorname{cth} a_2 k_{x2} = 0, \quad (17)$$

ahol $k_{xi} = \sqrt{-k_0^2 \varepsilon_i + \beta^2 + (\pi/b)^2}$, $i=1, 2$.

Ha $k_0^2 \varepsilon_2 > \beta^2 > k_0^2 \varepsilon_2 - (\pi/b)^2 = \beta_{\text{TE}_{0i}^{\varepsilon_2}}^2$, akkor (17)

második tagja 0 és ∞ között minden értéket felvesz, míg az első tagja véges negatív szám. A

$$\beta_{\text{TE}_{0i}^{\varepsilon_2}}^2 < \beta^2 < k_0^2 \varepsilon_2 \quad (18)$$

intervallumban tehát (17)-nek biztosan van gyöke. Ez a qTEM fázistényezője, mivel közel megegyezik az ε_2 dielektrikumiban mérhető fázistényezővel.

I R O D A L O M

- [1] Veszely Gy.: The method of sub-waveguides for analyzing waveguides of complicated cross-section. Proc. of the Fifth Colloquium on Microwave Communication. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.
- [2] Gould, S. H.: Variational methods for eigenvalue problems. University of Toronto Press, 1966.
- [3] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, 1966.