DR. BOLGÁRFALVI KÁROLY
Távközlési Kutató Intézet

Irracionális távvezeték-hálózatok
II. rész: Szintézis

ETO 621.372.5

Most rátérünk az irracionális hálózatok szintézisének problémájára. Mindenekelőtt meg kell említenünk azt, hogy a racionális távvezeték-hálózatok analízise és szintézise megoldottnak tekinthető, ellenben irracionális hálózatok esetén a szintéziseljárás általános alakban nincs kifejlesztve. Csak néhány egyszerűbb speciális hálózat esetén tudjuk elvégezni a szintéziseljárást.

A következőkben először is ismertetjük az irracionális hálózatokra vonatkozó realizálhatósági feltételeket. Ezután két problémát tárgyalunk: 1. hogyan lehet racionális hálózatmátrixot irracionális elemek segítségével szintetizálni és 2. az irracionális hálózatmátrix hogyan szintetizálható. Az utóbbi probléma megoldása általában természetesen nem ismeretes, csak néhány egyszerűbb speciális esetet tárgyalunk.

1. Az irracionális hálózatokra vonatkozó realizálhatósági megfontolások

A korábbi tárgyalásokból kitűnik, hogy a távvezeték-hálózatok mátrixai (egykapu esetén hálózatfüggvényei) a λ-nak lehetnek racionális és $(1-\lambda^2)^{1/2}$ irracionális tényezőt tartalmazó irracionális függvényei.

Racionális hálózat immittanciamátrixa racionális. Ebben az esetben, mint ismeretes, a realizálhatóság feltétele az, hogy az immittanciamátrix pozitív reális legyen. Ha a hálózat ezenkívül veszteségmentes, akkor ideális konnektorral és reaktanciákkal realizálható. Ebben az esetben definiálható a hálózat bonyolultsági foka, mint az előállításához szükséges reaktanciák minimális száma. Továbbá a minimális számú reaktanciát tartalmazó hálózatot elemszámra nézve kanonikusnak nevezhetjük.

Irracionális hálózat esetén a realizálhatóság feltételét nem olyan egyszerű meghatározni. Így a következőkben csak speciális hálózatosztályokra adjuk meg a realizálhatósági feltételeket. Ezekből kitűnik, hogy a realizálhatóság feltétele az immittanciamátrix „pozitív" volta.

1.1. *Irracionális veszteségmentes passzív egykapu realizálhatósági feltételei*

Az irracionális veszteségmentes egykapu immittanciájának a következő feltételeket kell kielégítenie [1]:

1 Az immittancia olyan páratlan függvény, mely a λ képzetes tengelyén képzetes értéket vesz fel.
2. A λ jobb oldali félsíkján pozitív valós résszel rendelkezik.
3. A λ-sík képzetes tengelyén pozitív deriválttal rendelkezik.
4. Nincs sem zérushelye, sem pólusa a λ jobb oldali félsíkjában, kivéve a $\lambda=1$ értéket.
5. A λ-sík képzetes tengelyén levő pólusok és zérushelyek egyszerűek és a pólusok pozitív reziduummal rendelkeznek.

Az ezen feltételeket kielégítő immittanciákat „pozitívnak" fogjuk nevezni.

Tehát látható, hogy amíg a racionális egykapu immittanciája pozitív reális függvény, addig az irracionális egykapu immittanciája csak „pozitív" függvény. Az irracionális egykapu immittanciája a pozitív valós tengelyen nem lesz valós, hanem valós részű komplex értéket is felvehet. Meg kell említeni még az irracionális immittanciák azon speciális tulajdonságát, hogy értékük a λ-val nem egyértelmű, hanem függ a γl értékétől.

1.2. *Normál kétkapuk realizálhatósági feltételei*

Normál kétkapunak nevezzük azon hálózatokat, melyek transzfer immittanciája $W_{12}(\lambda)=(1-\lambda^2)^{\nu/2}f(\lambda)/g(\lambda)$ alakú, ahol ν pozitív egész vagy zérus és $f(\lambda)$ és $g(\lambda)$ valós együtthatójú (ún. reális) polinom. Könnyű belátni, hogy a normál kétkapuk páratlan ν esetén irracionális hálózatok lesznek.

Könnyű azt is kimutatni, hogy nagyon sok gyakorlatilag fontos kétkapu tartozik a normál kétkapuk sorába. Például a láncba kapcsolt racionális kétkapukat és egységelemeket tartalmazó hálózat normál kétkapu lesz.

Meghatározzuk a normál kétkapu immittanciamátrixának fizikai realizálhatóságára vonatkozó szükséges feltételeket. E célból definiáljuk az immittanciamátrixból a valós x és y változókkal képzett kvadratikus alakot:

$$Q(x_1, y)=x^2W_{11}+2xyW_{12}+y^2W_{22} \tag{1}$$

A kauzalitásból következik, hogy Q analitikus, a passzivitásból pedig következik, hogy $\mathrm{Re}(Q)\geq 0$ a p sík jobb oldali félsíkján.

Ismeretes, hogy a λ jobb oldali félsíkja összeesik a p jobb oldali félsíkjával, kivéve a $\lambda=1$ értéket. Tehát innen következik:

1. Q analitikus a $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ esetén, kivéve a $\lambda=1$ értéket;
2. $\mathrm{Re}(Q)\geq 0$, ha $\mathrm{Re}(\lambda)>0$.

Az 1. feltételből következik, hogy az immittanciamátrix analitikus a λ-sík jobb oldali félsíkjában,

Beérkezett: 1974. VIII. 16.

kivéve a $\lambda=1$ értéket, a 2. feltétel ekvivalens az immittanciamátrix pozitív voltával. Tehát a fizikai realizálhatóság feltételei:

1. $W_{ij}(\lambda)$ analitikus a λ jobb oldali félsíkjában;
2. $\mathrm{Re}(W_{11})\geq 0$; $\mathrm{Re}(W_{22})\geq 0$ és $\mathrm{Re}(W_{11})\mathrm{Re}(W_{22})-[\mathrm{Re}(W_{12})]^2\geq 0$ ha $\mathrm{Re}(\lambda)>0$.

Az ezen feltételeknek eleget tevő mátrixokat pozitívnak nevezzük. Kimutatható, hogy a pozitív függvények inverze szintén pozitív függvény.

Mivel W_{11} és W_{22} a λ pozitív függvénye kell, hogy legyen, ezért a W_{12}-nek nem lehet pólusa a λ jobb oldali félsíkjában (kivéve a $\lambda=1$ értéket). Innen következik, hogy W_{12}-nek analitikusnak kell lennie a λ jobb oldali félsíkjában, kivéve a $\lambda=1$ értéket, ahol elágazási pontja lehet.

A W_{ij} függvények pozitív voltából következik, hogy a W_{ij} függvényeknek a képzetes tengelyen fekvő pólusai egyszerűek és a reziduumaik valósak és kielégítik a $k_{11}k_{22}-k_{12}^2\geq 0$ feltételt.

1.3. Normál veszteségmentes kétkapuk realizálhatósági feltételei

A normál veszteségmentes kétkapuk esetén az (1) kvadratikus alak valós része eltűnik a képzetes tengelyen, vagyis írható:

$$\mathrm{Re}\; Q\;(\mathrm{j}\Omega)=0, \quad \text{ha } \lambda=\mathrm{j}\Omega. \tag{2}$$

Innen következik, hogy $W_{ij}(\lambda)$ függvény páratlan függvény kell, hogy legyen, melynek pólusai mind a képzetes tengelyen fekszenek.

Tehát annak szükséges feltétele, hogy egy adott [W]-mátrix normál veszteségmentes kétkapu immittanciamátrixa legyen, a következő:

1. W_{11} és W_{22} a λ racionális reaktancia függvénye kell, hogy legyen;
2. $W_{12}=(1-\lambda^2)^{r/2}W$, ahol W a λ páratlan, valós együtthatójú racionális függvénye;
3. A W_{12} pólusai a λ képzetes tengelyén fekszenek és egyszerűek;
4) A reziduummátrix elemei kielégítik a

$$k_{11}^{(i)}k_{22}^{(i)}-k_{12}^{(i)2}\geq 0$$

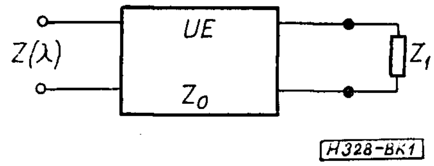
feltételt valamennyi i pólusnál.

Megjegyezzük még, hogy a normál veszteségmentes kétkapu W_{12} függvénye nem szükségszerűen 0 vagy ∞, ha $\lambda\to\infty$.

2. Racionális hálózatmátrixok realizálása irracionális hálózatelemekkel

2.1. Az egykapukra vonatkozó Richards-tétel

A Richards-tétel tulajdonképpen azt mondja ki, hogy bármely pozitív reális $Z(\lambda)$ függvény fizikailag realizálható egy $Z_1(\lambda)$ ellenállással lezárt egységelemmel, ahol $Z_t(\lambda)$ szintén pozitív reális függvény, melynek foka a $Z(\lambda)$ fokánál nem nagyobb (ld. 1. ábra).



1. ábra. A Richards-tétel ábrázolása

A $Z_1(\lambda)$ függvényre a Richards-tétel alapján írható:

$$Z_1(\lambda)=Z(1)[Z(\lambda)-\lambda Z(1)]/[Z(1)-\lambda Z(\lambda)] \tag{3}$$

Bevezetve a $Z(1)=Z_0$ jelölést, kapjuk

$$Z_1(\lambda)=Z_0[Z(\lambda)-\lambda Z_0]/[Z_0-\lambda Z(\lambda)] \tag{4}$$

Természetesen ugyanaz az eredmény igaz az admittanciára is. Ezért a Richards-tételt az immittanciára fogalmazzuk meg.

Richards-tétel: Adva van a $W(\lambda)$ pozitív reális immittanciafüggvény, akkor a

$$W_1(\lambda)=W(1)[W(\lambda)-\lambda W(1)]/[W(1)-\lambda W(\lambda)] \tag{5}$$

immittanciafüggvény pozitív reális és ugyanolyan fokú, mint $W(\lambda)$, kivéve a $W(1)+W(-1)=0$ esetet, amikoris a $W_1(\lambda)$ egy fokkal alacsonyabb a $W(\lambda)$-nál.

Következmény: Bármely n-edfokú reaktancia n számú egységelemből álló lánccal realizálható, melynek vége rövidre van zárva vagy szakadással van lezárva.

A Richards-tétel bizonyítása, vagyis annak bizonyítása, hogy $W_1(\lambda)$ szintén pozitív reális függvény, számos tankönyvben megtalálható, ezért itt nem vezetjük le.

2.2. A Richards-mátrix tétel

Az n kapu áramkörök szintézisénél igen hasznos a Richards-mátrix tétel, mely a következőképpen hangzik:

Richards-mátrix tétel: Ha egy nem szinguláris szimmetrikus $[Y(\lambda)]$ mátrix pozitív reális és $a_0[Y(a_0)]-\lambda[Y(\lambda)]$ bármely pozitív reális a_0 szám esetén nem szinguláris, akkor

$$[Y_R(\lambda)]=\lambda[Y(a_0)]\{\sigma_0[Y(\sigma_0)]-\lambda[Y(\lambda)]\}^{-1}\{a_0[Y(\lambda)]-\lambda[Y(a_0)]\} \tag{6}$$

szintén pozitív reális.

A Richards-tétel ezen általánosítását Bayard [2] bizonyította először. A bizonyítást a 2×2-es mátrixok esetére átnézte Saito [3].

Most a Richards-mátrix tételének két következményét ismertetjük:

1. Következmény: A (6) egyenletbeli $[Y_R(\lambda)]$ foka egyenlő vagy kisebb, mint az $[Y(\lambda)]$ foka. Ha

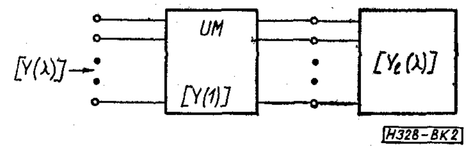
$$[Y(\sigma_0)]+[Y(-\sigma_0)]=[0_n] \tag{7}$$

akkor az $[Y_R(\lambda)]$ foka kisebb, mint az $[Y(\lambda)]$ foka.

2. Következmény: Ha $[Y(\lambda)]$ Foster-féle mátrix, akkor $[Y_R(\lambda)]$ is az és a foka n-nel kisebb, mint $[Y(\lambda)]$ foka.

2.3. A Richards-mátrix tételének alkalmazása

Most kimutatjuk, hogy ha adva van egy nem szinguláris, pozitív reális és szimmetrikus $[Y(\lambda)]$ n×n mátrix és a vele kapcsolatos $[Y(1)]$ mátrix nem szinguláris és hiperdomináns, akkor egy $[Y(1)]$ karakterisztikus admittanciamátrixú UM n vezetékes tápvonalszakasz emelhető ki láncban egy $[Y_l(\lambda)]$ mátrixú hálózattal, ahol az $[Y_l(\lambda)]$ mátrix garantáltan pozitív reális és szimmetrikus a Richards-mátrix tétele értelmében (ld. 2. ábra).



2. ábra. UM több vezetékes tápvonal kiemelése Richards-mátrix tételével

Valóban az $[Y_0]=[Y(\sigma_0)]$; $a_0=1$ jelölést bevezetve, a (6) egyenlet lesz

$$[Y_l(\lambda)]=[Y_0]\{[Y_0]-\lambda[Y(\lambda)]\}^{-1}\{[Y(\lambda)]-[Y_0]\lambda\} \qquad (8)$$

Az $[Y_l(\lambda)]$ mátrix fokára vonatkozólag a mátrix-tétel után található következmények adnak felvilágosítást.

Ha a szintézist teljesen a Richards-mátrix tétele segítségével óhajtjuk végrehajtani, akkor nehézség merül fel, ha $[Y(\lambda)]$ vagy ha $a_0[Y_0]-[Y(\lambda)]$ szinguláris. Ugyanis akkor $[Y_l(\lambda)]$ nem létezik. Azonban Oono [4] szerint létezik egy olyan n×n valós állandó nem szinguláris $[B]$ mátrix, hogy a pozitív reális r normál rangú $[W]$ mátrixra írhatjuk:

$$[W]=[B']\operatorname{diag}([W],[0_{n-r}])[B] \qquad (9)$$

ahol $[W]$ egy nem szinguláris, pozitív reális r×r mátrix és $[0_{n-r}]$ pedig egy $n-$r-ed rendű zérus mátrix. Alkalmazva ezt a tételt az r normál rangú $[Y(\lambda)]$ mátrixra, az $[Y(\lambda)]$ mátrixot olyan pozitív reális $[y(\lambda)]$ mátrixba tudjuk transzformálni, melyre a Richards-mátrix tétel már alkalmazható. Mivel $[B]$ nem szinguláris, valós és állandó, ezért interpretálható egy olyan konnektorral, melynek n−r kimeneti kapuja szakadással van lezárva és a többi kimeneti kapu az $[y(\lambda)]$ hálózathoz vezet.

Sokkal komplikáltabb a helyzet, ha $\sigma_0[Y_0]-[Y(\lambda)]$ szinguláris. Egy általánosan alkalmazható szintéziseljárást fogunk adni erre az esetre. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $[Y(\lambda)]$ nem szinguláris, pozitív reális és szimmetrikus. Először is az $[Y(\lambda)]$ origójában levő pólust kiemeljük. Ebben az esetben

$$[\hat{Y}(\lambda)]=[Y(\lambda)]-\frac{1}{\lambda}[A_0] \qquad (10)$$

pozitív reális, szimmetrikus és nincs pólusa az origóban. Itt $[A_0]$ az origónál levő nem negatív, definit residuummátrix, mely szintén szimmetrikus. Tehát, ha $a_0[Y_0]-\lambda[Y(\lambda)]$ szinguláris, akkor

$$\sigma_0[\hat{Y}(a_0)]-\lambda[\hat{Y}(\lambda)]=a_0[Y_0]-\lambda[Y(\lambda)] \qquad (11)$$

ugyancsak szinguláris. A további megfontolásból következik (ld. Newcomb [5]), hogy $[\hat{Y}(\lambda)]$ szinguláris, ha $\sigma_0[Y_0]-\lambda[Y(\lambda)]$ is szinguláris és megfordítva, $\sigma_0[Y_0]-\lambda[Y(\lambda)]$ nem szinguláris, ha $[\hat{Y}(\lambda)]$ nem szinguláris, mivel $[\hat{Y}(\lambda)]$ az origóban analitikus.

A szinguláris pozitív, reális $[\hat{Y}(\lambda)]$ mátrix egy nem szinguláris pozitív reális $[\hat{Y}(\lambda)]$ mátrixra vezethető a (9) lineáris transzformáció segítségével. Mivel $\sigma_0[\hat{y}(\sigma_0)]-\lambda[\hat{y}(\lambda)]$ nem szinguláris, ezért az $[\hat{y}(\lambda)]$ mátrixra a Richards-eljárás alkalmazható.

Az UM r vezetékes tápvonalszakasz kiemelésekor egy másik korlátozás is jelentkezik, éspedig az, hogy az $[Y(1)]=[Y_0]$ mátrixnak nem szinguláris hiperdominánsnak kell lennie. A (9) lineáris transzformáció ugyancsak felhasználható arra, hogy nem szinguláris hiperdomináns $[Y_0]$ mátrixot vezessünk le a pozitív reális, konstans szimmetrikus mátrixból (ld. [6], illetve a következő pontot).

2.4. A racionális veszteségmentes n-kapu szintézise több vezetékes tápvonalszakasz lánckiemelésével

Legyen az n-kapu hálózatmátrixa felírva

$$[a]_1[V]_1=[b]_1[Y]_1 \qquad (12)$$

alakban, mely nem más, mint egy lineáris összefüggés a feszültségek és az áramok között [5]. Itt $[a]_1$ és $[b]_1$ egy n×n mátrix $[V]_1$ és $[I]_1$ pedig olyan oszlopvektorok, melyeknek n komponense van.

Először is meg kell vizsgálni, hogy $\det[a]_1$ és $\det[b]_1$ eltűnik-e vagy sem. Ha egyik sem tűnik el, akkor a következő lépés nem szükséges és át lehet térni az 1b lépésre.

A kívánt hálózat specifikálható $[Z]$ vagy $[Y]$ mátrixszal is, mely olyan speciális esetnek tekinthető, ahol $[a]_1$ vagy $[b]_1$ egységmátrix.

1a lépés. A redundancia megszüntetése. Ha a $\det[a]_1$ vagy $\det[b]_1$ közül az egyik vagy mind a kettő eltűnik, akkor az adott n kapu redundáns (vagyis függés van a kapocspári feszültségek, vagy áramok, vagy mindkettő között). Ekkor a hálózat előállítható egy ideális konnektorral és egy n_1 kapus hálózattal, ahol $n_1<n$, vagyis n-nél kevesebb kapuval rendelkezik. Az ideális konnektor kiemelése után az eredeti hálózat feszültség- és áramvektora lesz

$$[I]_{1a}=[Y(\lambda)]_{1a}[V]_{1a}, \quad [V]_{1a}=[Z(\lambda)]_{1a}[I]_{1a} \qquad (13)$$

Az $[Y(\lambda)]_{1a}$ és $[Z(\lambda)]_{1a}$ mátrix dimenziója $n_1\times n_1$.

Ha az $[Y(1)]_{1a}=[Y_0]_{1a}$ hiperdomináns, akkor a következő lépés elhagyható és át lehet térni a 2. lépésre.

1b lépés. A karakterisztikus admittanciamátrix hiperdominánssá tétele. Ha $[Y(1)]_{1a}=[Y_0]_{1a}$ nem hiperdomináns, akkor található olyan nem szinguláris $[K_1]$ mátrix, hogy

$$[K_1][Y_0]_{1a}[K_1']=[Y_0]_{1b}$$

mátrix hiperdomináns lesz. Ezen transzformációnál $[V]_{1a}$ és $[I]_{1a}$ is transzformálódni fog:

$$[V]_{1b}=[K_1'^{-1}][V]_{1a} \qquad [I]_{1b}=[K_1][I]_{1a} \qquad (14)$$

és a transzformáció után lesz:

$$[I]_{1b}=[Y(\lambda)]_{1b}[V]_{1b} \tag{15}$$

ahol $[Y(\lambda)]_{1b}=[K_1][Y(\lambda)]_{1a}[K_1']$. Az $[Y(\lambda)]_{1b}$ dimenziója $n_1\times n_1$.

2. lépés. A több vezetékes tápvonalszakasz kiemelése. Az $[Y(\lambda)]_{1b}$-ből most egy n_1 vezetékes tápvonalszakasz emelhető ki, mivel $[Y(\lambda)]_{1b}$ hiperdominánss $\lambda=1$ esetén. Ha $[V]_{1b}$ és $[I]_{1b}$-vel jelöljük az n_1 vezetékes tápvonalszakasz kiemelése előtti feszültség- és áramvektort, akkor a kiemelés után lesz $[V]_2$ és $[I]_2$ és ezek így függnek össze egymással:

$$\left.\begin{aligned}[V]_2&=\mathrm{ch}\,\gamma l[V]_{1b}-\mathrm{sh}\,\gamma l[Z_0]_{1b}[I]_{1b}\\ [I]_2&=\mathrm{ch}\,\gamma l[I]_{1b}-\mathrm{sh}\,\gamma l[Y_0]_{1b}[V]_{1b}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ahol $[Z_0]_{1b}$ az $[Y_0]_{1b}$ inverze. Az $[Y]_{1b}$ eliminálásával a fenti összefüggésből kapjuk

$$[V]_2=[a]_2[V]_{1b}, \qquad [I]_2=[b]_2[V]_{1b} \tag{17}$$

ahol

$$\left.\begin{aligned}[a]_2&=\mathrm{ch}\,\gamma l[1_{n_1}]-\mathrm{sh}\,\gamma l[Z_0]_{1b}[Y]_b\\ [b]_2&=\mathrm{ch}\,\gamma l[Y]_{1b}-\mathrm{sh}\,\gamma l[Y_0]_{1b}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$[1_n]$ egy $n\times n$ idemmátrix. Az n_1 vezetékes tápvonalszakasz kiemelése után egy n_1 kapus áramkör marad vissza, mely a Richards-mátrix tétele értelmében pozitív valós és veszteségmentes. Tehát az előzőekben ismertetett szintézislépések, éspedig

(i) a redundancia megszüntetése;
(ii) a karakterisztikus admittanciamátrix hiperdominánssá tétele;
(iii) a több vezetékes tápvonalszakasz kiemelése;

ismételhetők. Minden egyes redundancia megszüntetése esetén a kapuk száma csökken és így ezen eljárás többszöri ismétlésével a teljes realizáció elérhető.

3. Normál veszteségmentes kétkapu szintézise

A normál kétkapu fogalmát és realizálhatósági feltételét az 1.2. pontban ismertettük. Innen következik, hogy egy normál kétkapu láncmátrixa ilyen alakú:

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\frac{1}{(1-\lambda^2)^{\nu/2}f(\lambda)}\begin{bmatrix}a(\lambda) & b(\lambda)\\ c(\lambda) & d(\lambda)\end{bmatrix} \tag{19}$$

ahol ν természetes egész szám és $f(\lambda)$, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$, $d(\lambda)$ a λ-nak valós polinomjai. A lánckötésből következik, hogy

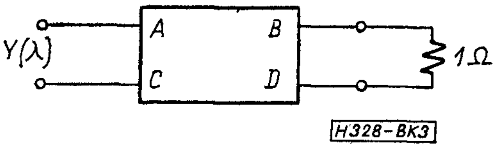
$$a(\lambda)d(\lambda)-b(\lambda)c(\lambda)=(1-\lambda^2)^{\nu}f^2(\lambda) \tag{20}$$

Az immittanciamátrix elemei lesznek:

$$\left.\begin{aligned}Z_{11}&=\frac{a(\lambda)}{c(\lambda)} & Z_{22}&=\frac{d(\lambda)}{c(\lambda)} & Z_{12}&=(1-\lambda^2)^{\nu/2}\frac{f(\lambda)}{c(\lambda)}\\ y_{11}&=\frac{d(\lambda)}{b(\lambda)} & y_{12}&=\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)} & y_{12}&=(1-\lambda^2)^{\nu/2}\frac{f(\lambda)}{b(\lambda)}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Tehát látható, hogy páratlan ν esetén a kétkapu irracionális lesz.

A normál veszteségmentes kétkapu realizálhatósági feltétele az 1.3. pontban található. A (19) egyenletből következik, hogy az 1Ω ellenállással lezárt kétkapu bemeneti admittanciája (ld. 3. ábra):



3. ábra. Ellenállással lezárt normál veszteségmentes kétkapu

$$Y(\lambda)=\frac{[c(\lambda)+d(\lambda)]}{[a(\lambda)+b(\lambda)]} \tag{22}$$

mely a λ-nak pozitív reális függvénye. Tehát látható, hogy ha az irracionális kétkaput 1Ω ellenállással lezárjuk, akkor racionális egykapura jutunk. Ily módon meg tudjuk kerülni az irracionális hálózat közvetlen szintézisének problémáját. Cserében új probléma merül fel: meg kell határozni egy adott bemeneti admittanciából egy kétkapumátrixot, mely kielégíti a normál veszteségmentes kétkapu realizálhatósági feltételeit.

3.1. A normál veszteségmentes kétkapumátrix $Y(\lambda)$-ból való meghatározása

Legyen adva az

$$Y(\lambda)=\frac{u_2+\lambda v_2}{u_1+\lambda v_1} \tag{23}$$

pozitív reális admittancia, ahol u_1, u_2, v_1 és v_2 a λ-nak páros polinomjai. Ebben az esetben a kétkapumátrix meghatározási módszere ugyanaz, mint a koncentrált paraméterű hálózatok esetén, kivéve, hogy a $P(\lambda)=u_1u_2-\lambda^2v_1v_2$ polinom $\lambda=\pm1$-nél levő zérushelyei minden kiegészítés nélkül realizálhatók még abban az esetben is, ha páratlan multiplicitásúak. Más páratlan multiplicitású zérushelyet párossá kell kiegészíteni.

A kiegészítés a következőképpen történik. Tegyük fel, hogy a $P(\lambda)$-nak zérushelye van $\lambda=\lambda_0$-nál. Felírjuk a $H(\lambda)=(\lambda+\lambda_0)\cdot(\lambda+\overline{\lambda}_0)$ Hurwitz-polinomot $H(\lambda)=u(\lambda)+\lambda v(\lambda)$ páros és páratlan rész alakjában és megszorozzuk vele az $Y(\lambda)$ számlálóját és nevezőjét. Ekkor kapjuk:

$$Y'(\lambda)=\frac{u_2u+\lambda^2v_2v+\lambda(v_2u+u_2v)}{u_1u+\lambda^2v_1v+\lambda(v_1u+u_1v)}=\frac{u_2'+\lambda v_2'}{u_1'+\lambda v_1'} \tag{24}$$

$$p'(\lambda)=u_1'u_2'-\lambda^2v_2'v_1'=H(\lambda)H(\lambda)H(-\lambda)P(\lambda) \tag{25}$$

ahol u_1', u_2', v_1', v_2' páros polinomok. A $P'(\lambda)$ polinom $\lambda=\pm\overline{\lambda}_0$ és $\lambda=\pm\lambda_0$-nál levő zérushelyeinek multiplicitása eggyel nagyobb, mint a $P(\lambda)$ ugyanezen helyen levő zérushelyeinek multiplicitása.

Tegyük fel, hogy $Y(\lambda)$ úgy van kiegészítve, hogy $P(\lambda)$-nak a zérushelyei páros multiplicitásúak, kivéve a $\lambda=\pm1$ helyet. A Miyata [7] tétel szerint a Hurwitz-polinommal így kiegészített $Y(\lambda)$ pozitív reális függvény marad. Mivel a veszteségmentes normál kétkapu immittancia mátrixa a λ páratlan függvénye kell, hogy legyen, tehát:

I. a, d páros függvény; b, c páratlan függvény, ha f páros függvény,

II. a, d páratlan függvény, b, c páros függvény, ha f páratlan függvény.

Ha tehát $Y(\lambda)=(u_2+\lambda v_2)/(u_1+\lambda v_1)$ admittanciát a 3. ábra szerint óhajtjuk realizálni, akkor a következő választást tehetjük:

$u_1=a$, $u_2=d$, $v_1=b$, $v_2=c$, ha f páros függvény, (26)

$u_1=b$, $u_2=c$, $v_1=a$, $v_2=d$, ha f páratlan függvény. (27)

Behelyettesítve ezen kifejezéseket a (23) egyenletbe, lesz

$$P(\lambda)=u_1u_2-\lambda^2v_1v_2=(1-\lambda^2)^\nu f^2,$$

ha f páros függvény (28)

$$-P(\lambda)=\lambda^2v_1v_2-u_1u_2=(1-\lambda^2)^\nu f^2,$$

ha f páratlan függvény. (29)

Mivel feltételeztük, hogy a $P(\lambda)$ összes zérushelye — kivéve a $\lambda=\pm1$-nél levőket — páros multiplicitású, tehát f páros vagy páratlan voltának követelménye teljesül. Az $[Y]$ mátrix elemei a következőképpen határozhatók meg:

$$\left.\begin{aligned} &y_{11}=\frac{u_2}{\lambda v_1} \quad y_{22}=\frac{u_1}{\lambda v_1}\\ &y_{12}=-(u_1u_2-\lambda^2v_1v_2)^{1/2}/\lambda v_1\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

ha f páros függvény; és

$$\left.\begin{aligned} &y_{11}=\frac{\lambda v_2}{u_1} \quad y_{22}=\frac{\lambda v_1}{u_1}\\ &y_{12}=-(\lambda^2v_1v_2-u_1u_2)^{1/2}/u_1\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ha f páratlan függvény.

Eddig a normál veszteségmentes kétkapu realizálhatósági feltételei közül az 1., 2., 3. feltételt kielégítettük. A (30) és (31) egyenletből nyerhető, hogy

$$y_{11}y_{22}-y_{12}^2=v_2/v_1,$$

ha f páros függvény; (32)

$$y_{11}y_{22}-y_{12}^2=u_2/u_1,$$

ha f páratlan függvény.

Mivel az u_1 és v_1 zérushelyei a képzetes tengelyen fekszenek és legalább duplák, tehát Y_{12}^2 pólusai a képzetes tengelyen fekszenek és legalább duplák. Tehát Y_{12} pólusai egyszerűek és a képzetes tengelyen fekszenek. Ezért írhatjuk:

$$k_{11}k_{22}-k_{12}^2=(\lambda-j\Omega i)^2(y_{11}y_{22}-y_{12}^2)\big|_{\lambda=j\Omega i} \quad (33)$$

ahol k_{j1} a képzetes tengelyen a $j\Omega i$ helyen fekvő pólushoz tartozó reziduum. Ha f páros, akkor lesz

$$(\lambda-j\Omega_i)^2\frac{v_1}{v_2}\bigg|_{\lambda=j\Omega i}=$$

$$=(\lambda-j\Omega i)\frac{\lambda v_2}{v_1}\bigg|_{\lambda=j\Omega i}\cdot(\lambda-j\Omega i)\frac{u_1}{\lambda v_1}\bigg|_{\lambda=j\Omega i}\geq 0 \quad (34)$$

mivel $\lambda v_2/u_1$ és $u_1/\lambda v_1$ reaktanciafüggvények a Miyata-tétel [7] értelmében. A páratlan f esete hasonlóan tárgyalható. Tehát végeredményben kimutatható, hogy a (30), illetve a (31) egyenlet által meghatározott admittanciamátrix kielégíti a normál veszteségmentes kétkapu admittancia mátrixára vonatkozó 1.3. pontbeli összes követelményeket.

Befejezésül megjegyezzük, hogy az adott Y bemeneti admittanciát minden esetben ki lehet egészíteni $(1+\lambda)^kH^2(\lambda)$-val, ahol k egy pozitív egész szám vagy zérus és $H(\lambda)$ valamilyen Hurwitz-polinom. Az $(1+\lambda)^k$-val való kiegészítés egységelem bevezetésével ekvivalens. Tehát belátható, hogy a kétkapumátrixot nem lehet $Y(\lambda)$-ból egyértelműen meghatározni. Ellenben, ha $Y(\lambda)$-val együtt $u_1u_2-\lambda^2v_1v_2$ is specifikálva van, akkor a kétkapumátrix egyértelműen meghatározható (kivéve Y_{12} előjelét).

3.2. Normál veszteségmentes kétkapu szintézise

Legyen adva az

$$Y(\lambda)=(u_2+\lambda v_2)(u_1+\lambda v_1) \quad (35)$$

$$u_1u_2-\lambda^2v_1v_2=(1-\lambda^2)f^2\nu\geq 1 \quad (36)$$

függvény, melyből az előző pont alapján meghatározható egy normál veszteségmentes kétkapu admittanciamátrixa.

A (35) egyenlettel meghatározott $Y(\lambda)$ admittanciából kiemelünk egy egységelemet a Richards-tétel alapján:

$$Y_1(\lambda)=Y_0\frac{(u_2-Y_0\lambda^2v_1)+\lambda(v_1-Y_0u_1)}{(Y_0u_1-\lambda^2v_1)+\lambda(Y_0v_1-u_2)} \quad (37)$$

A jobb oldalon a zárójelben levő tagok mindegyikének egyszerű zérushelye van $\lambda=\pm1$-nél, mivel páros függvények és

$$\frac{v_2(1)}{u_1(1)}=\frac{u_2(1)}{v_1(1)}=Y(1)=Y_0 \quad (38)$$

Ezenkívül más közös zérushelyük nincs. Tehát írható

$$\left.\begin{aligned} &Y_1(\lambda)=[U_1'(\lambda)+\lambda v_2'(\lambda)]/[u_1'(\lambda)+\lambda v_1'(\lambda)]\\ &u_1'u_2'-\lambda^2v_1'v_2'=(u_1u_2-\lambda^2v_1v_2)/(1-\lambda^2)\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

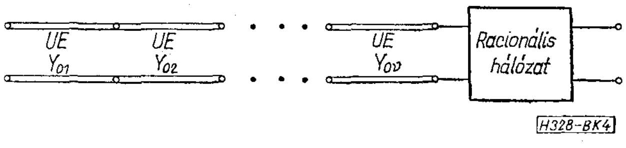
Ez azt jelenti, hogy a Richards-tétel alkalmazásával a (36) egyenletbeli függvény $(1-\lambda^2)$ tényezőjének multiplicitása eggyel csökkenthető.

Az $(1-\lambda^2)$ tényező multiplicitásának csökkenése kimutatható a láncmátrix alapján is. Ugyanis a Richards-tétel alkalmazása egyenértékű a láncmátrixnak balról

$$[L_U^{-1}]=(1-\lambda^2)^{-1/2}\begin{bmatrix}1 & -2\lambda\\ -Y_0\lambda & 1\end{bmatrix} \quad Z_0=\frac{1}{Y_0} \quad (40)$$

mátrixszal való megszorzásával.

Tehát, ha $Y(\lambda)$ és $(1-\lambda^2)^\nu f^2(\lambda)$ adva van, akkor a Richards-tétel ν-szöri alkalmazásával $(1-\lambda^2-f^2(\lambda)$-át



4. ábra. A normál veszteségmentes kétkapu kánonikus alakja

$f^2(\lambda)$-ra lehet redukálni. A maradék hálózatot pedig egy racionális kétkapuval lehet realizálni. Tehát az egész hálózat a 4. ábra szerinti kanonikus alakban realizálható. Ha $f(\lambda)$ zérushelyekkel rendelkezik a képzetes tengelyen, akkor a racionális kétkapu létrakapcsolásként realizálható és az egységelemeket el lehet osztani a racionális létrakapcsolás elemei között.

IRODALOM

[1] *Nagai, N. and Matsumoto, A.:* Fundamental Properties of Irrational Networks, Bul. Res. Inst. Appl. Elec. Hokkaido Univ. Sapporo, 17, No. 3, 121—137 (1965).

[2] *Bayard, M.:* Theorie des réseaux de Kirchhoff. Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1954.

[3] *Saito, N.:* Richards' theorem expanded into two-terminal-pair networks, The Journ. of the Inst. of Elec. Commun. Engr. of Japan, vol. 44, No. 7, pp. 1033—1036 July 1961.

[4] *Oono, Y.:* Synthesis of a finite 2n-terminal network of the extension of Brune's two-terminal network theory, J. Inst. Elec. Commun. Engr. (japan) vol. 31, 163—181 (1948).

[5] *Newcomb, R. W.:* "Linear Multiport Synthesis" p. 137 Mc Graw-Hill N. Y. 1966.

[6] *Matsumoto, A. and Nagai, N.:* Synthesis of multiports with multiwire line sections; Monograph Ser. Res. Inst. Appl. Elec. Hokkaido Univ. Sapporo, Japan. No. 12, 1964.

[7] *Miyata, F.:* "Network Synthesis" Kyoritsu Publ. Tokyo, 1954.