

Televíziós videojelek Walsh-transzformációja

ETO 621.397.2.018.422

A televíziós képek továbbítása nagy csatornakapacitást igényel. Becslések szerint, a napjainkban használt letapogatási módszerrel (félkép- és sorbontás) nyert videojel forrásredundanciájának eltávolítása után, a pillanatnyilag szükségesnél két nagyságrenddel kisebb csatornakapacitás is elég lenne. A kétdimenziós (x, y) álló-, és a háromdimenziós (x, y, t) mozgóképek redundancia-csökkentő kódolásával sokat foglalkoztak az utóbbi évtizedben. A viszonylag költséges (kísérleti) berendezések előállítása elsősorban az űrkutatásban fizetődik ki. A főként az USA-ban folyó kutatómunka másik feladata az 1 MHz alapsávi sávzélesség mellett 16 Mbit/sec átviteli sebességet igénylő PCM videotelefon jel „beleszorítása” a rendelkezésre álló 6,312 Mbit/sec kapacitású csatornába. A nyomtatványok (állóképek) keskeny sávú továbbítására szolgáló faksimile berendezések többsége szintén valamilyen híredukciós módszer felhasználásával üzemel.

A Mikrohullámú Híradástechnika Tanszéken a képátvitel sávzélességének csökkentésére irányuló kísérletek folynak. A kidolgozásra kerülő módszerek előreláthatólag használhatók lesznek a műholdakról érkező képekhez és egyéb adatokhoz szükséges tárolókapacitás csökkentésére is. Várható ipari felhasználásként nálunk is a csökkentett sávzélességű digitális képtelevízió jöhet szóba.

Ebben a cikkben a redundancia-csökkentő lineáris transzformációk közé tartozó Walsh-transzformációt tárgyaljuk. Definiáljuk a Walsh-függvényeket és a Walsh-spektrum számítását, tárgyaljuk a mintavételezéssel diszkrétte tett jelek gyors mátrix-transzformációját. Megadjuk egy építés alatt álló kísérleti egydimenziós transzformációt végző berendezés blokkvázlatát.

1. A Walsh-spektrum előállítása, Walsh-függvények

A Walsh-függvényeket definiáló differenciaegyenlet Harmuth [1] szerint:

$$\text{wal}(2j+1, \theta) = (-1)^{[j/2]+p} \{ \text{wal}[j, 2(\theta+1/4)] + (-i)^{j+p} - \text{wal}[j, 2(\theta-1/4)] \} \quad (1)$$

$$\text{wal}(0, \theta) = 1,$$

ahol $-1/2 \leq \theta < +1/2$

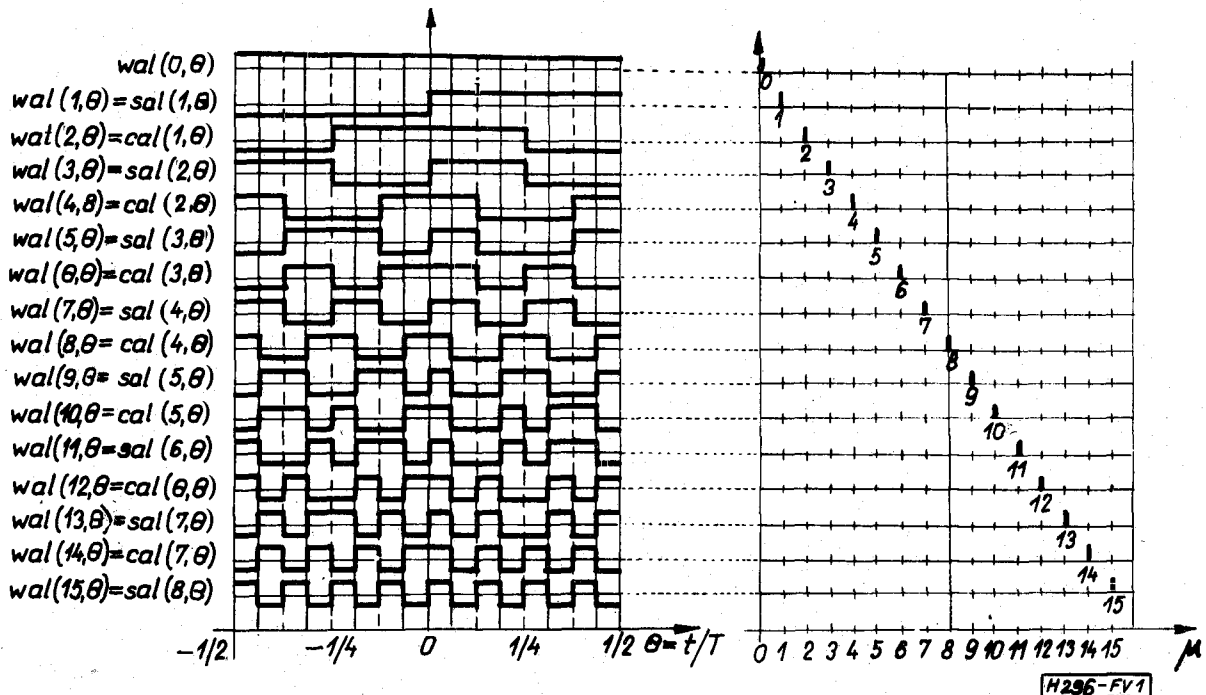
$$j = 0, 1, 2, \dots$$

$$p = 0, \text{ vagy } 1$$

θ – a normalizált idő

T – az ortogonalitási tartomány

$$[j/2] = j/2 \text{ egész része.}$$



1. ábra. A Walsh-függvények és szekvenciaspektrumok

A sin és cos függvényekhez hasonló sal és cal jelölésmóddal:

$$\begin{aligned} \text{cal}(i, \Theta) &= \text{wal}(2i, \Theta) \\ \text{sal}(i, \Theta) &= \text{wal}[(2i-1), \Theta]. \end{aligned} \quad (2)$$

A differenciaegyenlet eredményeként az 1. ábrán látható sorrend alakul ki. A sorrendet $-1/2 \leq \Theta < +1/2$ félig nyitott tartományon belül az előjelváltások, vagy zérusátmenetek száma határozza meg. A cal (i, Θ) és sal (i, Θ) függvények a fenti tartományon belül $2i$ ($i=1, 2, \dots$) zérusátmenettel rendelkeznek.

A Walsh-transzformációhoz szükséges függvénykészlet az 1. ábra függvényeinek egy ξ tényezővel való kiterjesztésével származtatható. Jelöljük a kiterjesztett függvényeket cal $[i(\xi, \Theta)]$ és sal $[i(\xi, \Theta)]$ alakokkal. Ha ξ és i végtelenhez tart, miközben a

$$\lim_{\xi, i \rightarrow \infty} i/\xi = \mu \quad (3)$$

korlát létezik, a Walsh-függvények $\{\text{cal}(\mu, \Theta), \text{sal}(\mu, \Theta)\}$ rendszerét kapjuk. Ez a rendszer a $-\infty < \Theta < +\infty$ tartományban

$$\begin{aligned} \text{cal}(-\mu, \Theta) &= \text{cal}(\mu, \Theta) \\ \text{sal}(-\mu, \Theta) &= -\text{sal}(\mu, \Theta) \end{aligned} \quad (4)$$

egyenletekkel μ minden valós (pozitív és negatív) értékére definiálva van.

A cal (i, Θ) és sal (i, Θ) függvényekben a t változót a T időre normalizáljuk:

$$\Theta = t/T. \quad (5)$$

A ξ tényezővel nyújtott cal (μ, Θ) és sal (μ, Θ) függvényeknél a T időalapot $\xi \cdot T$ -vel behelyettesítjük, ekkor a

$$-\xi \cdot T/2 \leq t < \xi \cdot T/2$$

tartományban a zérusátmenetek száma $2i$ lesz. A (3) egyenletből következik, hogy

$$\lim_{i, \xi \rightarrow \infty} i/\xi \cdot T = \mu/T = \Phi, \quad (6)$$

ahol Φ a másodpercenkénti előjelváltások átlagos számának a felét, a szekvenciát jelöli.

Ha μ nem bináris racionális szám, a cal (μ, Θ) és sal (μ, Θ) függvények nem periodikusak, de ennek ellenére létezik a $\Phi = \mu/T$ korlát és használható a szekvencia fenti definíciója.

Tekintsük át a Walsh-függvények tulajdonságait:

- A cal (i, Θ) sal $[(i+1), \Theta]$, ($i=0, 1, 2, \dots$) függvények a normalizált időegység-intervallumának minden belső részintervallumában teljes ortogonális és normált függvényrendszert alkotnak.
- A függvények értéke $+1$ és -1 lehet.
- sal (μ, Θ) páratlan, cal (μ, Θ) páros függvénye Θ -nak, ha $-\infty < \Theta < +\infty$, $\mu \geq 0$
- A Walsh-függvények szorzási szabályai a következők:

$$\text{wal}(j, \Theta) \cdot \text{wal}(k, \Theta) = \text{wal}[(j \oplus k), \Theta]. \quad (7)$$

A \oplus művelet az ún. „modulo 2” szerinti összeadást jelenti, mely nemnegatív számokra az „átvitel nélküli bináris összeadás”-nak felel meg; negatív számokra, definíciószerően:

$$\begin{aligned} (-a) \oplus b &= a \oplus (-b) = -(a \oplus b) \\ (a) \oplus (-b) &= a \oplus b. \end{aligned} \quad (8)$$

A szorzási szabályok részletezve:

$$\begin{aligned} \text{cal}(i, \Theta) \cdot \text{cal}(k, \Theta) &= \text{cal}[(i \oplus k), \Theta] \\ \text{cal}(i, \Theta) \cdot \text{sal}(k+1, \Theta) &= \text{sal}[(i \oplus k) + 1, \Theta] \\ \text{sal}[(i+1), \Theta] \cdot \text{sal}[(k+1), \Theta] &= \text{cal}[(i \oplus k), \Theta] \\ (i, k=0, 1, 2, \dots) & \quad (-\infty < \Theta < +\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

e) Érvényesek a következő fontos formulák:

$$\begin{aligned} \text{cal}[\mu, (\Theta \oplus \tau)] &= \text{cal}(\mu, \Theta) \cdot \text{cal}(\mu, \tau) \\ \text{sal}[\mu, (\Theta \oplus \tau)] &= \text{sal}(\mu, \Theta) \cdot \text{sal}(\mu, \tau) \\ \text{cal}(\mu, \Theta) &= \text{cal}(\Theta, \mu) \quad \Theta, \mu \geq 0 \\ \text{sal}(2^k \mu, \Theta) &= \text{sal}(\mu, 2^k \cdot \Theta), \quad k = \pm 1, \pm 2 \\ \text{cal}(2^k \cdot \mu, \Theta) &= \text{cal}(\mu, 2^k \Theta). \end{aligned} \quad (10)$$

f) A sal $(2^k, \Theta)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) függvények tulajdonképpen a Radamacher-függvények.

Walsh-sor Walsh-transzformáció

Jelöljön $f(\Theta)$ egy egységnyi periódusú időfüggvényt. Tételezzük fel $f(\Theta)$ -ról, hogy egy periódusára négyzetesen integrálható. Ez a feltétel fizikailag azt jelenti, hogy a folyamat összenergiája véges. Ekkor a Walsh-függvények tulajdonságai alapján (lásd 1. ábra) Walsh-sorba fejthető:

$$f(\Theta) = \sum_{i=0}^{\infty} F_c(i) \cdot \text{cal}(i, \Theta) + F_s(i+1) \cdot \text{sal}[(i+1), \Theta], \quad (11)$$

ahol az $F_c(i)$, $F_s(i)$ Walsh-együtthatók a következő egyenletekkel számíthatók:

$$\begin{aligned} F_c(i) &= \int_{-1/2}^{+1/2} f(\Theta) \cdot \text{cal}(i, \Theta) d\Theta \quad i=0, 1, 2, \dots \\ F_s(i) &= \int_{-1/2}^{+1/2} f(\Theta) \cdot \text{sal}(i, \Theta) d\Theta \quad i=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

A (11) sort $f(\Theta)$ Walsh-sorának nevezzük. Az

$$\begin{aligned} F_c^*(\mu) &= \delta_{i\mu} \cdot F_c(i) \\ F_s^*(\mu) &= \delta_{i\mu} \cdot F_s(i) \end{aligned} \quad (13)$$

függvények $f(\Theta)$ szekvencia-amplitúdó spektrumát szolgáltatják. $\delta_{i\mu}$ az ún. Kronecker-Delta: $i=\mu$ esetén $\delta_{i\mu}=1$, ha $i \neq \mu$ akkor $\delta_{i\mu}=0$.

Minden aperiodikus $f(\Theta)$ függvény, mely a $-\infty < \Theta < +\infty$ tartományon négyzetesen integrálható, megadható az

$$f(\Theta) = \int_0^{\infty} [F_c^*(\mu) \cdot \text{cal}(\mu, \Theta) + F_s^*(\mu) \cdot \text{sal}(\mu, \Theta)] d\mu \quad (14)$$

Walsh-integrállal, ahol

$$F_c(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cdot \text{cal}(\mu, \theta) d\theta$$

$$F_s(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cdot \text{sals}(\mu, \theta) d\theta$$
(15)

A fentieket a Fourier-sorral és a Fourier-integrállal összehasonlítva, erős analógiát találunk.

A Parseval-egyenlet is általánosítható:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} [F_c^2(\mu) + F_s^2(\mu)] d\mu$$
(16)

Szekvencia aluláteresztő szűrő

A Walsh-transzformáció redundanciacsökkentésre való használatánál is nagyon fontos a következő, általános érvényű tétel [2]:

- g) A $f(\theta)$ időhatárolt függvény [$f(\theta) \equiv 0$, ha $\theta > 2^k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$] $F_s(\mu)$ és $F_c(\mu)$ szekvencia-amplitúdó spektruma szakaszonként konstans. A konstans értékek intervallumainak hossza $n/2^{k+1}$, $n=1, 2, 3 \dots$
- h) Minden $f(\theta)$ szekvenciahatárolt függvény $F_c(\mu) \equiv 0$, ha $\mu \geq 2^k$; $F_s(\mu) \equiv 0$, ha $\mu > 2^k$ — eltekintve az azonosan zérus függvénytől — szakaszonként konstans intervallumokkal adható meg. A konstans szakaszok hossza $n/2^{k+1}$, $n=1, 2, 3 \dots$ Igaz Shannon mintavételi tételének általánosítása is [3]:
- j) Minden $f(\theta)$ időfüggvény, melynek szekvencia-amplitúdó spektruma $\mu > \mu_h = 2^k$ -ra (k egész szám)

azonosan egyenlő zérussal, az

$$f(m\Delta t), \quad \Delta t = 1/2 \cdot \mu_h \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

mintavett értékek diszkrét sorozatával hiba nélkül megadható:

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m \cdot \Delta t) \cdot \Gamma_{\mu_h}(\theta - m \cdot \Delta t),$$
(17)

ahol Γ_{μ_h} a Block-impulzus:

$$\Gamma_{\mu_h} = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq \theta \leq 1/2^{k+1} \\ 0 & \text{mindenütt máshol.} \end{cases}$$
(18)

A h) feltétel alapján általános igaz, hogy a $\mu_h = 1/2\Delta t$ mintavételi frekvenciával működő mintavevő és -tartó áramkörön áthaladó folytonos jel szekvenciahatárolt lesz (2. ábra). A mintavevő és -tartó áramkör kimenőjeléből az eredeti bemenőjel $f_n = 1/2\Delta t$ határfrekvenciájú aluláteresztő szűrővel visszanyerhető.

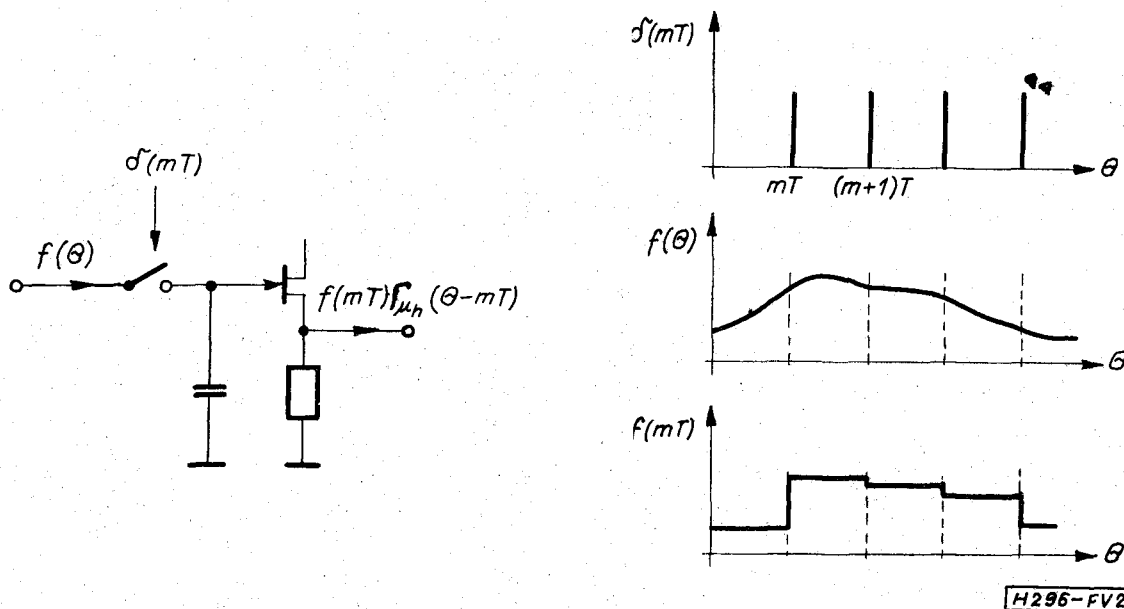
Diszkrét jelek gyors mátrixtranszformációja

Legyen $f^*(t)$ egy $\Delta t = T/n$ ($n=2^k$, $k=1, 2 \dots$) konstans szakaszokból álló (szekvenciahatárolt) időfüggvény. Ekkor $f^*(t)$ egzaktul megadható a $0 \leq t < T$ tartományban a következő n tagból álló Walsh-sorral [3]:

$$f^*(t) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \cdot \text{wal}(i, t) \quad 0 \leq t < T,$$
(19)

ahol a Walsh-együtthatók:

$$F_i = \frac{1}{n \cdot \Delta t} \int_0^{n \cdot \Delta t} f^*(t) \cdot \text{wal}(i, t) dt.$$
(20)



2. ábra. A mintavevő és -tartó áramkör és jelalakjai

Figyelembe véve, hogy (20)-ban a függvények szakaszonként konstansok:

$$F_i = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(m \cdot \Delta t) \cdot \text{wal}(i, m \cdot \Delta t). \quad (21)$$

A (19) és (21) egyenletek technikai realizálása egyszerű: a megfelelő $-F_i$ vagy $f(m \cdot \Delta t)$ — diszkrét értékeket $+1$ vagy -1 tényezővel szorozzuk, majd a szorzatokat összegezzük. A mintavett jelek szekvenciahatárolt, diszkrét Walsh-spektrum összetevőinek származtatása mátrixtranszformáció alakjában is felírható:

$$n \cdot F = W \cdot f, \quad (22)$$

ahol $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ a bemenőjel mintavett értékekének vektora,

$W =$ az $n = 2^k$ rendű szimmetrikus Walsh-mátrix,

$F =$ a spektrumösszetevők vektora.

A Walsh-mátrix sorai a $\text{wal}(i, t)$ függvények $0 \leq t < T$ tartományban felvett értékeit tartalmazzák. A mátrix sorai tetszőlegesen rendezhetők sorba. Használatos a növekvő szekvencia és a bináris sorrend szerinti elrendezés is.

A Walsh-mátrix szimmetriája miatt

$$W \cdot W' = W^2 = n \cdot E. \quad (23)$$

Az inverz mátrix (23) miatt

$$W^{-1} = n^{-1} \cdot W. \quad (24)$$

Így a (19) visszatranszformáló egyenlet mátrix alakban:

$$f = W^{-1} \cdot (n \cdot F). \quad (25)$$

A számítást az $n=8$ esetre mutatjuk meg. A Walsh-mátrix a következő, ha $+1$ és -1 helyett csak az előjeleket írjuk:

$$W_8 = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix}. \quad (26)$$

A (22) egyenlet részletesen kiírva:

$$n \cdot F_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7$$

$$n \cdot F_1 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 - f_4 - f_5 - f_6 - f_7$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n \cdot F_7 = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 - f_7.$$

Láthatóan minden sorban $2^k - 1$ összeadás található, így 2^k sorban összesen $2^k(2^k - 1)$ összegezést kell végezni és bizonyos összegek ismételt kiszámításra kerülnek. A következő [5] módszer csak a feltétlen szükséges műveletek elvégzését igényli; blokkonkénti

struktúráját a következő táblázat mutatja:

	0	1	2	3
f_0	$S_{01} = f_0 + f_1$	$S_{02} = S_{01} + S_{21}$	$S_{03} = S_{02} + S_{42} = nF_0$	
f_3	$S_{11} = f_3 - f_7$	$S_{12} = S_{01} - S_{21}$	$S_{13} = S_{02} - S_{42} = nF_1$	
f_2	$S_{21} = f_3 + f_3$	$S_{22} = S_{11} + S_{31}$	$S_{23} = S_{12} + S_{52} = nF_3$	
f_3	$S_{31} = f_2 - f_3$	$S_{32} = S_{11} - S_{31}$	$S_{33} = S_{12} - S_{52} = nF_2$	
f_3	$S_{41} = f_3 + f_3$	$S_{42} = S_{41} + S_{61}$	$S_{43} = S_{22} + S_{62} = nF_7$	
f_3	$S_{51} = f_4 - f_3$	$S_{52} = S_{41} - S_{61}$	$S_{53} = S_{22} - S_{72} = nF_6$	
f_3	$S_{61} = f_6 + f_7$	$S_{62} = S_{51} + S_{71}$	$S_{63} = S_{32} + S_{72} = nF_4$	
f_7	$S_{71} = f_3 - f_7$	$S_{72} = S_{72} - S_{71}$	$S_{73} = S_{32} - S_{72} = nF_5$	

(28)

A spektrumamplitúdók a k -adik oszlopban a szokásos szekvenciasorrendtől eltérő sorrendben adódnak.

A (28) séma szerinti gyors Walsh-transzformációhoz csak $k \cdot 2^k$ összeadás szükséges. A tényezők tárolására 2^k tárolóhely szükséges, míg a címtárolás is 2^k közbülső tárolót kíván.

2. Transzformáló és redundanciacsökkentő berendezés

A lineáris transzformációk — mint például a Walsh-transzformáció — önmagukban még nem okoznak hirtelenséget, mert egy jelszakasz időtartománybeli és transzformált (pl. szekvencia) tartománybeli megadásához körülbelül ugyanolyan bitszám szükséges. A komponensek amplitúdóinak valószínűségi eloszlását alkalmas transzformációval átalakítva, kedvezőbb kódolás lehetséges, mint az időtartománybeli minták esetén: a legkisebb komponensek durvább kvantálása, esetleg elhagyása a visszatranszformált jelnél nem okoz lényeges jel-zaj viszony romlást. A (22) mátrixtranszformációt legegyszerűbben ellenálláshálózattal valósíthatjuk meg [4]. Célszerű a Walsh-mátrixot két mátrix különbségként felírni. Az $n=4$ esetre:

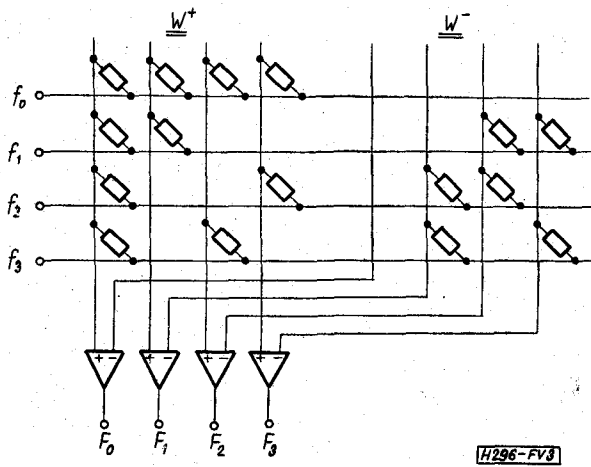
$$W = W^+ - W^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Ekkor a szekvenciaspektrum együtthatói két tag különbségéből származtathatók:

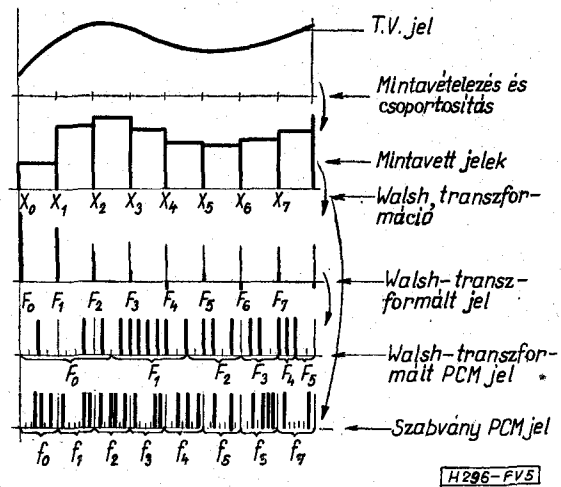
$$F = F^+ - F^- = W^+ \cdot f - W^- \cdot f. \quad (30)$$

Az ellenállás-mátrixokból és műveleti erősítőkből álló transzformáló hálózat a 3. ábrán látható. Problémát jelent, hogy az f vektornak megfelelő feszültségeket egy időben kell a mátrix bemenetére kapcsolni. Ez $\tau = \Delta t$ késleltetésű leágazásos művonallal biztosítható.

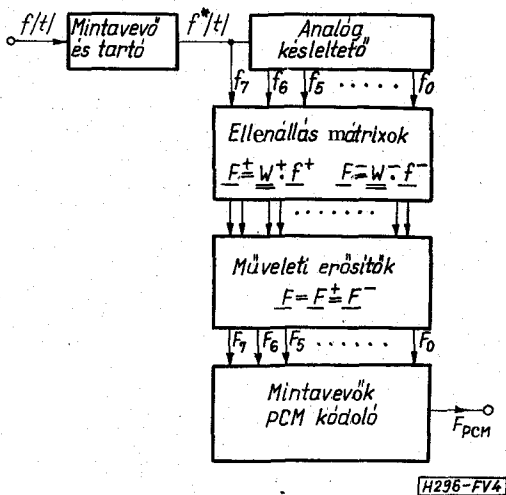
A teljes videojel-kódoló áramkör blokkvázlatát a 4. ábra mutatja. Tegyük fel, hogy a mintavett videojelet 8 mintánként dolgozzuk fel. A mintavételi frekvenciát — a kívánt sorirányú pontbontásnak megfelelően — úgy választjuk meg, hogy a hasznos



3. ábra. W^+ transzformáló hálózat



5. ábra. Az egydimenziós Walsh-transzformáció jelalakjai



4. ábra. A videojel-kódoló áramkör blokkvázlata

3. Összefoglalás

A digitalizált TV-jelek PCM-rendszerben történő továbbításához a videojelet mintánként 6–8 bittel kell megadni. Elméleti megfontolások, számítógépes szimulációk, valamint kísérletek megmutatták, hogy a lineáris transzformációkkal napjainkban elérhető redukciós tényező egydimenziós transzformációnál 2–3 [7], kétdimenziósnál 4–6 [6]. Az általunk vizsgált esetben mintánként átlagosan 2,5–3 bites kódszót használva a kép a minőség romlása nélkül továbbítható.

A leírt módszert nem gazdaságos kommersz célokra alkalmazni, mert a nagy sebességű műveleti erősítők, mintavevő áramkörök és analog-digitál konverterek ára meglehetősen magas, illetve a szinkronizmust biztosító digitális vezérlőegység nagyon bonyolult.

A rendszer ugyan bonyolultabb, de mégis olcsóbb lesz, ha a bemenőjelet rögtön digitalizáljuk, és a gyors Walsh-transzformációt realizáló aritmetikai egységgel végezzük a további feldolgozást.

IRODALOM

- [1] Harmuth, H. F.: Transmission of information by orthogonal functions. Berlin: Springer Verlag 1969.
- [2] Pichler, F.: Synthese linearer periodisch Zeitvariabler Filter mit vorgeschriebenem Sequenzverhalten. AEU. Band 22. 1968, Heft. 3. S. 150–161.
- [3] Klein, W.: Die Transformationsfehler des Walsh-Vocoders. NTZ 1970, Heft 3. S. 126–128.
- [4] Georgi, K. H.: Eine Schaltung zur Transformation von Signalen mit Hilfe orthogonaler Matrizen. NTZ, 1970. Heft. 7. 349–352.
- [5] Georgi, K. H.: Eine Schema für die Schnelle Walsh-Transformation. NTZ 1971. Heft. 9. S. 461–463.
- [6] Musmann, H. F.: Codierung von Videosignalen. NTZ 1971, Heft. 2. S. 114–116.
- [7] Hajime Enomoto: Orthogonal Transform Coding System for Television Signals. IEEE Trans. on EMC-13 1971. Aug. p. 11–17.

sortatartalom egész számú mintacsoportra legyen bontható. A mintákat a késleltető művonalra vezetjük: $8 \cdot \Delta t$ idő elteltével a leágazásokon éppen az

$$f(7 \cdot \Delta t), \dots, f(\Delta t), f_0$$

mintavett értékek jelennek meg. A műveleti erősítők beállása után az F vektor elemei szimultán mintavételezhetőek. A kvantáló és PCM kódoló áramkör kialakítását az aktuális jelstatisztika, valamint a megengedett jel-zaj viszony szabja meg. A transzformáció egyszerűsített idődiagramját az 5. ábra szemlélteti.

A visszaalakításkor a PCM-jel dekódolásakor PAM-jelet kapunk. Az inverz transzformáló áramkör ismét ellenállásmátrixból alakítható ki. Az ellenálláshálózat kimenetén párhuzamosan jelentkező minták, késleltető művonalakkal soros alakba rendezhetőek.