

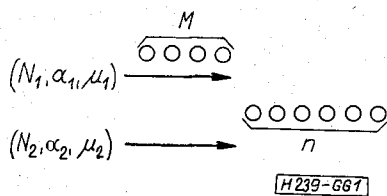
# Várakozásos és veszteséges típusú forgalmat lebonyolító vonalnyalábok méretezése\*

ETO 621.395.73:654.15.021:519.2

Számos olyan telefonkapcsoló rendszer van, amelyben ugyanazt a vonalnyalábót várakozással, ill. veszteségesen kiszolgált előfizetők egyaránt igénybe vehetik. Alközpontokban pl. az előfizetők különböző kategóriákba sorolhatók be, és így kimenő hívásikat az egyik előfizetői csoport várakozásos, a másik veszteséges üzemmódban bonyolíthatja le vagy pl. a kétirányú vonalcsoporthal összekötött telefonközpontok egyikében lehet várakozni torlódás esetében, a másikban nem stb.

A rendszerek közös jellemzője az, hogy a vonalnyalábót források két csoportjából származó, különböző kiszolgálásra jogosult forgalom terheli, továbbá, hogy a várakozásos hívásokhoz bizonyos számú várakozási hely tartozik. A beszélgetések tartásidejének átlagértéke lehet egyforma az egész rendszerben, de lehet különböző a hívás keletkezési helyétől függően.

Egyirányú vonalnyaláb, Poisson bemenet és exponenciális tartásidő esetére COHEN vizsgálta a rendszert [1], korlátlan számú várakozási helyet és teljes elérhetőségű nyalábót feltételezve. Azonos rendszerre, de korlátozott elérhetőségű nyalábra vonatkoznak THIERER [2] számításai. Véges számú forgalomforrást forrásokként vegyes, várakozásos és veszteségesen kiszolgált forgalommal CAPPETTI vizsgált [3]. (Ez a COHEN által vizsgált rendszer egyik lehetséges változata véges számú forgalomforrásra.) A hívástípusonként különböző átlagos tartásidő számításai nehézségeket okoz, amit már [1] is említ. Erre az esetre pontosan számítja ki a veszteséges hívások jellemzőit PRATT [4], aki Poisson bemenetet tételez fel és szélsőséges tartásidő viszonyokra érvényes aszimptotikus megoldásokat is ad.



1. ábra. Egyirányú vonalcsoporthal veszteséges és várakozásos típusú forgalommal

Kétirányú vonalnyalábbal, véges számú forgalomforrást és veszteséges üzemmódot feltételezve HERZOG [5] és RUBAS [6] foglalkozott. Mindkét típusú hívásra azonos átlagos tartásidejű exponenciális eloszlást tételeztek fel és figyelembe vették a hívott foglaltságának hatását is.

\* A szerző előadása a 7. Nemzetközi Távközlésszolgálati Kongresszuson (International Teletraffic Congress), Stockholm, 1973. jún. 13–20.

Beérkezett: 1973. VIII. 15.

Az alábbiakban egyrészt várakozásos és veszteségesen kiszolgált hívásokat lebonyolító kétirányú vonalnyalábokkal foglalkozunk, másrészt megvizsgáljuk az átlagos tartásidők különbözőségének hatását mind egyirányú, mind kétirányú vonalnyalábokon. Az eredmények alapján megállapítható, hogy a tartásidő különbözőség milyen mértékben hat a rendszerek jellemzőire. (A továbbiakban egyszerűen várakozásos és veszteséges típusú forgalmat, hívásigényt, hívást mondunk.)

## 1. Forgalmi modell

A várakozásos, ill. a veszteséges típusú hívásokat kezdeményező véges,  $N_1$  és  $N_2$  számú forgalomforrás ún. másodfajú tiszta véletlenszerű forgalmat ajánl fel (PCT2).

Eszerint a szabad forgalomforrások átlagos hívásintenzitása  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$ , a forgalomforrások egymástól függetlenek, a szabad források véletlenszerűen kezdeményeznek hívásokat. Az előbbieket következtében az egyes források szabad állapotban negatív exponenciális eloszlású,  $1/\alpha_i$ ,  $i=1,2$  átlagos időtartamú ideig tartózkodnak. Mindkét típusú hívás tartásideje exponenciális eloszlású, az átlagos tartásidő  $t_{mi} = 1/\mu_i$ ,  $i=1,2$ , azaz a hívás átlagos megszűnési gyakorisága  $\mu_i$ . A hívások tartásideje egymástól és a rendszer állapotától független.

## 2. A vizsgált rendszerek

A felajánlott forgalmat  $n$  teljes elérhetőségű vonal bonyolítja le. Feltételezzük, hogy  $N_1 > n$  és  $N_2 > n$ . A vonalakat az érkező hívások véletlenszerűen foglalják le.

Ha az összes  $n$  vonal foglalt, akkor az érkező veszteséges típusú hívásigények elvesznek, visszahatás nélkül elhagyják a rendszert. Az elvesző hívások tartásideje zérus. A várakozásos típusú hívások torlódás esetében várakozhatnak a szabad vonalra. A rendszerben összesen  $M$  várakozási hely van ( $M \leq N_1$ ). Ha már az összes várakozási hely foglalt, akkor a várakozásos típusú hívások is elvesznek. Ezek szintén visszahatás nélkül elhagyják a rendszert és tartásidejük zérus.

A várakozó hívásokat beérkezésük sorrendjében szolgálják ki (FCFS várakozási elv).

### 2.1 Egyirányú vonalak (1A és 1B rendszer)

Az  $N_1$  és  $N_2$  forgalomforrás hívásigényei ugyanaból az irányból érkeznek a vonalcsoporthoz (lásd az 1. ábrát). A hívott nem része a rendszernek.

A rendszer  $(j, k, m)$  állapotban van, ha  $j$  darab várakozásos típusú és  $k$  darab veszteséges típusú hívás kiszolgálása van folyamatban, továbbá  $m$  várakozásos típusú hívás várakozik. Ebben az állapotban az egyes csoportokban  $[N_1 - (j+m)]$  és  $(N_2 - k)$  szabad forgalomforrás található.

A rendszer jele a továbbiakban 1A, ha  $\mu_1 = \mu_2$  és 1B, ha  $\mu_1 \neq \mu_2$ .

Ez az elrendezés a COHEN által felvetett probléma [1] lehetséges másik változata PCT2 esetére.

### 2.2 Kétirányú vonalak (2A, 2B és 2C rendszer)

Az  $N_1$  ill.  $N_2$  forgalomforrás hívásigényei egymással szemben érkeznek a vonalcsoporthoz (2. ábra). A két forgalomforrás csoport egymással bonyolult lebeszélgetéseket. A hívott rendszeren belül helyezkedik el, beszélgetés alatt foglaltnak tekintendő, hívást nem kezdeményez.

A  $(j, k, m)$  állapotban az egyes csoportokban  $[N_1 - (j+k+m)]$  és  $[N_2 - (j+k)]$  szabad forgalomforrás található.

Kétirányú vonalcsoportokban a hívott foglaltsága miatt sikertelen hívások nagymértékben befolyásolhatják a rendszert. A hívott foglaltsága esetében két lehetőség van:

- a) A hívást a hívott központjában a foglalt hívott-ra kapcsolják (foglaltra hívás)
- b) A hívás elvész.

Az a) változatban a hívott foglaltságának hatásától eltekinthetünk (cf. [5]). Az így egyszerűsített számítás azonban kismértékben közelítő jellegű, mert a hívott felszabadulásáig csak az összekötöttes egyik oldalán keletkezik újabb passzív forgalomforrás, elentétben a fentebb említettel.

A várakozásra kényszerülő hívások a hívott állapotától függetlenül csatlakoznak a várakozási sorhoz. Amikor kiszolgálásuk elkezdődik, a hívott állapotától függően vagy létrejön a beszélgetés, vagy a fenti a) ill. b) helyzet egyike valósul meg.

A rendszer jele a továbbiakban az a) esetben 2A, ha  $\mu_1 = \mu_2$  és 2B, ha  $\mu_1 \neq \mu_2$ , a b) esetben pedig 2C, ha  $\mu_1 = \mu_2$ .

### 3. Állapotter, állapotegyenletek

A vizsgált rendszerek közös jellemzője az, hogy a várakozásos és a veszteséges hívások számának alakulását külön-külön is számon kell tartani.

#### 3.1 Az 1A, 1B, 2A és 2B rendszerek

Az állapotokat és a lehetséges átmeneteket egy példa kapcsán a 3. ábra szemlélteti. Az ábrán az átmenetintenzitási paramétereket csak jelöltük, ezeket részletesen az 1. táblázat tartalmazza.

A vizsgált rendszerekben csak azok az állapotok lehetségesek, amelyekre  $j \geq 0, k \geq 0, j+k \leq n, 0 \leq m \leq M$ , továbbá ha  $j+k < n$ , akkor  $m=0$ .

A rendszereket a statisztikai egyensúly állapotában vizsgáljuk. Ebben az esetben az állapotvalószínűség időtől függetlenek. A stacionárius állapotvalószí-

nűségükre a (előre irányú) Kolmogorov egyenlet az alábbi alakú

$$\sum_{v \neq s} q(v, s)P(s) = \sum_{s \neq v} q(s, v)P(v) \quad (1a)$$

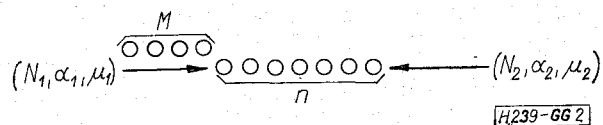
ahol  $P(s)$  az  $(s)$  állapot stacionárius valószínűsége,  $q(v, s)$  az  $(s)$  állapotból a  $(v)$  állapotba való átmenet-hez tartozó átmenet-intenzitási paraméter. A fenti homogén lineáris egyenletrendszer a

$$\sum_s P(s) = 1 \quad (1b)$$

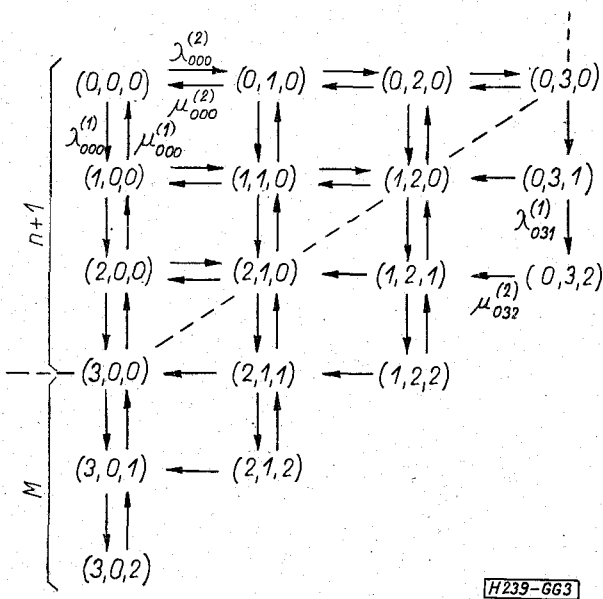
normálási összefüggés egészíti ki.

A továbbiakban a  $(j, k, m)$  állapot stacionárius valószínűségét  $P(j, k, m)$  jelöli.

Az (1a) egyenletrendszer a 3. ábra alapján az alábbi általános alakot ölti. A nem lehetséges állapotokhoz tartozó átmenetintenzitási paraméterek értéke 0.



2. ábra. Kétirányú vonalcsoport veszteséges és várakozásos típusú forgalommal



3. ábra. Állapotter és átmenetintenzitási paraméterek várakozásos és veszteséges forgalmú, teljes elérhetőségű korlátozott várakozásos rendszerben

Átmenet-intenzitási paraméterek

	$\lambda_{j,k,m}^{(1)}$	$\lambda_{j,k,m}^{(2)}$	$\mu_{j,k,m}^{(1)}$	$\mu_{j,k,m}^{(2)}$
1A	$[N_1 - (j+m)]\alpha_1$	$(N_2 - k)\alpha_2$	$j\mu$	$k\mu$
1B			$j\mu_1$	$j\mu_2$
2A	$[N_1 - (j+k+m)]\alpha_1$	$[N_2 - (j+k)]\alpha_2$	$j\mu$	$k\mu$
2B			$j\mu_1$	$k\mu_2$

1. táblázat

$$\left. \begin{aligned}
 & a) \ j+k \leq n, \ m=0 \\
 & \quad \{ \lambda_{j,k,0}^{(1)} + \lambda_{j,k,0}^{(2)} + \mu_{j,k,0}^{(1)} + \mu_{j,k,0}^{(2)} \} P(j, k, 0) = \\
 & \quad = \lambda_{j-1,k,0}^{(1)} P(j-1, k, 0) + \lambda_{j,k-1,0}^{(2)} P(j, k-1, 0) + \\
 & \quad + \mu_{j+1,k,0}^{(1)} P(j+1, k, 0) + \mu_{j,k+1,0}^{(2)} P(j, k+1, 0) \\
 & \quad \text{és } \lambda_{j,k,0}^{(2)} = 0 \text{ ha } j+k=n \\
 & b) \ j+k=n, \ 0 < m \leq M \\
 & \quad \{ \lambda_{j,k,m}^{(1)} + \mu_{j,k,m}^{(1)} + \mu_{j,k,m}^{(2)} \} P(j, k, m) = \\
 & \quad = \lambda_{j,k,m-1}^{(1)} P(j, k, m-1) + \mu_{j,k,m+1}^{(1)} P(j, k, m+1) + \\
 & \quad + \mu_{j-1,k+1,m+1}^{(2)} P(j-1, k+1, m+1) \\
 & \quad \text{és } \lambda_{j,k,M}^{(1)} = 0
 \end{aligned} \right\} (2)$$

A (2) egyenletrendszer zárt alakú megoldását megnehezíti az állapotok közti átmenetek jellegének megváltozása a  $(j, k, 0)$ ,  $j+k=n$ , állapotokat összekötő vonal mentén. Az egyenletrendszer azonban mindig megoldható, hiszen az ismeretlenek száma véges.

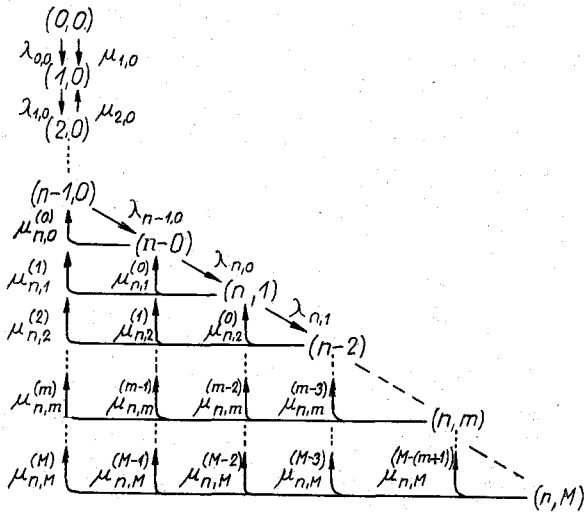
A gyakorlatban használható zárt összefüggés adódik a 2A és 2C rendszerekre (cf. 3.2 és 3.3), mivel az állapottér ezekben az esetekben egyszerűsíthető. Az állapotvalószínűségek meghatározásához az 1A, 1B

és 2B rendszerek esetében pl. a folyamatos túrelaxálás néven ismert iteratív eljárás alkalmazható. A módszert állapotegyenletrendszerek megoldásához már régóta használják, pl. [7], elmélete jól kidolgozott [8].

3.2 A 2A rendszer állapotvalószínűségei

A B1 rendszer állapotvalószínűségeit zárt alakban ki lehet fejezni. Ebben az esetben a 3. ábra állapottere egyszerűsíthető, a  $(j, k, m)$  állapotok helyett elégséges  $(i, m)$ ,  $i=j+k$  állapotokat figyelembe venni. Ebben az esetben:

$$\left. \begin{aligned}
 P(i, 0) &= \frac{1}{i!} \prod_{s=0}^{i-1} \left\{ (N_1 - s) \frac{\alpha_1}{\mu} + (N_2 - s) \frac{\alpha_2}{\mu} \right\} P(0, 0) \\
 & \quad 1 \leq i \leq n \\
 P(n, m) &= \frac{1}{n!} \prod_{s=0}^{n-1} \left\{ (N_1 - s) \frac{\alpha_1}{\mu} + (N_2 - s) \frac{\alpha_2}{\mu} \right\} * \\
 & \quad * \frac{1}{n^m} \prod_{v=0}^{m-1} (N_1 - n - v) \frac{\alpha_1}{\mu} P(0, 0) \\
 & \quad 1 \leq m \leq M \\
 P(0, 0)^{-1} &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{P(i, 0)}{P(0, 0)} + \sum_{m=1}^M \frac{P(n, m)}{P(0, 0)}
 \end{aligned} \right\} (3)$$



M239-664

4. ábra. Állapottér és átmeneti intenzitási paraméterek a 2C rendszerben

2. táblázat

A 2C rendszer átmenet-intenzitási paraméterei

$\lambda_{i,0}$	$(N_1 - i) \left( 1 - \frac{i}{N_2} \right) \alpha_1 + (N_2 - i) \left( 1 - \frac{i}{N_1} \right) \alpha_2$	$0 \leq i \leq n-1$
$\lambda_{n,m}$	$[N_1 - (n+m)] \alpha_1$	$0 \leq m \leq M-1$
$\mu_{i,0}$	$i \mu$	$0 < i \leq n$
$\mu_{n,m}^{(v)}$	$n \mu \left( \frac{n-1}{N_2} \right)^v \left( 1 - \frac{n-1}{N_2} \right)$	$0 \leq v \leq m-1$
$\mu_{n,m}^{(m)}$	$n \mu \left( \frac{n-1}{N_2} \right)^m$	
$\sum_{v=0}^m \mu_{n,m}^{(v)}$	$n \mu$	

3.3 A 2C rendszer állapottere és állapotegyenletei

A hívott foglaltságának hatását az [5] és [6]-ban alkalmazott módon vesszük figyelembe. Feltételezzük, hogy az érkező hívás a szemben levő csoport egyes tagjaira egyforma valószínűséggel irányulhat, a foglaltra hívás valószínűsége tehát  $\frac{i}{N_s}$ ,  $s=1,2$  ha  $i$  vonal foglalt. Ha van szabad vonal, akkor az összeköttetés csak  $\left( 1 - \frac{i}{N_s} \right)$  valószínűséggel jön létre és a hívás  $\frac{i}{N_s}$  valószínűséggel elvész.

Ha minden vonal foglalt, akkor a várakozásos típusú hívások a hívott állapotától függetlenül csatlakoznak a várakozási sorhoz. A hívott állapotát a kiszolgálás megfigyelésekor kell figyelembe venni. Minden várakozó hívás csak  $\left( 1 - \frac{n-1}{N_2} \right)$  valószínűséggel végződik beszélgetésben. Határesetben előfordulhat, hogy az összes várakozó hívás foglaltra hív és így a rendszer az  $(n, m)$  állapotból egyenesen az  $(n-1, 0)$  állapotba kerül.

Az állapottér a 4. ábrán látható, az átmenet intenzitási paramétereket a 2. táblázat tartalmazza.

A 2C rendszer stacionárius állapotvalószínűségei az alábbi formában állíthatók elő

$$\left. \begin{aligned}
 P(i, 0) &= K(i, 0) P(n, M), \quad 0 \leq i \leq n-1 \\
 P(n, m) &= K(n, m) P(n, M) \quad 0 \leq m \leq M \\
 \text{továbbá} \\
 P(n, M)^{-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} K(i, 0) + \sum_{m=0}^M K(n, m)
 \end{aligned} \right\} (4)$$

A  $K(i, 0)$  és  $K(n, m)$  tényezőket az alábbi rekurzíós összefüggések adják

$$\left. \begin{aligned}
 K(n, M) &= 1 \\
 K(n, M-1) &= \frac{1}{\lambda_{n, M-1}} n\mu K(n, m) \\
 K(n, m) &= \frac{1}{\lambda_{n, m}} \left[ (\lambda_{n, m+1} + n\mu) K(n, m+1) - \sum_{v=m+2}^M \mu_{n, v}^{(v-m-2)} K(n, v) \right] \\
 \text{ahol } 0 \leq m \leq M-2 \\
 K(n-1, 0) &= \frac{1}{\lambda_{n-1, 0}} \left[ (\lambda_{n, 0} + n\mu) K(n, 0) - \sum_{v=1}^M \mu_{n, v}^{(v-1)} K(n, v) \right] \\
 K(n-2, 0) &= \frac{1}{\lambda_{n-2, 0}} \left[ (\lambda_{n-1, 0} + (n-1)\mu) \cdot K(n-1, 0) - \sum_{m=0}^M \mu_{n, m}^{(m)} K(n, m) \right] \\
 K(i, 0) &= \frac{1}{\lambda_{i, 0}} \left[ (\lambda_{i+1, 0} + (i+1)\mu) K(i+1, 0) - (i+2)\mu K(i+2, 0) \right] \\
 \text{ahol } 0 \leq i \leq n-3
 \end{aligned} \right\} (5)$$

Az (5) összefüggésekben felhasználtuk, hogy

$$\sum_{v=0}^m \mu_{n, m}^{(v)} = n\mu.$$

#### 4. A rendszerjellemzők meghatározása

A  $P(j, k, m)$  stacionárius állapotvalószínűségek ismeretében az egyes rendszerek várakozási és veszteségi jellemzői meghatározhatók. Ezek:

a) Várakozásos típusú hívásokhoz

- $A_1$  — felajánlott forgalom
- $B_1$  — hívástorlódás
- $P(>0)$  — várakozás valószínűsége
- $t_w/t_{m1}$  — átlagos várakozási idő a kiszolgált hívásokra, az átlagos tartásidő hányadában
- $P(>t)$  — a várakozási idő (kiegészítő) eloszlása a kiszolgált hívásokra.

A várakozási idő eloszlását csak  $\mu_1 = \mu_2$  esetben határoztuk meg. A  $\mu_1 \neq \mu_2$  esetben közvetlennek tekinthető módszerrel (SEGAL [9] és STÖRMER [11]) fel lehet írni a várakozási idő eloszlását. Gyakorlatilag ezt az eljárást különböző paraméterű exponenciális eloszlások konvolúciójának általános képlete hiányában  $M=4 \sim 5$  értékig sikerült csak alkalmazni. A SYSKI-féle eljárással, amelyet KÜHN alkalmazott és fejlesztett tovább [10], és amelyet SEGAL szintén használ [9], a várakozási idő eloszlása szintén meghatározható, ha a várakozási folyamat differenciál egyenletrendszeréhez tartozó mátrix sajátértékeit megállapítják.

b) Veszteséges típusú hívásokhoz

- $A_2$  — felajánlott forgalom
- $B_2$  — hívástorlódás

A jellemző mennyiségek képleteit egyszerűsített

formában adtuk meg. A részletes képlet a segédmenyiségek alapján rekonstruálható.

Közös jellemzőként kiszámítottuk a  $B_{\text{tot}}$  — átlagos együttes hívástorlódást is.

#### 4.1 Egyirányú vonalak, 1A és 1B rendszer

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{\mu_1} (N_1 - Y_1 - Y_w) \quad (6)$$

$$B_1 = \frac{(N_1 - M)P(n, M) - Y_{1M}}{N_1 - Y_1 - Y_w} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 P(>0) &= \\
 &= \frac{N_1 [P(n) - P(n, M)] - (Y_{1, n} - Y_{1, M}) - (Y_w - Y_{w, M})}{N_1 - Y_1 - Y_w} \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_w/t_{m1} &= \\
 &= \frac{\mu_1}{\alpha_1 (N_1 - Y_1 - Y_w) - (N_1 P(n, M) - Y_{1, M} - Y_{w, M})} \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(>t) &= \\
 &= \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^{M-1} [N_1 - (j+m)] P(j, n-j, m) \left( 1 + \tau + \dots + \frac{\tau^m}{m!} \right) e^{-\tau}}{(N_1 - Y_1 - Y_w) - (N_1 P(n, M) - Y_{1, M} - Y_{w, M})} \quad (10)
 \end{aligned}$$

csak ha  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $\tau = n\mu t$  és az 1A rendszer állapotvalószínűségeit alkalmazva.

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{\mu_2} (N_2 - Y_2) \quad (11)$$

$$B_2 = \frac{(N_2 - n)P(n) + Y_{1, n}}{N_2 - Y_2} \quad (12)$$

$$B_{\text{tot}} = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{A_1 + A_2} \quad (13)$$

A (3)–(13) képletekben az alábbi jelöléseket alkalmaztuk.

Állapot-valószínűségek összegei:

$$P(n) = \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^M P(j, n-j, m)$$

$$P(n, M) = \sum_{j=0}^n P(j, n-j, M)$$

Várakozásos és veszteséges típusú lebonyolított forgalom:

$$Y_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i j P(j, i-j, 0) + \sum_{j=0}^n \sum_{m=1}^M j P(j, n-j, m)$$

$$Y_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (i-j) P(j, i-j, 0) + \sum_{j=0}^n \sum_{m=1}^M (n-j) P(j, n-j, m)$$

Várakozásos és veszteséges típusú lebonyolított forgalom, ha minden vonal foglalt:

$$Y_{1, n} = \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^M j P(j, n-j, m)$$

$$Y_{2, n} = \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^M (n-j) P(j, n-j, m)$$

Várakozásos típusú lebonyolított forgalom, ha  $m=M$

$$Y_{1,M} = \sum_{j=0}^n jP(j, n-j, M)$$

Teljes várakozó forgalom és várakozó forgalom, ha  $m=M$

$$Y_w = \sum_{j=0}^n \sum_{m=1}^M mP(j, n-j, m)$$

$$Y_{wM} = MP(n, M)$$

#### 4.2 Kétirányú vonalak, 2A és 2B rendszer

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{\mu_1} (N_1 - Y - Y_w) \quad (14)$$

$$B_1 = \frac{N_1 - n - M}{N_1 - Y - Y_w} P(n, M) \quad (15)$$

$$P(>0) = \frac{(N_1 - n)[P(n) - P(n, M)] - (Y_w - Y_{w,M})}{N_1 - Y - Y_w} \quad (16)$$

$$t_w/t_{m1} = \frac{\mu_1 Y_w}{\alpha_1 (N_1 - Y - Y_w) - (N_1 - n - M)P(n, M)} \quad (17)$$

$$P(>t) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} (N_1 - (n+m))P(n, m) \left(1 + \tau + \dots + \frac{\tau^m}{m!}\right) e^{-\tau}}{(N_1 - Y - Y_w) - (N_1 - n - M)P(n, M)} \quad (18)$$

csak ha  $\mu = \mu_1 = \mu_2$ ,  $\tau = n\mu t$ , a 2A rendszerre érvényes állapotvalószínűséggel,

$$A_2 = \frac{\alpha_2}{\mu_2} (N_1 - Y) \quad (19)$$

$$B_2 = \frac{N_2 - n}{N_2 - Y} P(n) \quad (20)$$

$$B_{tot} = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{A_1 + A_2} \quad (21)$$

$$P(>t) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} [N_1 - (n+m)] P(n, m) \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left(\frac{n-1}{N_2}\right)^s \left(1 - \frac{n-1}{N_2}\right)^{m-s} \left(1 + \tau + \dots + \frac{\tau^{m-s}}{(m-s)!}\right) e^{-\tau}}{(N_1 - Y - Y_w) - (N_1 - n - M)P(n, M)} \quad (22)$$

A jelölések az eddigiek.

## 5. Eredmények

### 5.1 A tartásidő különbözőség hatása a rendszerjellemzőkre

Ha a várakozásos típusú és a veszteséges típusú hívások tartásideje különböző, akkor a rendszerjellemzők mind az 1B, mind a 2B rendszerben megváltoznak az egyforma tartásidejű esethez képest. A jellemzők megváltozása az állapotvalószínűségek változására vezethető vissza. Egyszerű példa látható az 5. ábrán. (A különböző tartásidő hatása az 1B és 2B rendszerekben azonos jellegű. Az alábbiakban példaként

A jelölések ugyanazok, mint a 4.1 pontban, továbbá

$$Y = Y_1 + Y_2$$

a teljes lebonyolított forgalmat jelöli.

### 4.3 Kétirányú vonalak, 2C rendszer

A rendszer forgalomáteresztő képességének megítélése szempontjából változatlanul az összes vonal vagy az összes várakozási hely foglaltsága miatti hívástorlódás a jellemző érték. A hívott foglaltsága miatti hívástorlódás a lebonyolított, ill. a várakozási forgalmat befolyásolja és ezen keresztül hat a többi jellemzőre.

Emiatt a felajánlott forgalmak ( $A_1, A_2$ ), a hívástorlódások ( $B_1, B_2$ ), a várakozás valószínűsége ( $P>0$ ) és a teljes hívástorlódás ( $B_{tot}$ ) rendre a (14), (19), (15), (20), (16) és (21) összefüggésekkel számíthatók ki.

Mivel a várakozás megkezdése feltételeink szerint függetlenül a hívott állapotától, a várakozó hívás csak a kiszolgálás megkezdésének pillanatában tudja meg, hogy a hívott foglalt-e vagy sem. Tehát minden hívás várakozási jellemzői egyformák. A relatív átlagos várakozási időre változatlanul érvényes a (17) összefüggés.

A várakozási idő eloszlását, a hívott foglaltsága miatt, elvesző hívások befolyásolják. Az  $(n, m)$  állapotban beérkező hívás mindenképpen várakozik az első hívás megszűnéséig. Az előtte levő  $m$  darab várakozó hívás közül azonban  $s$  darab elveszhet a hívott foglaltsága miatt. Ebben az esetben nem  $m$ , hanem csak  $m-s$  további hívás megszűnését kell kivárni. A foglaltra hívás valószínűsége ebben az esetben  $\frac{n-1}{N_2}$ . A lehetséges változatokat figyelembe véve,  $s$  várakozó hívás elveszésének valószínűsége

$$\binom{m}{s} \left(\frac{n-1}{N_2}\right)^s \left(1 - \frac{n-1}{N_2}\right)^{m-s}$$

Az elmondottak alapján a várakozási idő (kiegészítő) eloszlása az alábbi

az ( $n=2, M=2, N_1=N_2=15, 2B$ ) rendszert mutatjuk be.)

A görbék paramétere a tartásidők hányadosa,  $t_{m1}/t_{m2}$ . Az 50 és 0,02 paraméterű görbék aszimptotikus határértéknek tekinthetők, amint az a két jellemző érték változását bemutató, 6. ábra alapján látható.

A 6. ábra vízszintes tengelyén az eredmények szimmetrikus jellegét kiemelő beosztást alkalmaztunk. A jellemző értékek változása főleg a  $10 \geq t_{m1}/t_{m2} \geq 0,1$  tartományban következik be, ezen a tartományon kívül a görbék vízszintessé válna határértékhez közelednek. A görbék jellege az összes jellemző értékre azonos. A jobb oldalon a görbék kevésbé meredek. A  $t_{m1}/t_{m2} = 1$ -hez tartozó pont helyzete a két szélső érték között különösen kis  $B_1$  és kis  $t_w/t_{m1}$  esetében nagyon eltolódik lefelé.

3. táblázat

Rendszerjellemzők szélsőséges értékei,  $A_1 = 2$  erl,  $A_2 = 1$  erl

$t_{m1}/t_{m2}$	$B_1$	$B_2$	$B_{tot}$	$P(>0)$	$t_w/t_{m1}$
50	0,203	0,811	0,405	0,598	0,440
1	0,232	0,782	0,416	0,536	0,520
0,02	0,273	0,750	0,432	0,459	0,597

4. táblázat

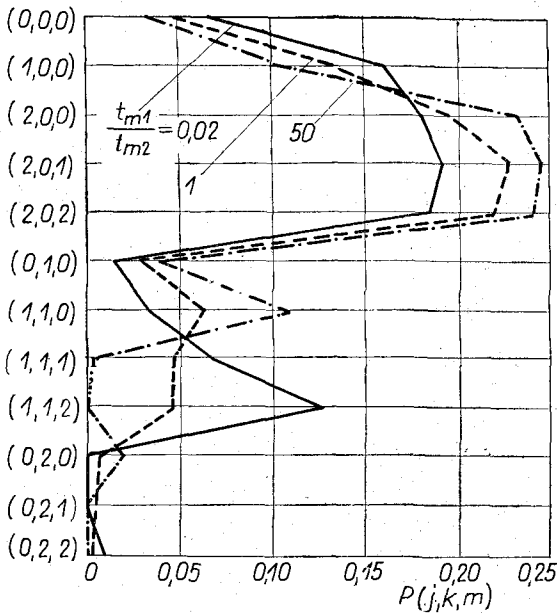
Rendszerjellemzők szélsőséges értékei,  $A_1 = 0,5$  erl,  $A_2 = 0,25$  erl

$t_{m1}/t_{m2}$	$B_1$	$B_2$	$B_{tot}$	$P(>0)$	$t_w/t_{m1}$
50	0,00278	0,155	0,0536	0,151	0,0499
1	0,00499	0,156	0,0554	0,149	0,0876
0,02	0,01780	0,158	0,0648	0,136	0,1715

5. táblázat

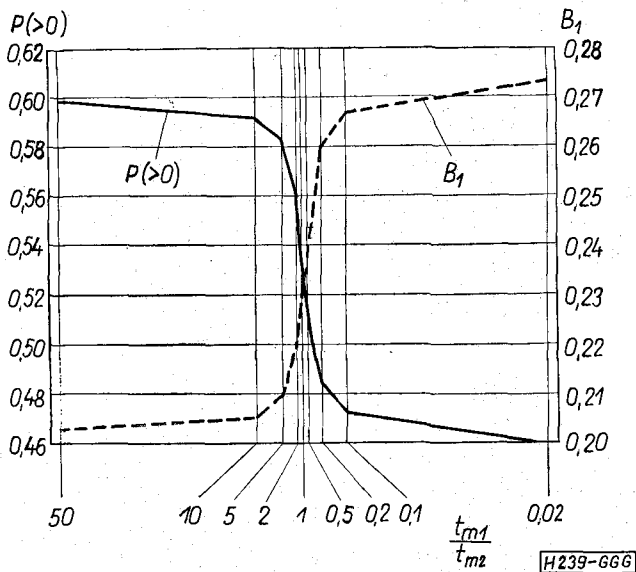
Rendszerjellemzők szélsőséges értékei,  $A_1 = 0,3$  erl,  $A_2 = 0,1$  erl

$t_{m1}/t_{m2}$	$B_1$	$B_2$	$B_{tot}$	$P(>0)$	$t_w/t_{m1}$
50	0,000403	0,0535	0,0137	0,0528	0,0183
1	0,000651	0,0538	0,0139	0,0525	0,0291
0,02	0,003000	0,0550	0,0160	0,0509	0,0576



2B rendszer;  $n=2$   $A_1 = 2$  erl  
 $M=2$   $A_2 = 1$  erl  
 $N_1 = N_2 = 15$  [H239-665]

5. ábra. Állapotok valószínűségének változása  $t_{m1}/t_{m2}$  függvényében



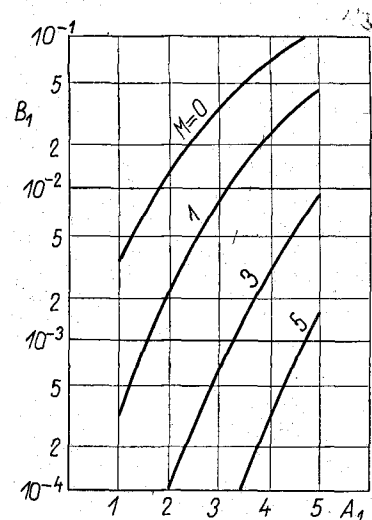
6. ábra. A rendszerjellemzők változása  $t_{m1}/t_{m2}$  függvényében

A változások nagyságának szemléltetésére a 3., 4. és 5. táblázatban a két szélsőséges értéket tüntettük fel, a  $t_{m1} = t_{m2}$ -hez tartozó értékkel együtt.

Ha  $B_1$  kicsi, akkor  $B_2$  növekszik  $t_{m1}/t_{m2}$  csökkenésével, amint azt PRATT korlátlan várakozási sor esetében megállapította [4]. Ha  $B_1$  nem hanyagolható el, akkor  $t_{m1}/t_{m2}$  csökkenése  $B_1$  növekedését és  $B_2$  csökkenését eredményezi. A jellemző értékek változásának mértéke a  $t_{m1}/t_{m2} = 1$  esethez képest különböző,  $B_1$  és  $t_w/t_{m1}$  változása a legnagyobb.

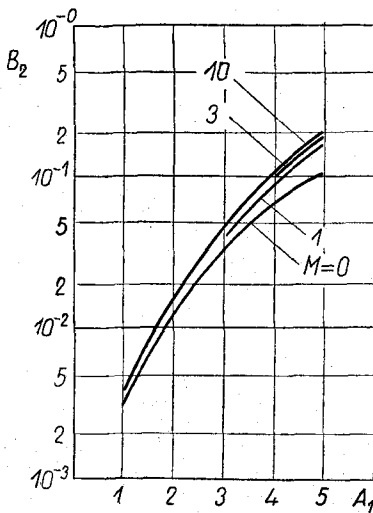
5.2 A várakozási helyek számának hatása

A vizsgált rendszerekben  $M$  növekedésével  $B_1$  és  $B_{tot}$  csökken,  $B_2 P(>0)$  és  $t_w/t_{m1}$  növekszik. Minden jellemző értéke fokozatosan tart a korlátlan várakozási sorra vonatkozó értékhez. A 7. és 8. ábrán az ( $n=10$ ,  $N_1=N_2=15$ , 2A) rendszerre kapott eredmények láthatók.



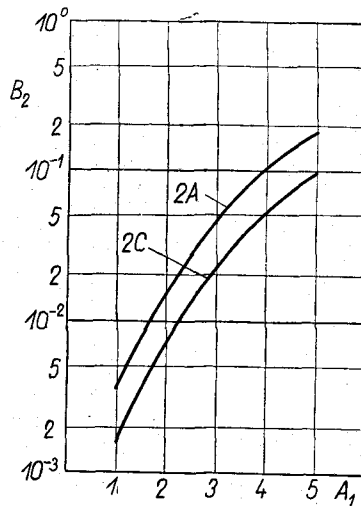
2A rendszer;  $n=10$   
 $N_1 = N_2 = 15$   
 $A_2 = 3$  erl [H239-667]

7. ábra. A várakozásos típusú hívások hívástorlódása  $A_1$  és  $M$  függvényében



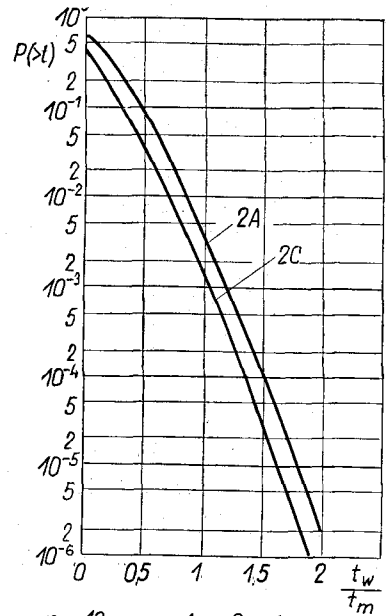
2A rendszer;  $n = 10$   
 $N_1 = N_2 = 15$   
 $A_2 = 3 \text{ erl}$

[H239-668]



$n = 10$   
 $N_1 = N_2 = 50$   
 $M = 5$   
 $A_2 = 3 \text{ erl}$

[H239-669]



$n = 10$        $A_1 = 9 \text{ erl}$   
 $N_1 = N_2 = 50$        $A_2 = 3 \text{ erl}$   
 $M = 5$

[H239-6610]

8. ábra. A veszteséges típusú hívások hívástorlódása  $A_1$  és  $M$  függvényében

9. ábra. Veszteséges típusú hívások hívástorlódása a 2A és 2C rendszerekben

10. ábra. A várakozási idő eloszlása a 2A és 2C rendszerben

5.3 A foglalt előfizetők hatása

Egyforma felajánlott forgalmak mellett a 2C rendszerben a 2A rendszerhez képest kisebb a lebonyolított forgalom. A foglalt előfizetőre irányuló hívások ugyanis elvesznek és elhagyják a rendszert. Az összes vonal foglaltsága miatti torlódási értékek és a várakozás jellemző értékei is kedvezőbbek lesznek, amint az a 9. és 10. ábrán látható, ( $n = 10, N_1 = N_2 = 15, M = 5$ , 2A és 2C rendszerek).

6. Következtetések

A várakozásosan és veszteségesen kiszolgált forgalmat lebonyolító, egyfokozatú, teljes elérhetőségű vonalnalábok méretezéséhez véletlen bemenet, exponenciális tartásidők, véges számú forgalomforrás és korlátozott várakozási sor esetére pontos módszert sikerült kidolgozni. Kétirányú vonalnalábhoz, ha a várakozásos típusú és veszteséges típusú hívások átlagos tartásideje egyforma, zárt összefüggés adható meg az állapotvalószínűségekre, amelyekben a hívott foglaltságának hatása is figyelembe vehető. Egyirányú vonalnalábokhoz, és különböző átlagos tartásidő esetében kétirányú vonalnalábokhoz is, zárt összefüggés hiányában az állapot-valószínűségeket közvetlenül a lineáris egyenletrendszerből kell megmaghatározni. Az egyenletrendszer megoldásához a folyamatos túrelaxálás módszerét alkalmaztuk, amely számítógépet felhasználva nagy rendszerek esetében is jó hatásfokú.

A vizsgálatok azt mutatták, hogy a hívások típusonként különböző átlagos tartásideje kis veszteségek esetében, főleg a várakozásos típusú hívások hívástorlódását és relatív átlagos várakozási idejét be-

folyásolja. Ugyanakkor a veszteséges típusú hívások hívástorlódása viszonylag kis mértékben változik. A rendszerjellemzők értéke az átlagos tartásidők hányadosának függvényében hataértékekhez tart, a változás mértéke az egyforma átlagos tartásidő környezetében a legnagyobb. A várakozási idő eloszlásával kapcsolatban még további vizsgálatok szükségesek.

A hívott foglaltsága miatt elvesző hívások következtében a vizsgált kétirányú vonalnalábban csökken a lebonyolított forgalom. Ez látszólag teljesítőképesség-növekedést eredményez egy olyan rendszerhez képest, amelyben a foglaltra várakozni lehet. Az elvesző hívások nagyobb hányada miatt azonban kérdéses, hogy a valósághoz hű képet kapunk-e a rendszerről, ha ugyanakkor az ismételt hívások hatásától eltekintünk.

\*

A szerző köszönetét fejezi ki Uxa Évának és Jantó Istvánnának számítógép programok megírásáért és vizsgálatok elvégzéséért, továbbá Ágostházi Margitnak és Horváth Imrénének az anyag összeállításában nyújtott segítségükért.

Köszönet illeti Molnár Pált, a BHG GyFO vezetőjét, a munka elvégzésének támogatásáért és a kézirat átnézéséért.

IRODALOM

[1] Cohen, J, W.: Certain delay problems for a full availability trunk group loaded by two traffic sources. Communication News, 16. 1956. 3. pp. 105-113  
 [2] Thlerer, M.: Wartesysteme und gemischte Verlust — und Wartesysteme mit unvollkommener Erreichbarkeit. AEÜ, 23. 1969. 5. pp. 261-267

- [3] *Capetti, I.*: Opportunities provided by the introduction of decentralized switching stages into a large subscribers network. Prebook of the 6th ITC, Munich, 1970, 136/1—6
- [4] *Pratt, C. W.*: A group of servers dealing with queuing and non-queuing customers. Prebook of the 6th ITC, Munich, 1970, 335/1—8
- [5] *Herzog, U.*: Calculation of two-way trunk arrangements with different types of traffic Input. Prebook of the 6th ITC, Munich, 1970, 217/1—6
- [6] *Rubas, J.*: Analysis of congestion in small P.A.B.X's. Prebook of the 6th ITC, Munich, 1970, 211/1—8
- [7] *Carlsson, S. G., Elldin, A.*: Solving equations of state in telephone traffic theory with digital computer. Ericsson Technics, 14. 1958. 2. pp. 221-244
- [8] *Young, D. M.*: Iterative solution of large linear systems. Academic Press, New York—London, 1971. p. 570
- [9] *Segal, M.*: A multiserver system with a finite number of sources and delayed requests served at random. Prebook of the 6th ITC, Munich, 1970, 332/1—4
- [10] *Kühn, P.*: On a combined delay and loss system with different queue disciplines. 6. Prague Conf. on Math. Stat., Inf. Theory and Stochastic Proc., Prague, 1971.
- [11] *Störmer, H.*, — and others: Verkehrstheorie. Oldenbourg München—Wien, 1966. p. 303
-