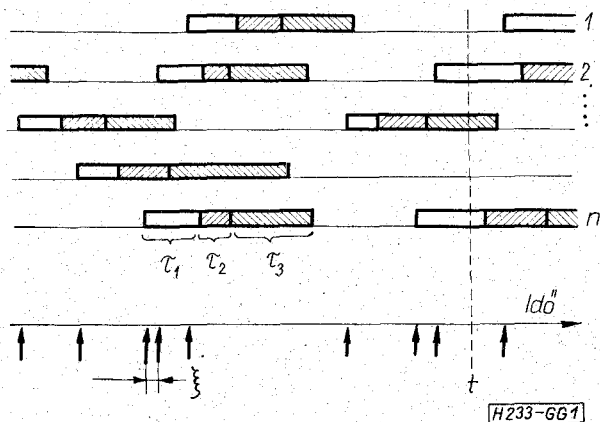


Várakozásos és veszteséges rendszerek többfázisú hívásokkal*

ETO 519.24:054.027

Automatikus telefonközpontokban a hívó és a hívott összekapcsolása után először csengető áramot küldenek a hívott felé, majd annak jelentkezése után kerül sor magára a beszélgetésre az összeköttetésen át. Ebben a tömegkiszolgálási rendszerben a beérkező igények kiszolgálása két fázisra bontható (csengetés, ill. beszélgetés). Az igény (hívás) az egymást követő kiszolgálási fázisokban ugyanazt a kiszolgáló szervet használja (ugyanazt az összeköttetést foglalja le). A fázisok között nincs szünet. A kiszolgálás módja az egyes fázisokban különböző, ezért a fázisok szétválasztása indokolt. Az igény a kiszolgálószerven kívül esetleg további berendezéseket is igénybe vehet (pl. a csengető- és hangáramkört az első fázisban), ez a tömegkiszolgálási jellemzőket itt nem befolyásolja. A csengető- és hangáramkörök szükséges teljesítményének meghatározásához azonban tudni kell, hogy egyidejűleg hány vonal van csengetési állapotban.



1. ábra. Többfázisú igények kiszolgálása

Az ilyen típusú rendszerekben kettőnél több fázis is lehetséges. A kiszolgálás menetét egy példán az 1. ábra szemlélteti. Az időtengelyre merőleges nyilak az igények beérkezését jelzik, az időtengellyel párhuzamosan a kiszolgálószervet tüntettük fel. Összesen n kiszolgálószerv van. Kiszolgálás a fekvő téglalapok által kijelölt időtartamban van. A téglalapok felosztása a fázisokat szemlélteti. A t időpontban pl. összesen három igény kiszolgálása folyik, ezek közül kettő az első és egy a harmadik fázisban van. A τ_1 , τ_2 és τ_3 valószínűségi változók a hívás tartásidejét jelentik az egyes fázisokban, a ξ valószínűségi vál-

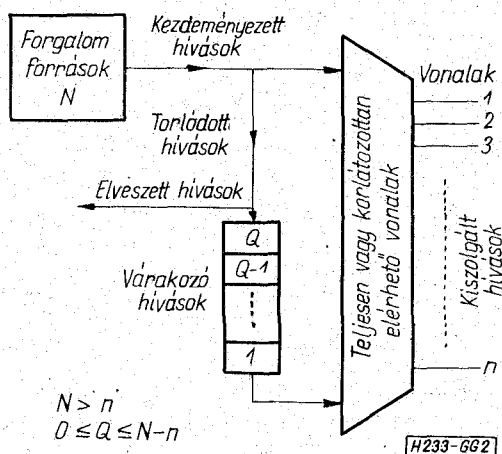
tozó a két egymást követő hívás beérkezése közötti időtartam.

Az előjáróban említett példán kívül még számos olyan tömegkiszolgálási rendszer van, amelyben az igényeket az ábrán látható módon (több fázisban) szolgálják ki és vizsgálatukhoz, méretezésükhöz az egyes fázisokban tartózkodó igények darabszámának valószínűségi eloszlására van szükség (pl. telefonkezelők egy-egy hívással csak az összeköttetés létrehozásának egy részében foglalkoznak; légitársaságok irodáiban a központi számítógépet az ügyfél kiszolgálásának csak egyik fázisában veszik igénybe stb.). A továbbiakban feltételezzük, hogy az egyes fázisokban esetleg igénybe vett további berendezések, kiszolgáló szervek, korlátlanul rendelkezésre állnak és így nem hatnak vissza a rendszerre.

A probléma általánosabb jellegére csak a figyelmet kívántuk felhívni, a továbbiakban azonban, a vizsgálat során, a telefonforgalom-elmélet megnevezéseit alkalmazzuk [1]. Úgy véljük, hogy a kapott eredmények általánosabb érvényét a használt elnevezés-rendszer nem fogja elfedni.

A 2. ábrán részletesen látható a vizsgált rendszer. A forgalom-források hívásokat kezdeményeznek, a hívásokat a teljesen vagy korlátozottan elérhető vonalak bonyolítják le. A torlódott hívások várakozhatnak, feltéve, hogy van üres várakozási hely, ha nincs, akkor a hívások elvesznek. Az alkalmazott jelöléseket az ábrán feltüntettük.

Többfázisú igények kiszolgálásának kérdéseivel Kőnig és Matthes [2], továbbá Kőnig [3] foglalkozott Erlang, ill. Engset képletének általánosítása kapcsán. A kiszolgálási idővel kapcsolatos feltevéseik nagyon általánosak, az alkalmazott matematikai módszer bonyolult. A kapott eredmény



2. ábra. Egyirányú várakozásos-vesztéges rendszer; N — a forgalom-források száma; n — a vonalak száma; Q — a várakozási helyek száma

* A szerzőnek a Számítástudományi Konferencián (Computer Science Conference, Székesfehérvár, 1973. május 21–24.) elhangzott előadása.

Beérkezett: 1973. VII. 6.

veszteséges, teljes elérhetőségű vonalnyalábra érvényes.

Annak érdekében, hogy veszteséges, korlátozott elérhetőségű és várakozásos rendszerek egyszerű számítása is lehetővé váljék, vizsgálatainkban a születési és kihalási folyamatok módszerét alkalmaztuk.

A vázlatosan felsorolandó eredmények egy része [4]-ben található. A továbbiakban a vizsgált rendszert egyszerűen többfázisú rendszernek nevezzük.

A vizsgálat során alkalmazott matematikai modellt az 1. részben ismertetjük. A 2. részben a többfázisú rendszer állapotaival és a lehetséges átmenetekkel foglalkozunk. Az állapotvalószínűségek meghatározására a 3. részben kerülül. A veszteséges rendszerre kapott általános összefüggés alapján jellegzetes fázis eloszlásokat mutatunk be a 4. részben. Az 5. rész az állapot-valószínűségek és eloszlások kiszámításának kérdéseit tárgyalja. Végül a 6. részben néhány egyszerű példa szerepel a kapott eredmények gyakorlati alkalmazására.

1. Matematikai modell

Feltételezzük, hogy a hívások véletlenszerűen érkeznek, azaz a hívásigények beérkezése közötti ξ időtartamok egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségű változók.

A hívásigények beérkezésének átlagos intenzitása, vagyis a beérkezések közötti átlagos időtartam reciproka lehet a rendszer állapotától függetlenül állandó (Poisson bemenet) vagy függhet a pillanatnyilag szabad forgalomforrások számától, és lehet szakaszosan állandó (Bernoulli bemenet). Előbbi esetben az intenzitást λ , utóbbi esetben $(N-i)\alpha$ jelöli, ahol az N az összes, i pedig a foglalt forgalomforrások darabszáma. α a szabad forgalomforrás hívás-intenzitása.

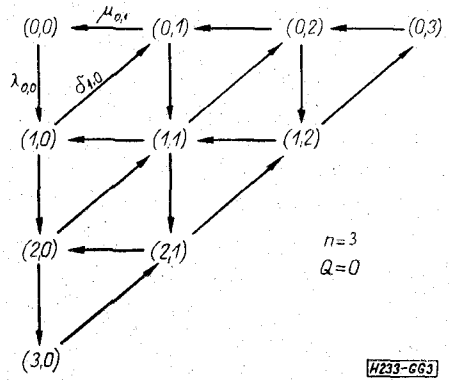
A beérkező hívásigény várakozhat, ha az összes, számára elérhető vonalat foglaltnak találja, feltéve, hogy a rendszerben van üres várakozási hely. Ilyenek hiányában a hívás elvész.

A hívások tartásideje egymástól független, a τ_i tartásidő az egyes fázisokban a többi fázistól független és exponenciális eloszlású. Az átlagos tartásidő az i fázisban $1/\mu_i$, egy adott hívás az i -edik fázisban átlagosán μ_i intenzitással szűnik meg.

A telefonforgalom-elméletben véletlenszerű bemenet és exponenciális tartásidő esetében szokásos az elsőfajú- és a másodfajú tiszta véletlenszerű forgalom elnevezés. Ezt az exponenciális fázis tartásidők miatt általánosítva alkalmazzuk. Rövidítésük PCT1 és PCT2 (Pure Chance Traffic).

Az elvesző hívások azonnal és visszahatás nélkül elhagyják a rendszert, azaz tartásidejük zérus, és nem idéznek elő ismételt hívásigényeket. A várakozó hívásokat érkezésük sorrendjében szolgálják ki, a várakozó hívások nem hagyják el a sort a kiszolgálás megkezdése előtt.

A hívások a kiszolgálási fázisokat azonos sorrendben érintik, minden hívás áthalad az összes fázison, a hívások kiszolgálás alatt nem változtatnak vonalait.



3. ábra. A kétfázisú veszteséges rendszer állapotai

Feltételezzük, hogy a rendszer statisztikai egyensúlyban van és így a rendszer állapotainak valószínűségét az (előre irányú) Kolmogorov egyenletekből adódó lineáris állapot-egyenletrendszerből lehet meghatározni.

2. A többfázisú rendszer állapotai

Ha p fázisú a kiszolgálás akkor a vizsgált rendszer állapotának jellemzéséhez $(p+1)$ paraméter szükséges. Az $(x_1, x_2, \dots, x_p, m)$ állapotban az i fázisban $x_i, i=1, \dots, p$, hívás tartózkodik, továbbá m hívás várakozik. Az állapottér $(p+1)$ dimenziós. A paraméterekre az alábbi összefüggések érvényesek:

$$\sum_{i=1}^p x_i = a \text{ foglalt vonalak darabszáma,}$$

$$\sum_{i=1}^p x_i + m = a \text{ foglalt forgalomforrások darabszáma.}$$

Az állapottér könnyebb szemléltetése és egyszerűbb számítások érdekében vizsgálatainkat a kétfázisú kiszolgálás esetére mutatjuk be. Az eredmények kiterjesztésének a sokfázisú kiszolgálásra nincs akadálya. Hasonló okok miatt a veszteséges és a várakozásos kiszolgálás tárgyalását szétválasztjuk.

2.1 Veszteséges rendszer, állapottér és állapotegyenletek

A rendszer lehetséges állapotait egy példa kapcsán a 3. ábra mutatja. Az állapotokat két paraméterrel lehet megadni, mivel várakozó hívás nincs. Az állapotok jelölése (x_1, x_2) helyett (j, k) . A rendszerben a lehetséges állapotok között háromféle átmenet lehetséges:

a) Sikeres hívás keletkezése

$$(j, k) \xrightarrow{\lambda_{j,k}} (j+1, k).$$

b) Fázisátmenet

$$(j, k) \xrightarrow{\delta_{j,k}} (j-1, k+1).$$

c) A hívás befejeződése

$$(j, k) \xrightarrow{\mu_{j,k}} (j, k-1).$$

Az állapotokat összekötő nyíl fölött az átmeneti valószínűségeket tüntettük fel. Ezek állapotfüggését az index jelzi. Csak a 3. ábrán feltüntetett állapotok lehetségesek, ezért csak az ábrán is nyíllal jelölt átmeneti valószínűségek különböznek zérustól.

Az átmeneti valószínűségek alakja az alábbi:

$$\lambda_{j,k} = \lambda_{j,k}^* (1 - \sigma_{j,k}) \quad (1)$$

$$\delta_{j,k} = j\mu_1 \quad (2)$$

$$\mu_{j,k} = k\mu_2 \quad (3)$$

ahol $\lambda_{j,k}^*$ a hívások keletkezési intenzitása a (j, k) állapotban és PCT1 esetében $\lambda_{j,k}^* = \lambda$. PCT2 esetében pedig $\lambda_{j,k}^* = [N - (j+k)]\alpha$. $\sigma_{j,k}$ a lezárási valószínűség. Megadja a hívástorlódás (pl. veszteség) valószínűségét a (j, k) állapotban, ha egyébként van még szabad vonal. Ha $j+k=n$, akkor $\sigma_{j,k} = 1$.

A lezárási valószínűséggel a korlátozott elérhető rendszerek (keverés, csatolóutas rendszer) okozta többlet hívás torlódást (pl. veszteséget) lehet figyelembe venni, vagyis azt a tényt, hogy a szabad

vonalat a hívás az adott bemenetről valamilyen ok miatt nem tudja elérni. Ugyancsak a $\sigma_{j,k}$ valószínűséggel jellemezhetjük azt a helyzetet, ha a hívás kiszolgálása a hívott foglaltsága miatt nem valósulhat meg. A nehézséget a $a_{j,k}$ valószínűségek pontos alakjának meghatározása szokta jelenteni.

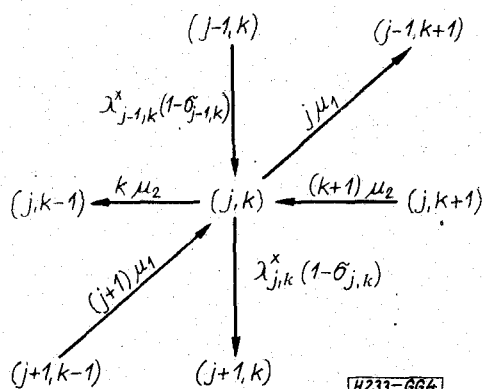
Összefoglalva, a 4. ábrán feltüntetjük a (j, k) állapotot a „szomszédos” állapotokkal és a fenti átmeneti valószínűségekkel.

A veszteséges kétfázisú rendszer állapotegyenleteinek általános tagja tehát az alábbi alakú:

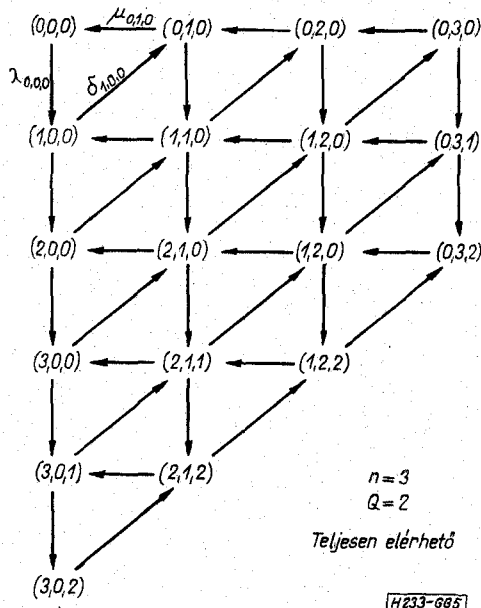
$$[\lambda_{j,k}^*(1 - \sigma_{j,k}) + j\mu_1 + k\mu_2]P_{j,k} = \lambda_{j-1,k}^*(1 - \sigma_{j-1,k})P_{j-1,k} + (j+1)\mu_1 P_{j+1,k-1} + (k+1)\mu_2 P_{j,k+1} \quad (4)$$

ahol $P_{j,k}$ a (j, k) állapot valószínűsége. A (4) összefüggés az állapottér határain módosulhat; ebben az esetben a nem létező állapotok, ill. eltűnő átmeneti valószínűségek hiányoznak. Az állapotegyenletek lineáris rendszerét, a megoldáshoz, ki kell egészíteni a normálási feltétellel

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n P_{j,k} = 1. \quad (5)$$



4. ábra. (j, k) és a szomszédos állapotok a kétfázisú veszteséges rendszerben



5. ábra. A kétfázisú várakozásos rendszer állapotai

2.2. Várakozásos rendszer, állapottér és állapotegyenletek

Az 5. ábrán látható állapottér korlátozott darabszámú várakozási hely esetében és teljes elérhetőségű vonalnalábra érvényes. Ha $Q \rightarrow \infty$, akkor az állapottér lefelé végtelen. Az állapotok jelöléséhez az m paraméter, a várakozó hívások darabszáma is szükséges, tehát jelen esetben három paramétert kell alkalmazni. Az állapotok megjelölése: (j, k, m) .

A rendszerben ötféle átmenet lehetséges:

a) Azonnal kiszolgálható hívás keletkezése:

$$(j, k, 0) \xrightarrow{\lambda_{j,k,0}} (j+1, k, 0).$$

b) Torlódó hívás keletkezése:

$$(j, k, m) \xrightarrow{\lambda_{j,k,m}} (j, k, m+i).$$

c) Fázisátmenet:

$$(j, k, m) \xrightarrow{\delta_{j,k,m}} (j-1, k+1, m).$$

d) Hívás befejeződés, ha nincs várakozás:

$$(j, k, 0) \xrightarrow{\mu_{j,k,0}} (j, k-1, 0).$$

a) Hívás befejeződés, ha van várakozó:

$$(j, k, m) \xrightarrow{\mu_{j,k,m}} (j+1, k-1, m-1).$$

Hasonlóan mint a veszteséges rendszerben, csak az 5. ábrán feltüntetett állapotok és átmeneti valószínűségek lehetségesek.

Az átmeneti valószínűségek alakja változatlan, de PCT2 esetében $\lambda_{j,k,m}^* = [N - (j+k+m)]\alpha$.

A vizsgált várakozásos, többfázisú rendszer állapotegyenleteinek általános tagja három különböző esetre írandó fel, a határállapotokat figyelmen kívül hagyva.

I. $m=0, j+k < n$

$$(\lambda_{j,k,0} + \delta_{j,k,0} + \mu_{j,k,0})P_{j,k,0} = \lambda_{j-1,k,0}P_{j-1,k,0} + \delta_{j+1,k-1,0}P_{j+1,k-1,0} + \mu_{j,k+1,0}P_{j,k+1,0} \quad (6a)$$

II. $m=0, j+k=n$

$$(\lambda_{j,k,0} + \delta_{j,k,0} + \mu_{j,k,0})P_{j,k,0} = \lambda_{j-1,k,0}P_{j-1,k,0} + \delta_{j+1,k-1,0}P_{j+1,k-1,0} + \mu_{j-1,k+1,1}P_{j-1,k+1,1} \quad (6b)$$

III. $m > 0, j+k=n$

$$(\lambda_{j,k,m} + \delta_{j,k,m} + \mu_{j,k,m})P_{j,k,m} = \lambda_{j,k,m-1}P_{j,k,m-1} + \delta_{j+1,k-1,m}P_{j+1,k-1,m} + \mu_{j-1,k+1,m+1}P_{j-1,k+1,m+1} \quad (6c)$$

A (6) összefüggések alapján felírható egyenletrendszer megoldásához figyelembe kell venni az alábbi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i P_{j,i-j,0} + \sum_{m=0}^Q \sum_{j=0}^n P_{j,n-j,m} = 1 \quad (7)$$

normálási feltételt is. Ha továbbá a forgalom-források száma nem véges és a várakozási helyek száma korlátlan, akkor megoldás csak abban az esetben létezik, ha $\frac{A}{n} < 1$, ahol A a felajánlott forgalom.

3. Az állapotvalószínűségek meghatározása

3.1 Veszteséges kiszolgálás

Az átmeneti valószínűségek között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{j,k} &= \delta_{j,s} = j\mu_1 \\ \mu_{j,k} &= \mu_{r,k} = k\mu_2 \\ \lambda_{j,k}^*(1 - \sigma_{j,k}) &= \lambda_{r,s}^*(1 - \sigma_{r,s}) = \lambda_i^*(1 - \sigma_i) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ha $j+k=r+s=i$.

A fenti, harmadik egyenlőségben a hívás keletkezési intenzitások egyenlősége mind PCT1, mind PCT2 esetében közvetlenül látható. A lezárási valószínűség alakját a foglalt vonalak darabszáma és elrendezése befolyásolja, azonban bizonyos, hogy az esetek többségében független a foglaltságok fázisonkénti eloszlásától.

A (8) összefüggés alapján kimutatható, hogy a (4) egyenletrendszer általános megoldása:

$$P_{j,k} = \frac{\prod_{i=0}^{j+k-1} \lambda_i^*(1 - \delta_i)}{j! \mu_1^j k! \mu_2^k} P_{0,0} \quad (9)$$

ahol

$$j+k \geq 1.$$

Továbbá az (5) összefüggést is figyelembe véve

$$P_{0,0}^{-1} = 1 + \sum_{s=1}^n \sum_{j=0}^s \frac{\prod_{i=0}^{s-1} \lambda_i^*(1 - \sigma_i)}{j! \mu_1^j (s-j)! \mu_2^{(s-j)}} \quad (10)$$

3.2 Várakozásos kiszolgálás

Várakozásos kiszolgálás esetében az állapot-valószínűségek lineáris egyenletrendszerét általában numerikus eljárással kell megoldani. Kimutatható ugyanis, hogy [4]:

- a) PCT1 és $Q \rightarrow \infty$ esetében a (6) alapján felírható végtelen egyenletrendszernek zárt megoldása legfeljebb $n=1,2$ -re van
- b) PCT2 vagy véges Q esetében a vizsgált egyenletrendszer mindig véges, de az állapot-valószínűségeket zárt formában gyakorlatilag általában szintén nem lehet kifejezni.

A gyakorlatban többnyire a b) eset valósul meg.

A felsorolt nehézségek miatt a várakozásos többfázisú rendszert bonyolultabb esetekre (korlátozott elérhetőség, hívott foglaltságának hatása) ez ideig nem vizsgáltuk.

4. A veszteséges többfázisú rendszer jellemző eloszlásai

A $P_{j,k}$ állapotvalószínűségek ismeretében meghatározzuk a foglalt vonalak darabszámának és az egyes kiszolgálási fázisokban levő hívások darabszámának eloszlását.

A rendszerben összesen v vonal

$$P_v = \sum_{j=0}^v P_{j,v-j} \quad (11)$$

valószínűséggel foglalt. Az első és második fázisban pedig

$$P_v^{(1)} = \sum_{k=0}^{n-v} P_{v,k} \quad (12)$$

illetve

$$P_v^{(2)} = \sum_{j=0}^{n-v} P_{j,v}$$

valószínűséggel tartózkodik v hívás.

4.1 A jogiált vonalak eloszlása

4.1.1 $\sigma_{j,k}=0$

PCT1 esetében az Erlang eloszlást

$$P_v = \frac{A^v}{v!} = E_n^v(A), \quad (13)$$

PCT2 esetében az Engset eloszlást

$$P_v = \frac{\binom{N}{v} \beta^v}{\sum_{s=0}^n \binom{N}{s} \beta^s} = E_{n,N}^v(\beta) \quad (14)$$

kapjuk, ahol

$$A = \lambda \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)$$

a felajánlott forgalom,

$$\beta = \alpha \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)$$

egy szabad forgalomforrás felajánlott forgalma.

Ez az eredmény várható volt, mert mint ismeretes teljes elérhetőségű vonalnyalábon a foglalt vonalak darabszáma Erlang, ill. Engset eloszlású tetszőleges tartásidő eloszlás esetén [5].

4.12. $\sigma_{j,k} \neq 0$, a hívott foglaltságának hatása

A telefontechnikában, mint ismeretes, a hívások kiszolgálását csak akkor kezdik meg, ha a hívott szabad. Ha a hívott foglalt, akkor olyan veszteség keletkezik, amely nem jellemző magának a rendszernek forgalom-áteresztő képességére, hiszen az összeköttetéshez legalább egy szabad vonal rendelkezésre állt. Helytelen volna azonban a jelenséget elhanyagolni, mert a vonalak terhelését nagymértékben befolyásolja. A foglalt előfizetők hatásának vizsgálata újabban az érdeklődés előterébe került. Herzog, ill. Rubas veszteséges rendszerekre vonatkozó számításaikban figyelembe veszik az előfizetők foglaltságát [6], [7]. Várakozásos kiszolgálásra érvényes Gosztony hasonló vizsgálata [8]. A telefonforgalom utánzás „klasszikus” módszerei, a hívottat mindig szabadnak tételezték fel, de Dietrich ezt nem tartja kielégítőnek, több lehetőséget sorol fel és egységes eljárást sürget erre az esetre [9].

Tételezzük fel, hogy a hívás az eddigi értelemben elvész, ha foglalt előfizetőt talál. Ebben az esetben $\sigma_{j,k}$ annak valószínűsége, hogy a hívás a (j, k) állapotban foglalt előfizetőre irányult.

A hívott előfizető foglaltságát pl. az alábbi egyszerű modellel lehet figyelembe venni. Feltételezzük, hogy: (a) a hívott előfizetők darabszáma: M véges és $M > n$, (b) a hívó és hívott előfizetők nem azonosak, (c) a hívottak foglaltságát csak a vonalnyalábon érkező hívások okozhatják, (d) a hívások egyenletesen oszlanak el a hívott előfizetők között.

A feltételek alapján a hívott előfizető foglaltságának valószínűsége:

$$a_{j,k} = \frac{j+k}{M}.$$

Így PCT1 esetében

$$P_v^{(0)} = \frac{\binom{M}{v} \left(\frac{A}{M}\right)^v}{\sum_{s=0}^n \binom{M}{s} \left(\frac{A}{M}\right)^s} = E_{n,(M)}^v \left(\frac{A}{M}\right), \quad (15)$$

PCT2 esetében

$$P_v^{(0)} = \frac{\binom{N}{v} \binom{M}{v} v! \left(\frac{\beta}{M}\right)^v}{\sum_{s=0}^n \binom{N}{s} \binom{M}{s} s! \left(\frac{\beta}{M}\right)^s} = E_{n,N,(H)}^v \left(\frac{\beta}{M}\right). \quad (16)$$

4.2 A foglalt vonalak eloszlása az egyes fázisokban

A $P_v^{(i)}, i=1, 2$, valószínűségeket a 4.1 pontban vizsgált esetekre azonos sorrendben adjuk meg. Hosszadalmas, de egyszerű átalakítások után a fázis-eloszlások nagymértékben hasonló alakra hozhatók.

a) PCT1; $\sigma_{j,k} = 0$

$$P_v^{(0)} = F \frac{E_n^n(A)}{E_{n-v}^{n-v}(A - A_i)}. \quad (17)$$

b) PCT2; $a_{j,k} = 0$

$$P_v^{(0)} = F \frac{E_{n,N}^n(\beta)}{E_{n-v,N-v}^{n-v}(\beta - \beta_i)}. \quad (18)$$

c) PCT1; $\sigma_{j,k} = \frac{j+k}{M}$

$$P_v^{(0)} = F \frac{E_{n,(M)}^n \left(\frac{A}{M}\right)}{E_{n-v,(M-v)}^{n-v} \left(\frac{A - A_i}{M}\right)}. \quad (19)$$

d) PCT2; $a_{j,k} = \frac{j+k}{M}$

$$P_v^{(0)} = F \frac{E_{n,N,(M)}^n \left(\frac{\beta}{M}\right)}{E_{n-v,N-v,(M-v)}^{n-v} \left(\frac{\beta - \beta_i}{M}\right)}. \quad (20)$$

A fenti összefüggésekben

$$F = \binom{n}{v} \frac{\left(\frac{1}{\mu_i}\right)^v \left(\frac{1 - 1}{\mu - \mu_i}\right)^{n-v}}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^n}$$

$$A_i = \lambda / \mu_i$$

$$\beta_i = \alpha / \mu_i$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}.$$

A (17)–(20) eloszlások hasonlósága a kiindulásul szolgáló (13)–(16) eloszlások hasonlóságának következménye. Közvetlenül a (9) általános képletből kiindulva ilyen jellegű alakot nem lehet előállítani.

5. Néhány számítási eljárás

Mind a veszteséges, mind a várakozásos többfázisú rendszer gyakorlatban használt jellemző értékeit (kínálat, hívástorlódás, időtorlódás, lebonyolított forgalom, átlagos várakozási idő), a várakozási idő eloszlásának kivételével, közvetlenül az állapot-valószínűségekkel lehet meghatározni [10], [4].

5.1 Veszteséges rendszer

A $P_{j,k}$ eloszlás (azaz a foglalt vonalaknak az egyes fázisok közti megoszlása) a (11)-ben megadott P_v eloszlás alakját szabja meg. A felsorolt rendszerjellemzőket közvetlenül a P_v eloszlással határozhatjuk meg.

5.11 A P_v eloszlás utolsó tagja

A P_v eloszlás utolsó tagjának kitéüntetett szerepe van. Ugyanis a rendszer forgalom-áteresztő képességét jellemző hívástorlódás PCT1 és teljes elérhetőség esetében megegyezik annak valószínűségével, hogy minden vonal foglalt, $B = P_n$. PCT2 és teljes elérhetőség esetében pedig ugyancsak utolsó tagja egy

olyan eloszlásnak, amelynek minden paramétere megegyezik az eredeti eloszlással, de N helyett $(N-1)$ forgalomforrásra vonatkozik.

Főleg a számítógép előtti időszakban, de még napjainkban is töreksenek arra, hogy bonyolultabb rendszerek forgalmi méretezéséhez használt összefüggéseket ezekre a B értékekre vezessék vissza (pl. Elldin [11]), mert táblázatos formában [12]; [13]; [14] a mindennapi gyakorlat számára ezek a legkönnyebben hozzáférhetők. A (17)–(20) fázis-eloszlási összefüggések is eloszlások utolsó tagjait tartalmazzák.

P_v értéke a (9) és (10) általános összefüggésekből átalakítás után az alábbi alakot ölti:

$$P_v = \sum_{j=0}^v P_{j, v-j} = \frac{\frac{1}{v!} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)^v \prod_{i=0}^{v-1} \lambda_i^* (1 - \sigma_i)}{1 + \sum_{s=1}^n \frac{i}{s!} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)^s \prod_{i=0}^{s-1} \lambda_i^* (1 - \sigma_i)} \quad (21)$$

P_n kiszámításához az alábbi rekurziós eljárás szolgál. Legyen $I_0 = 1$, legyen továbbá

$$I_k = 1 + \frac{k}{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \lambda_{k-1}^* (1 - \sigma_{k-1})} I_{k-1} \quad (22)$$

végül

$$P_n = \frac{1}{I_n}$$

Az Erlang eloszlás kiszámítására a (22) összefüggést már Palm [12] alkalmazta, az Engset eloszlás-hoz Joys [15] közölte. Látható, hogy az eljárás általánosabb érvényű.

Megjegyezzük, hogy PCT2 esetében a kínálat és így a szabad forgalomforrások β kínálata is függ a B hívástorlódástól (cf. pl. Störmer [10] p. 70). Adott kínálat-hoz ezért iterációs eljárással lehet meghatározni a hozzá tartozó B értéket. A számítás során a (22) összefüggés előnyösen alkalmazható [14].

5.12 A P_v eloszlás

Ha a számítás során a teljes eloszlásra van szükségünk és az eloszlás paraméterei nem változnak, akkor célszerűbb az egész eloszlást tárolni, mint a szükséges tagokat esetenként meghatározni. A teljes eloszlást előnyösen számíthatjuk ki az alábbi eljárással

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \lambda_{i-1}^* (1 - \sigma_{i-1})}{i} K_{i-1} \\ K_0 &= 1 \\ P_v &= \frac{K_v}{\sum_{i=1}^n K_i} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Ha az eloszlás paraméterei gyakran változnak, akkor λ_i^* és $(1 - \sigma_i)$ alakjától függően lehet bizonyos tagokat állandóan tárolni és az eloszlás tagjait esetenként célszerű kiszámítani. Pl. a (13)–(16) eloszlásokhoz a binomiális együtthatók és faktoriálisok szükséges tartománya tárolható tartósan.

5.13 A $P_{j, k}$ valószínűségek

Előfordulhat, hogy a (9) és (10) összefüggésekből P_v -re nem adódik zárt összefüggés. Ezért szükségesé válik a $P_{j, k}$ állapotvalószínűségek közvetlen kiszámítása. A számítás egy lehetséges menete az, ha a $j+k = \text{állandó}$ tagok mentén haladunk (cf. a 3. ábrát). Az eljárás az alábbi:

$$\left. \begin{aligned} K_{0,0} &= 1 \\ K_{s,0} &= \frac{\lambda_{s-1}^* (1 - \sigma_{s-1})}{s \mu_1} K_{s-1,0} \quad 1 \leq s \leq n \\ K_{j,k} &= \frac{(j+1) \mu_1}{k \mu_2} K_{j+1, k-1} \quad j+k=s \\ P_{j,k} &= \frac{K_{j,k}}{\sum_{s=0}^n \sum_{i=0}^s K_{s-i, i}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

5.2 Várakozásos rendszer

A (6) egyenletrendszerből a $P_{j, k, m}$ állapotvalószínűségeket zárt formában előállítani általában nem lehet.

$n=1, 2$ kivételével ugyanis az egyenletek nem csoportosíthatók úgy, hogy az egyes állapotvalószínűségeket a szokásos módon sorban ki lehessen fejezni pl. $P_{0,0,0}$ -val [4].

5.21 Véges egyenletrendszer (cf. 3.2b)

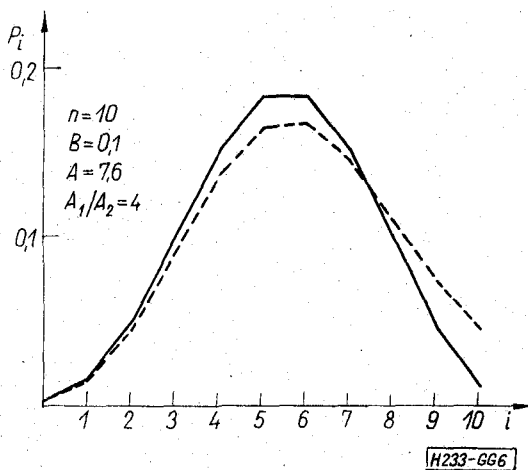
A megoldandó egyenletrendszer mátrixa ritka. A vizsgált esetben pl. egyenletenként legfeljebb négy ismeretlent tartalmaz, kivéve a normálási feltételt. Ilyen esetben az iterációs megoldási eljárások előnyösen alkalmazhatók. Pl. a folyamatos túlrelaxálás ω tényezőjét a gyors konvergenciához lehet optimálisan megválasztani [16]. Ennek feltétele azonban egy, a vizsgálttal azonos nagyságú mátrix legnagyobb saját-értékének meghatározása. Valószínűleg célszerűbb, ha a probléma vizsgálata során gyakorlati tapasztalatot szerzünk a rendszer paraméterei, a megkívánt pontosság és az optimális ω közti összefüggésre [17], [18], és ω -t ennek kapcsán az optimum környezetében vesszük fel.

5.22 Végtelen egyenletrendszer (cf. 3.2a)

Ha léteznek az ergodikusság állapotvalószínűségei (kezdeti feltételeink mellett ez akkor teljesül, ha $\lambda \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) < n$), akkor a $P_{j, k, m}$ állapotvalószínűségek egy bizonyos $m \geq q$ értéktől kezdve gyakorlatilag elhanyagolhatók. A követendő eljárás az előbbi, q értékének meghatározásához azonban az egyenletrendszert esetleg többször meg kell oldani különböző számú ismeretlenre.

6. Néhány gyakorlati eredmény

A bevezetésben említett gyakorlati probléma megoldásához a telefonközpont csengető és hangáramköreinek méretezéséhez eddig közelítő módszert alkalmaztak. Veszteséges rendszer esetében szokásos és egyszerű közelítés az, hogy csak a csengetési

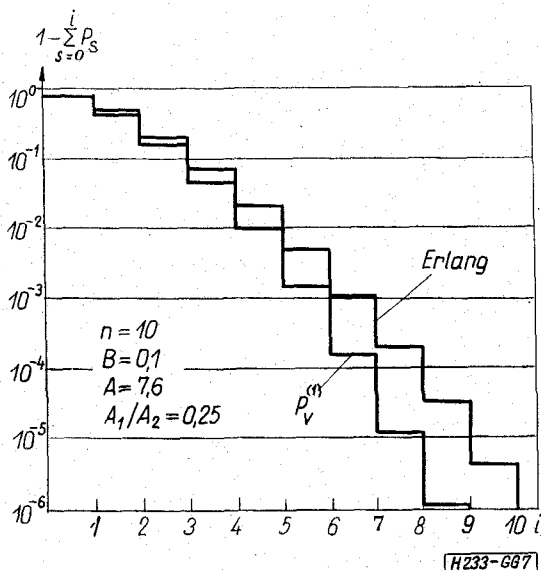


6. ábra. Eloszlások összehasonlítása

forgalomból határozzák meg, hogy egyidejűleg hány vonal van csengetési állapotban pl. Poisson vagy Erlang eloszlás alapján.

Kimutatható, hogy a (17) fáziseloszlási valószínűség utolsó tagjai mindig kisebbek, mint egy olyan Erlang eloszlás tagjai, amelyben a forgalom éppen a fázis forgalma. A két eloszlás metszéspontja számos tényezőtől függ, amelyeket nem részletezünk. Az eltérés kicsi, ha a vonalnyaláb veszteségének (hívástorlódásának) valószínűsége 0,01, vagy kevesebb, nagy veszteségek esetében azonban már jelentős lehet. A 6. ábrán B a veszteség valószínűsége, A_1 és A_2 az első, ill. második fázis forgalma, az ábrával az eltérés jellegét kívántuk szemléltetni.

A 7. ábrán a $P_v^{(n)}$ fáziseloszlási- és az Erlang eloszlások kiegészítő eloszlás függvénye látható. Ebből méretezhető az említett áramkör, ha az az előírás, hogy a névlegesnél több vonal egyidejűleg csengetési állapotban csak előre megadott kis valószínűséggel lehet. Látható, hogy az alkalmazott közelítés esetében $P_v^{(n)}$ kiegészítő eloszlása mindig kisebb.



7. ábra. Kiegészítő eloszlások összehasonlítása

7. Következtetések

Többfázisú hívásokat kiszolgáló, veszteséges rendszerek állapot-valószínűségeit korlátozott elérhetőség esetében zárt összefüggéssel lehet kiszámítani, ha a hívásigények véletlenszerűen érkeznek és a tartásidők az egyes fázisokban exponenciális eloszlásúak. A számításokhoz könnyen kezelhető rekurziós eljárások adhatók meg. A korlátozott elérhetőség különleges esete az, ha a hívott foglaltságának hatását figyelembe vesszük, a képletekben szereplő ún. lezárási valószínűség alakja egyszerű. Várakozásos rendszerek vizsgálatához zárt összefüggések hiányában az állapot-valószínűségek lineáris rendszerét numerikus eljárással lehet megoldani. A kapott eredményekkel számos, a gyakorlatban előforduló többfázisú rendszer jellemzőit pontosan lehet kiszámítani.

A szerző köszönetét fejezi ki Molnár Pálnak, a BHG Gyártmányfejlesztési Osztály vezetőjének, a munka támogatásáért. Ugyancsak köszönet illeti a szerző munkatársait, Ágostházi Margitot, Jantó Istvánt és Uxa Évát, akik számítógép programok készítésével és az anyag összeállításában nyújtottak segítséget.

IRODALOM

- [1] „Dictionary of english language terms (Report of the Nomenclature Committee)”, 5. ITC, New York, 1967. Preprint Book, pp. 588–592.
- [2] König, D., Matthes, K., „Verallgemeinerungen der Erlangischen Formeln I“. Mathematische Nachrichten, 26. 1963. 1/4. pp. 45–56.
- [3] König, D., „Verallgemeinerungen der Engsettschen Formel“, Mathematische Nachrichten, 28. 1965. 3/4. pp. 145–155.
- [4] Gosztony G., „Tömegkiszolgálási rendszerek többfázisú kiszolgálással“. Egyetemi doktori dolgozat, ELTE TTK, Budapest, 1972.
- [5] Syski, R., „Introduction to congestion theory of telephone systems“, Oliver and Boyd, London, 1960. p. 742.
- [6] Herzog, U., „Calculations of two-way trunk arrangements with different types of traffic input“, 6. ITC, Munich, 1970, Preprint Book, pp. 217/1–6.
- [7] Rubas, J., „Analysis of congestion in small PABX's“, 6. ITC, Munich, 1970, Preprint Book, pp. 211/1–8.
- [8] Gosztony, G., „Full availability one-way and both-way trunk groups with delay and loss type traffic, finite number of traffic sources, and limited queue length“, 7. ITC, Stockholm, 1973. Preprint Book, pp. 341/1–8.
- [9] Dietrich, G., „Traffic model for the simulation of entire exchanges“, 6. ITC, Munich, 1970. Preprint Book, pp. 413/1–5.
- [10] Störmer, H., and others, *Verkehrstheorie*, Oldenbourg, München–Wien, 1966, p. 303.
- [11] Elldin, A., „Automatic telephone exchanges with crossbar switches, switch calculations“, LM. Ericsson, Stockholm, No. 18720, 1967. 3rd edition, p. 63.
- [12] Palm, C., „Table of the Erlang loss formula“, Kungl. Telestyrelsen, Stockholm, 1964. 3rd edition, p. 60.
- [13] Telephone traffic theory tables and charts, Siemens AG, Berlin–München, 1970, p. 420.
- [14] Rubas, J., „Table of the Engset Loss Formula“, Melbourne, 1969., p. 55.
- [15] Joys, L. A., „Variations of the Erlang, Engset and Jacobaeus formulae“, 5. ITC, New York, 1967, Preprint Book, pp. 107–111.
- [16] Young, D. M., „Iterative solution of large linear systems“, Academic Press, New York–London, 1971, p. 570.
- [17] Carlsson, S. G., Elldin, A., „Solving equations of state in telephone traffic theory with digital computers“, Ericsson Techn. 14. 1958, 2. pp. 221–244.
- [18] Uxa É., „A telefonforgalom-elmélet állapotegyenlet-rendszereinek megoldása asztali számítógéppel.“ BHG–Orion–TRT Műszaki Közlemények, 18. 1972. 6.