

TRÓN TIBOR

Budapesti Műszaki Egyetem  
Híradástechnikai Elektronika Intézet

## Hálózatszintézis az állapotváltozók alapján

ETO 621.372.22.001.2

Egy előző cikkünkben [1] összefoglaló ismertetést adtunk az utóbbi időben egyre elterjedtebben használt ún. állapotváltozós módszerről. Megmutattuk, hogy ha a hálózatot leíró egyenletrendszerben független változóknak a kapacitások feszültségét (töltését) és az induktivitások áramát (fluxusát) választjuk, akkor elsőrendű differenciál-egyenletrendszert kapunk eredményül. Ha a hálózat tranzienis viselkedését akarjuk meghatározni (időtartománybeli analízis), az állapotegyenletek megoldása lényegesen egyszerűbb algoritmusok alapján lehetséges, mint magasabbrendű differenciál-egyenletek esetén (a hálózat megoldásához szükséges kezdeti feltételek az állapotváltozókra adhatók meg a legegyszerűbben). Frekvenciatartománybeli analízis esetén az állapotegyenletekből egyszerűen meghatározhatók a transzfer függvények. Nagy előnye a módszernek, hogy passzív és aktív, időinvariáns és variáns, lineáris és nemlineáris hálózatokra egyaránt használható, vagyis a hálózatok analízisének általános módszereként tekinthető. Az utóbbi években külföldön és hazánkban is egyre több olyan programrendszer születik, melyek az állapotváltozókat használva a hálózatok széles körének analízisét teszik lehetővé [2, 3, 4, 5, 6].

Jelen cikkünkben az állapotváltozós leírás másik oldaláról, a hálózatok szintézisében való felhasználásáról számolunk be. Célunk az, hogy átfogó képet nyújtsunk az állapotváltozós szintézis módszerekről, összefoglaljuk a lineáris, időinvariáns, koncentrált paraméterű hálózatokkal kapcsolatban az irodalomban napjainkig fellelhető főbb eljárásokat. A hangsúlyt az állapotváltozós leírásnak a hálózatszintézisben betöltött szerepére, az új szemléletre szeretnénk helyezni. Ily módon nem törekedhetünk teljességre, a részleteket illetően az irodalomra fogunk utalni.

A második fejezetben a transzfer mátrix és az állapotváltozós modell kapcsolatával, a minimális számú állapotváltozót tartalmazó modellekkel és a

modellek ekvivalenciájával foglalkozunk. A harmadik fejezetben a szintézis első lépését, a transzfer mátrixból a minimális számú állapotváltozót tartalmazó modell (minimál realizáció) előállítását ismertetjük. A negyedik fejezet a passzív hálózatok szintézisét mutatja be: a reaktancia kiemelés, illetve az ellenállás kiemelés elvét alkalmazva, egy pozitív reális minimál realizáció előállításával bármely passzív hálózat szintézise visszavezethető frekvenciafüggetlen, illetve veszteségmentes passzív hálózat realizálására. Nyilvánvaló, hogy az utóbbiak megvalósítása jóval egyszerűbb, mint az eredeti szintézis probléma közvetlen megoldása. Az ötödik fejezet az aktív RC hálózatok esetén illusztrálja az állapotváltozós leírás szerepét egy olyan szintézis eljárás során, ahol a realizálás előbb a reaktáns, majd az aktív rész hálózatok kiemelésével redukálható egyre egyszerűbb feladattá. A hatodik fejezetben az ún. hamis állapotváltozók módszerét ismertetjük, és példaként két, a módszer alapján kidolgozott másodfokú aktív RC alapkapcsolást mutatunk be. A függelékben összefoglalva közlünk néhány, a cikk könnyebb olvasása szempontjából általunk célszerűnek tartott, a hálózatmátrixokkal kapcsolatos fogalmat.

Az állapotváltozós modell és a transzfer mátrix kapcsolata

Lineáris, időinvariáns, koncentrált paraméterű hálózatok állapotváltozós leírásának legegyszerűbb formája az

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

egyenletrendszer, ahol  $\mathbf{x}$  az állapotváltozók (általában a független kapacitás-feszültségek és induktívitas-áramok),  $\mathbf{u}$  a gerjesztések (bemeneti jellemzők),  $\mathbf{y}$  a válaszok (kimeneti jellemzők) vektora,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  és  $\mathbf{D}$  a hálózatot leíró konstans mátrixok [1]. Zérus

kezdeti feltételek mellett a válaszok és gerjesztések kapcsolatát megadó transzfer mátrix az (1) összefüggésekből Laplace-transzformációval nyerhető:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \mathbf{W}(p) \cdot \mathcal{L}[u] \\ \mathbf{W}(p) &= \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2)$$

Az **A**, **B**, **C**, **D** mátrixok ismeretében (2) alapján **W** előállítás egyértelmű. A szintézisnél viszont az előírt (realizálendő) transzfer mátrixból kell a hálózatot leíró **A**, **B**, **C**, **D** mátrixokat (**W** realizációját) meghatározni, hogy előállítsuk a hálózat (1)-nek megfelelő állapotváltozós modelljét. Ez a felbontás azonban nem egyértelmű. Alkalmazzuk ugyanis az állapotvektorra az

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (3)$$

transzformációt [7, 8, 9], vagyis vezessünk be olyan új állapotváltozókat, melyek az eredetiek lineáris kombinációi. Az új változóktól csak azt kívánjuk meg, hogy egymástól függetlenek legyenek, így **T** tetszőleges nonszinguláris négyzetes mátrix lehet. (3)-at (1)-be helyettesítve az

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{CT}^{-1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{u} \end{aligned} \quad (4)$$

új egyenleteket kapjuk, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{TAT}^{-1} & \mathbf{B}_1 &= \mathbf{T}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_1 &= \mathbf{CT}^{-1} & \mathbf{D}_1 &= \mathbf{D} \end{aligned} \quad (5)$$

Az új egyenletekhez tartozó transzfer mátrix (2) alapján

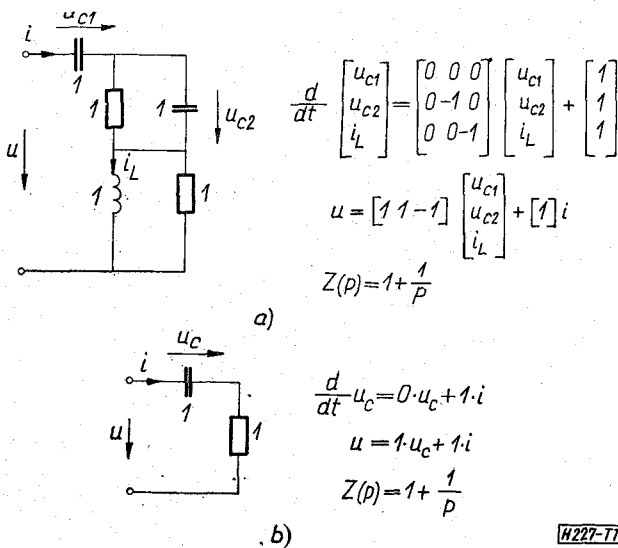
$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1(p) &= \mathbf{C}_1(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1 = \\ &= \mathbf{CT}^{-1}(p\mathbf{TT}^{-1} - \mathbf{TAT}^{-1})^{-1} \mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{W}(p) \end{aligned} \quad (6)$$

vagyis azonos az (1)-hez tartozóval.

A (4) és (6) alatti eredményeket két módon is értelmezhetjük. Az egyik lehetőség az, hogy  $\mathbf{x}_1$  és  $\mathbf{x}$  ugyanannak a hálózatnak két eltérő módon kiválasztott állapotvektora (esetleg  $\mathbf{x}_1$  elemei nem egyetlen kapacitás feszültsége vagy egyetlen induktív árama) — ekkor (6) triviális eredmény. Egy másik értelmezés szerint  $\mathbf{x}_1$  és  $\mathbf{x}$  két különböző hálózatnak az állapotvektora, melyek között a (3) transzformáció szerinti kapcsolat van. Ekkor (6) alapján a transzfer mátrix szempontjából ekvivalens hálózatokról van szó: mindkettő ugyanazt az előírást valósítja meg.

Ha a szintézis során az állapotváltozóknak mindig ugyanazt a jelentést tulajdonítjuk — azaz független kapacitás-feszültségek és induktív-áramok —, akkor az (1) és (4) egyenletek realizálása két különböző kapcsolat eredményez. Egy adott transzfer mátrixnak megfelelő összes — az (1) alatti formát viselő — állapotváltozós modell, mely az (5) transzformációval származtatható egymásból, **W(p)** szempontjából ekvivalens. Így a transzfer mátrix realizálására elvileg végtelen sok ekvivalens kapcsolat nyerhető.

A transzfer mátrix és az állapotváltozós modellek nem egyértelmű kapcsolatát tovább bonyolítja az a tény, hogy különböző számú állapotváltozót tartai-



1. ábra

mazó modellek is vezethetnek ugyanarra a transzfer mátrixra. Erre mutat példát az 1. ábra, ahol az áramot tekintve gerjesztésnek és a feszültséget válasznak, a transzfer mátrixot reprezentáló  $Z(p)$  impedancia mindkét hálózatra ugyanaz. A szintézis alapvető szempontja lehet a minimális elemszámra való törekvés, ami egyben a minimális számú reaktáns elemet, azaz állapotváltozót is jelenti. Ezt is szem előtt kell tartanunk az állapotváltozós modellnek a transzfer mátrixból való előállításakor.

### A minimál realizáció meghatározása

A szintézis első lépése az előírt transzfer mátrixból az ún. minimál realizáció, a minimális számú állapotváltozót tartalmazó (1) alatti modell **A**, **B**, **C**, **D** mátrixainak a meghatározása. Az eljárást Ho algoritmus [10, 11] alapján ismertetjük, a részletes bizonyítást mellőzzük.

Olyan transzfer mátrixból indulunk ki, mely  $p \rightarrow \infty$  esetén véges. Ez a megkötés (2) alapján nyilvánvaló, hiszen  $\mathbf{W}(\infty) = \mathbf{D}$ , tehát az (1) alatti modellel csak a fenti megkötést teljesítő transzfer mátrix-szal rendelkező hálózatok írhatók le. A minimális állapotváltozó szám  $\delta = \delta(\mathbf{W})$ , a  $\mathbf{W}(p)$  mátrix ún. McMillan foka [7, 9], ami bizonyos esetekben a mátrix-elemek közös nevezőjének fokszámával azonos. Ha (2) bal és jobb oldalát sorbafejtjük  $p = \infty$ -nél, a

$$\mathbf{W}(\infty) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i p^{-(i+1)} = \mathbf{D} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{CA}^i \mathbf{B} p^{-(i+1)} \quad (7)$$

egyenlőség tagonkénti összehasonlításával belátható, hogy az  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  négyes akkor és csak akkor lehet  $\mathbf{W}(p)$  realizációja, ha

$$\mathbf{D} = \mathbf{W}(\infty); \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{CA}^i \mathbf{B} \quad (8)$$

teljesül. Utóbbi feltétel jelentheti annak kontrollját, hogy valóban megtaláltuk-e az **A**, **B**, **C** mátrixokat.

Legyen

$$a(p) = \sum_{i=0}^r a_i p^i; \quad a_r = 1 \quad (9)$$

$W(p)$  elemeinek közös nevezője.  $W$  ( $n \times m$ )-es mátrix, vagyis a gerjesztések száma  $m$ , a válaszoké  $n$ , így  $D$  és minden  $K_i$  szintén ( $n \times m$ )-es. Minimál realizáció esetén az állapotváltozók száma  $\delta$ , tehát  $A$  ( $\delta \times \delta$ )-s  $B$  ( $\delta \times m$ )-es,  $C$  ( $n \times \delta$ )-s mátrix. Formáljunk  $K_r$ -kből egy  $(rn \times rn)$ -es  $S_r$  mátrixot (ennek rangja  $= \delta$ ):

$$S_r = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{r-1} \\ K_1 & K_2 & \dots & K_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{r-1} & K_r & \dots & K_{2r-2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

valamint a közös nevező alapján egy  $(rn \times rn)$ -es  $\Omega_n$  mátrixot:

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} 0_n & \mathbf{1}_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & 0_n & \mathbf{1}_n & \dots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & 0_n & 0_n & \dots & \mathbf{1}_n \\ -a_0 \mathbf{1}_n & -a_1 \mathbf{1}_n & -a_2 \mathbf{1}_n & \dots & -a_{r-1} n \mathbf{1}_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

ahol  $0_n$ , ill.  $\mathbf{1}_n$  az  $(n \times n)$ -es zérus, ill. egység mátrix. Az  $\Omega_n S_r$  szorzat az  $S_r$  mátrix sorainak eggyel feljebb tolását eredményezi. Ha bevezetjük még az

$$\mathbf{1}_{n,m} = [\mathbf{1}_n \ 0_{m-n}] \quad (12)$$

mátrixot, fentiek szerint az  $\Omega_n^t S_r$  szorzat-mátrix bal felső eleme

$$K_i = \mathbf{1}_{n,rm} \Omega_n^t S_r \mathbf{1}_{n,rm} \quad (13)$$

vagyis (8) alapján egy lehetséges realizációt kaptunk

$$\mathbf{A} = \Omega_n \quad \mathbf{B} = S_r \mathbf{i}'_{n,rm} \quad \mathbf{C} = \mathbf{1}_{n,rm} \quad \mathbf{D} = W(\infty) \quad (14)$$

formában. Ez általában nem minimál, mivel  $A$  mérete  $(rn \times rn)$ , és legtöbbször  $rn > \delta$ . A minimál realizáció előállítása érdekében diagonalizáljuk  $S_r$ -t elemi transzformációkkal:

$$\mathbf{M} S_r \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{1}'_{\delta,rm} \mathbf{1}_{\delta,rm} \quad (15)$$

ahol  $\mathbf{M}$  és  $\mathbf{N}$  nonszinguláris négyzetes (esetleg alsó és felső háromszög) mátrixok. Bizonyítható [10, 11], hogy az

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{1}_{\delta,rm} \mathbf{M} \Omega_n S_r \mathbf{N} \mathbf{1}'_{\delta,rm} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{1}_{\delta,rm} \mathbf{M} S_r \mathbf{i}'_{n,rm} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{1}_{n,rm} S_r \mathbf{N} \mathbf{1}'_{\delta,rm} \\ \mathbf{D} &= W(\infty) \end{aligned} \quad (16)$$

választás minimál realizáció, azaz  $\mathbf{A}$  ( $\delta \times \delta$ )-s mátrix és (8) teljesül. (16)-ból (5)-nek megfelelően bármely más minimál realizáció előállítható.

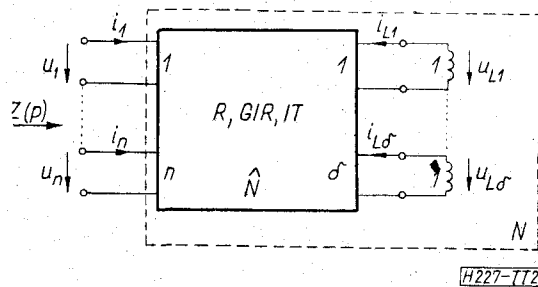
A bemutatott eljárás viszonylag egyszerű algebrai módszerekkel biztosítja egy [és abból (5) alapján bármely más] minimál realizáció előállítását, azaz tetszőleges, (1)-nek megfelelő állapotváltozós modell meghatározását. Az eljárás alkalmazható transzfer mátrixok minden típusára (immittancia, hibrid, reflexiós mátrix), passzív és aktív esetben egyaránt. Más algoritmusokkal kapcsolatban a [18, 12] irodalmakra utalunk.

## Passzív impedancia szintézis

Passzív hálózatok állapotváltozós szintézisét előírt impedancia [13, 14, 15, 17, 20, 30], admittancia [11], hibrid [28] vagy reflexiós [18, 29, 30] mátrixból kiindulva lehet elvégezni. Az első három esetben lényegében azonos módszer használható, hiszen közös megkötés az adott mátrix pozitív reális (PR) volta. Mi az impedancia szintézisen mutatjuk be az állapotváltozós módszer használatát, a többi esetben az irodalomra utalunk.

## Reaktancia kiemelés

Legyen adott a megtervezendő  $n$ -kapu hálózat ( $N$ ) pozitív reális  $Z(p)$  impedancia mátrixa. Ha a reciprocitást nem kötjük ki, azaz már eleve megengedünk girátort, a hálózatban elegendő csak egyféle reaktáns elemet — inductivitást — feltételeznünk, hiszen a kapacitás helyettesíthető girátor-induktivitás kombinációval. Továbbá transzformátor közbeiktatásával, vagy a helyettesítő girátor paramétereinek alkalmas megválasztásával minden inductivitás egységnyinek tekinthető. Az inductivitások kiemelésével  $N$  két részre bontható (2. ábra): csak a frekvenciafüggetlen



2. ábra

elemeket (ellenállások, ideális transzformátorok, girátorok) tartalmazó  $\hat{N}$  ( $n + \delta$ )-kapu hálózatra és ennek  $\delta$ -kapuját lezáró egységnyi inductivitasokra.  $\hat{N}$  jellemezhető a konstans  $\hat{Z}$  impedancia mátrixával

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix} \quad (17)$$

míg az inductivitasokra

$$\mathbf{1}_n \frac{d}{dt} \mathbf{i}_L = -\mathbf{u}_L \quad (18)$$

írható. (17) és (18) egybevetésével

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_L &= -\mathbf{Z}_{22} \mathbf{i}_L - \mathbf{Z}_{21} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_L + \mathbf{Z}_{11} \mathbf{i} \end{aligned} \quad (19)$$

adódik, ami az  $N$  hálózat egy állapotváltozós modellje, ahol

$$\mathbf{A} = -\mathbf{Z}_{22} \quad \mathbf{B} = -\mathbf{Z}_{21} \quad \mathbf{C} = \mathbf{Z}_{12} \quad \mathbf{D} = \mathbf{Z}_{11} \quad (20)$$

vagyis

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Az eredeti  $n$ -kapunál jelentkező impedancia mátrix (20) és (2) alapján

$$\mathbf{Z}(p) = \mathbf{Z}_{11} - \mathbf{Z}_{12}(p\mathbf{1}_s + \mathbf{Z}_{22})^{-1}\mathbf{Z}_{21} \quad (22)$$

Utóbbi eredményünk szerint az  $\hat{N}$  részhálózat  $\hat{\mathbf{Z}}$  impedancia mátrixát az eredeti  $\mathbf{Z}(p)$  egy minimál realizációjaként lehet meghatározni a 3. fejezetben ismertett módszerrel.  $\hat{N}$  viszont csak akkor realizálható passzív elemekkel, ha  $\hat{\mathbf{Z}}$  is PR, amit a minimál realizációt előállító módszer egyáltalán nem garantál. Amennyiben  $\hat{\mathbf{Z}}$  nem PR, szükség van egy alkalmas  $\mathbf{T}$  transzformációra a PR minimál realizáció előállítása érdekében. Passzív szintézisnél tehát alapprobléma egy megfelelő transzformáció meghatározása.

**PR minimál realizáció**

Az alábbiakban bizonyítás nélkül közöljük a PR minimál realizáció előállítására vonatkozó tételeket [11, 14, 19, 20].

(I) Legyen a  $\mathbf{Z}(p)$  valós racionális törtfüggvényekből álló, csak halfélsíkbeli pólusokkal rendelkező  $(n \times n)$ -es mátrix egy tetszőleges minimál realizációja az  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  négyes.  $\mathbf{Z}(p)$  akkor és csak akkor PR, ha léteznek az  $\mathbf{L}, \mathbf{W}_\infty$  és  $\mathbf{P}$  mátrixok (utóbbi szimmetrikus és pozitív definit), melyek kielégítik a (23) egyenleteket:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}'\mathbf{P} = -\mathbf{L}'\mathbf{L} \quad (23a)$$

$$\mathbf{PB} = \mathbf{C}' - \mathbf{L}'\mathbf{W}_\infty \quad (23b)$$

$$\mathbf{D} + \mathbf{D}' = \mathbf{W}_\infty'\mathbf{W}_\infty \quad (23c)$$

(II) Az  $\mathbf{L}$  és  $\mathbf{W}_\infty$  mátrixok meghatározhatók a

$$\mathbf{Z}(p) + \mathbf{Z}'(-p) = \mathbf{W}'(-p)\mathbf{W}(p) \quad (24)$$

által definiált  $\mathbf{W}(p)$  mátrix  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{L}, \mathbf{W}_\infty\}$  minimál realizációjaként. Ekkor  $\mathbf{P}$  a (23a) egyenlet egyértelmű megoldása [21, 22, 23].  $\mathbf{W}(p)$  meghatározására Davis [24], Youla [25] vagy Loo [26] eljárásai használhatók, az  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{L}, \mathbf{W}_\infty\}$  minimál realizációhoz egy tetszőleges  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{W}_\infty\}$  minimál realizációból  $\mathbf{B}$  és  $\mathbf{B}_1$  (5) alatti egybevetésével a szükséges transzformáció adódik. Ha csak  $\mathbf{P}$ -t akarjuk meghatározni, Anderson [20] módszere is használható.

(III) Az (I) alattival analóg tételt mondhatunk ki arra az esetre, ha  $\mathbf{Z}(p)$  minden pólusa a  $j\omega$ -tengelyen van és egyszeres (reaktáns, veszteségmentes eset). Ekkor — mivel pólus a végtelenben nem lehet —  $\mathbf{D} = \mathbf{Z}(\infty) = \mathbf{0}$ , továbbá (24) alapján  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_\infty = \mathbf{0}$  és így  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ . Most tehát  $\mathbf{P}$  egy lehetséges pozitív definit szimmetrikus megoldása a (25) egyenletnek:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}'\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (25a)$$

$$\mathbf{PB} = \mathbf{C}' \quad (25b)$$

(IV) A PR impedancia mátrixot szolgáltató minimál realizáció előállításához szükséges transzformációt a

$$\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{P} \quad (26)$$

összefüggés szolgáltatója  $\mathbf{P}$  felbontásával.  $\mathbf{T}$  nyilván nonszinguláris.

(V) Az (I) vagy (III) alatti esetekben a frekvenciafüggetlen részhálózat PR impedancia mátrixa a fentiek alapján

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{CT}^{-1} \\ -\mathbf{TB} & -\mathbf{TAT}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{1}_n + \mathbf{T}] \hat{\mathbf{Z}}_0 [\mathbf{1}_n + \mathbf{T}^{-1}] \quad (27)$$

ahol  $\hat{\mathbf{Z}}_0$  az eredeti  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  minimál realizációhoz tartozó nem PR impedancia mátrix.

**Passzív szintézis reaktancia kiemeléssel**

Egy tetszőleges PR  $\mathbf{Z}(p)$  mátrix — az állapotváltozós szintézis alkalmazásához — felbontható a

$$\mathbf{Z}(p) = p\mathbf{L}_\infty + \mathbf{Z}_r(p) + \mathbf{Z}_v(p) \quad (28)$$

összegre, ahol az első tag a végtelenbeli, a második a  $j\omega$ -tengelyen levő, míg a harmadik a bal félsíkbeli pólusnak felel meg. Az első tag realizálására az állapotváltozós módszer nem alkalmazható, de egyéb szintézis eljárással (pl. transzformátor-induktivitás hálózattal) viszonylag egyszerűen megvalósítható [16]: az eredményül adódó hálózat a visszamaradó, 2. ábrának megfelelő részzel sorba kapcsolandó. A másik két tagra külön-külön meghatározható egy  $\{\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{0}\}$  és egy  $\{\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v, \mathbf{D}\}$  minimál realizáció, valamint a PR feltételek kielégítéséhez szükséges  $\mathbf{T}_r$  és  $\mathbf{T}_v$  transzformációs mátrixok. Ezekkel a 2. ábra  $\hat{N}$  hálózatának PR impedancia mátrixa (27)-nek megfelelően

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_v \\ -\mathbf{B}_r & -\mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_v & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_r^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_v^{-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

A feladat tehát egy rezisztív hálózat realizálására redukálódott, mely lényegesen egyszerűbb módszerekkel történhet, mint egy frekvenciafüggő hálózaté.  $\hat{\mathbf{Z}}$  pl. megvalósítható girátor-ellenállás hálózattal [11], egyszerű particionáló és diagonalizáló lépések alkalmazásával. A szintézis minimális elemszámú a reaktáns elemeket tekintve, és  $\hat{N}$  realizálása minimális számú ellenállással is lehetséges.

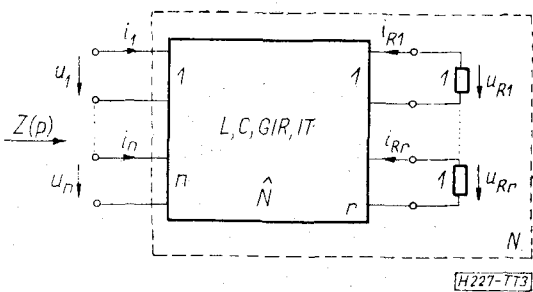
**Ellenállás kiemelés — Darlington szintézis**

A most bemutatandó módszerrel egy általános hálózat szintézisét veszteségmentes hálózat szintézisére vezethetjük vissza [17]. A már ismert eljárásokkal a realizálandó PR  $\mathbf{Z}(p)$  impedancia mátrixnak meghatározzuk egy  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  minimál realizációját és a (23)-ban szereplő  $\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{W}_\infty$  mátrixokat, majd (26) és (5) alapján  $\mathbf{P}$  felhasználásával az  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}\}$  minimál realizációt, továbbá az

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}\mathbf{T}^{-1} \quad (30)$$

mátrixot. Ezekkel a 3. ábrán látható  $N$  hálózat

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{i} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{i} \end{aligned} \quad (31)$$



3. ábra

állapotváltozós modelljéből az  $\hat{N}$  hálózat

$$\begin{pmatrix} (\delta) \\ (n) \\ (r) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ u \\ u_R \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\delta) & (n) & (r) \\ \frac{A_1 - A_1'}{2} & B_1 + \frac{L_1' W_\infty}{2} & -\frac{L_1'}{\sqrt{2}} \\ \left( B_1 + \frac{L_1' W_\infty}{2} \right)' & \frac{D - D'}{2} & \frac{W_\infty}{2} \\ -\frac{L_1}{\sqrt{2}} & -\frac{W_\infty}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ i \\ i_R \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ i \\ i_R \end{bmatrix} \quad (32)$$

állapotváltozós modelljét írhatjuk fel. Ha az  $\hat{N}$  hálózatot a 3. ábra szerint lezárjuk  $r$  darab ( $r = L_1$  és  $W_\infty$  sorainak száma) egységnyi ellenállással, akkor a lezárásokra vonatkozó

$$u_R = -I_1 i_R \quad (33)$$

helyettesítéssel (32) az

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_1 - A_1' - L_1' L_1) & B_1 \\ (B_1 + L_1' W_\infty)' & \frac{1}{2}(D - D' + W_\infty W_\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ i \end{bmatrix} \quad (34)$$

alakra redukálható. (23) az  $A_1, B_1, C_1, L_1$  mátrixok származtatása alapján

$$\begin{aligned} A_1 + A_1' &= -L_1' L_1 \\ B_1 &= C_1' - L_1' W_\infty \\ D + D' &= W_\infty W_\infty \end{aligned} \quad (35)$$

formában is felírható, és ezzel (34)-ből visszkapjuk (31)-et, az eredeti  $Z(p)$  mátrix-szal rendelkező passzív  $N$  hálózat állapotváltozós modelljét. Mivel  $N$  realizálhatósága passzív elemekkel a (26) szerinti  $T$  választással biztosított,  $\hat{N}$  is realizálható passzív elemekkel.  $\hat{N}$  veszteségmentes volta (32)-ből látható be, ahol  $\hat{A}$  és  $\hat{D}$  ún. ferde-szimmetrikus (skew symmetric) mátrixok és  $\hat{C} = \hat{B}'$  [27].

A fenti módszerrel tehát az általános  $N$  hálózat szintézise visszavezethető a veszteségmentes  $\hat{N}$  hálózat állapotváltozós modelljének realizálására.

Utóbbira egy további egyszerűsítést jelenthet, ha alkalmazzuk a reaktancia kiemelés módszerét. A 4. ábrán látható  $\tilde{N}$  hálózat (mely veszteségmentes és frekvenciafüggetlen) impedancia mátrixa ugyanis (19) és (32) összehasonlításával

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} (n) & (r) & (\delta) \\ \frac{D - D'}{2} & \frac{W_\infty'}{\sqrt{2}} & \left( B_1 + \frac{L_1' W_\infty}{2} \right)' \\ -\frac{W_\infty}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{L_1}{\sqrt{2}} \\ -\left( B_1 + \frac{L_1' W_\infty}{2} \right) & \frac{L_1'}{\sqrt{2}} & \frac{A_1' - A_1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (n) \\ (r) \\ (\delta) \end{matrix} \quad (36)$$

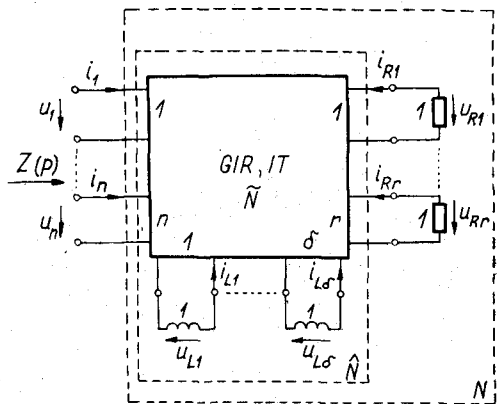
mely például egyszerű girátor hálózattal is realizálható [11, 16]. A girátor nélküli (reciprok) veszteségmentes hálózatok állapotváltozós modelljének realizálásával kapcsolatban a [27, 30] irodalmakra utalunk.

A most bemutatott módszer — a reaktancia kiemeléshez hasonlóan — szintén biztosítja a minimális számú ellenállással és reaktáns elemmel történő realizálást, de általában a girátorok száma itt sem minimális.

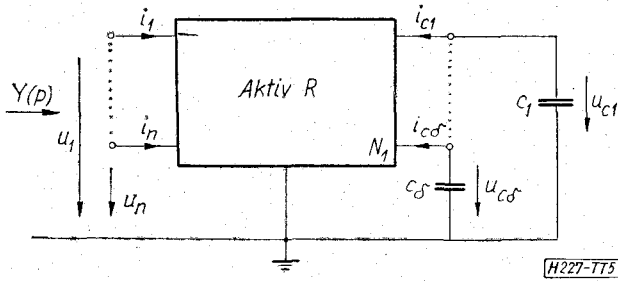
### Aktív BC szintézis

Aktív hálózatok szintézisénel — ha az induktivitásokat, mint az integrált áramköri technológia nemkívánatos elemét, el akarjuk kerülni — célszerű az  $Y(p)$  admittancia mátrix realizálását tűzni ki feladatul. A reaktancia (itt kapacitás) kiemelés módszere most is alkalmazható. Az aktív elemek és kapacitások egyszerűbb realizálhatósága miatt célszerű, ha a hálózat kapuit közös földponttal vesszük fel. Az 5. ábra alapján a kapacitások kiemelése után megmaradó aktív  $R$  hálózat admittancia mátrixára

$$\begin{bmatrix} (n) & (\delta) \\ i \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} = Y_1 \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} \quad (37)$$



4. ábra



5. ábra

és a kapacitásokra

$$i_c = -\mathcal{C} \dot{u}_c \quad \mathcal{C} = \text{diag}\{c_1 \dots c_\delta\} \quad c_i > 0 \quad (38)$$

írható. Utóbbit (37)-be helyettesítve

$$\begin{bmatrix} i \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_1 \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} \quad (39)$$

adódik, amiből az

$$\begin{bmatrix} i \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{C}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} \quad (40)$$

állapotváltozós modell generálható, így az eredeti  $N$  hálózat admittancia mátrixa

$$\mathcal{L}[i] = \mathbf{Y}(p) \mathcal{L}[u]; \quad \mathbf{Y}(p) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(\mathbf{I}_\delta p - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (41)$$

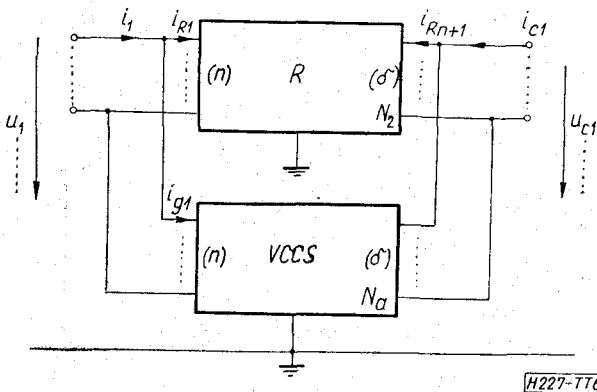
Ha tehát a realizálandó  $\mathbf{Y}(p)$  mátrixból a 3. fejezet alapján elállítunk egy tetszőleges minimál realizációt, a szintézis redukálódik a frekvenciafüggetlen  $N_1$  aktív R hálózat realizálására, melynek admittancia mátrixa (40) alapján

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{bmatrix} = (\mathbf{I}_n + \mathcal{C}) \mathbf{M} \quad (42)$$

$\mathbf{Y}_1$  a minimál realizációból egy tetszőleges pozitív elemű  $\mathcal{C}$  diagonál mátrix választásával adódik. Az aktív R hálózat szintézisét a felhasználni kívánt aktív elemek típusától függően más-más módszerrel végezhetjük el. A nyert hálózatban a kapacitások száma minimális, értékük szabadon választható, továbbá földeltek. Az utóbbi két lehetőség nagyon kedvező integrált áramkörök esetén.

**Aktív elem: feszültségvezérelt áramgenerátor**

A Martens (31) által közölt eljárás aktív elemként feszültségvezérelt áramgenerátort (VCCS) használ,



6. ábra

alkalmazható időben változó paraméterű aktív RC esetben is. A 6. ábrának megfelelően az aktív R hálózatot bontsuk fel egy ellenállás ( $N_2$ ) és egy VCCS ( $N_a$ ) hálózat párhuzamos kapcsolására. A két hálózat leírása az admittancia mátrixukkal

$$i_R = \mathbf{Y}_2 \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} \quad i_g = \mathbf{G} \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} \quad (43)$$

ahol  $\mathbf{G}$  minden nemzérus elemének egy VCCS felel meg az  $i$ -edik kapupont és a föld között, amelyet az  $u_j$  feszültség vezérel. A párhuzamos kapcsolásra

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 + \mathbf{G} \quad (44)$$

adódik. A felbontáshoz az ellenállás hálózat szimmetrikus  $\mathbf{Y}_2$  admittancia mátrixa hiperdominánsnak is választható, vagyis  $N_2$  realizálható belső csomópont nélkül. Az aktív részre ezután

$$\mathbf{G} = \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \quad (45)$$

alapján kiadódik a vezérlési tényezőket tartalmazó  $\mathbf{G}$  mátrix.  $\mathbf{Y}_2$  alkalmas választásával bizonyos fokig maximálható  $\mathbf{G}$ -ben a nullák száma, vagyis csökkenthető a VCCS-ek száma. További szabadságfokot jelent ebből a szempontból (42)-ben  $\mathcal{C}$  megválasztása és ha  $\mathbf{M}$  helyett egy

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{I}_n + \mathbf{T}) \mathbf{M} (\mathbf{I}_n + \mathbf{T}^{-1}) \quad (46)$$

ekvivalens minimál realizációt használunk, alkalmas  $\mathbf{T}$  választással. Ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy  $\mathbf{Y}_2$  csomóponti admittancia mátrix legyen, vagyis megengedünk  $N_2$ -ben belső csomópontokat is, további lehetőség van az aktív elemek számának redukálására.

**Aktív elem: feszültségvezérelt feszültséggenerátor**

Melvin és Bickart [32] módszerében az aktív elem invertáló feszültségvezérelt feszültséggenerátor (VCVS), mely műveleti erősítővel egyszerűen realizálható. Nagy előnye az előző módszerrel szemben, hogy az aktív elemek száma maximálisan  $2(n + \delta)$ .

Az aktív R hálózat felbontása most a 7. ábrának megfelelően történik. Az aktív elemek jelenléte nem módosítja az eredeti  $(n + \delta)$ -kapu áramát, így az aktív részt az

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_A \\ \mathbf{K}_A \mathbf{K}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_A = \text{diag}\{a_i\}; \quad a_i \equiv 0 \\ \mathbf{K}_B = \text{diag}\{b_j\}; \quad b_j \equiv 0 \quad (47)$$

az  $N_2$  ellenállás hálózatot az

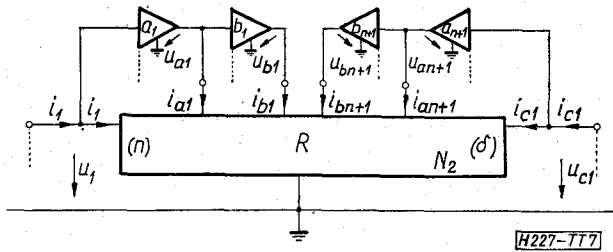
$$\begin{matrix} (n) \\ (\delta) \\ (n + \delta) \\ (n + \delta) \\ (n + \delta)(n + \delta) \end{matrix} \begin{bmatrix} i \\ i_c \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p & \mathbf{G}_r \\ \mathbf{G}_r & \mathbf{G}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_c \\ u_o \\ u_o \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} u \\ u_c \\ u_a \\ u_b \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{G}_r = [\mathbf{G}_+ \quad \mathbf{G}_-] \\ \mathbf{G}_p, \mathbf{G}_{ab} \text{ szimmetrikus}$$

összefüggések írják le. (47)-et behelyettesítve (48)-ba, az első  $(n + \delta)$  sor alapján — összehasonlítva (39)-cel —

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{G}_p + \mathbf{G}_+ \mathbf{K}_A + \mathbf{G}_- \mathbf{K}_B \mathbf{K}_A = \mathbf{G}_p + \mathbf{P} + \mathbf{N} \quad (49)$$

Ha  $\mathbf{G}$  hiperdomináns, akkor  $\mathbf{G}_+$  és  $\mathbf{G}_-$  elemei nem-



7. ábra

pozitívak. Mivel ugyanez áll  $K_A$ -ra és  $K_B$ -re is,  $P$  illetve  $N$  az  $Y_1 - G_p$  különbség pozitív, illetve negatív elemeit tartalmazza.  $G_p$ ,  $K_A$  és  $K_B$  alkalmas felvételével

$$G_+ = PK_A^\# \quad G_- = NK_A^\# K_B^\# \quad (50)$$

ahol  $\#$  a pseudo-inverzét jelenti.  $G_{ab}$  diagonál választásával mindig biztosítható, hogy az aktív elemek kimenetét ne söntölje ellenállás. Az aktív elemek számának csökkentése  $G_p$  választásánál, valamint — az előző módszerhez hasonlóan — (42)-ben  $\mathcal{C}$  felvételével és egy ekvivalens minimál realizáció használatával lehetséges. Itt is előnyös lehet a hiperdomináns megkötés elhagyása.

A hamis állapotváltozók módszere

Az eddig bemutatott szintézis eljárásokban az állapotváltozók mindig megtartották eredeti jelentésüket: kapacitások feszültsége, induktivitások árama. Egyes analízis feladatok megoldása során az állapot-egyenletek transzformációjakor előfordul olyan eset, hogy az új állapotváltozók a régiéek és a gerjesztések lineáris kombinációi, de az alapegyenletek előállításánál itt is az eredeti jelentéssel találkozunk. Az állapotváltozós modellt azonban olyan esetben is használhatjuk, amikor az állapotváltozókat csak annyiban lehet kapcsolatba hozni a reaktáns elemekkel, hogy számuk megegyezik a realizáláshoz minimálisan szükséges reaktáns elemek számával. A módszer elsősorban skalár transzfer függvények esetében alkalmazható. Alapját az képezi, hogy minden  $n$ -edfokú racionális törtfüggvénynek megfeleltethető egy  $n$ -edrendű differenciál-egyenlet, mely visszavezethető  $n$  darab elsőfokúra. Az ezekben szereplő segédváltozókat nevezzük hamis állapotváltozóknak. Az alapvető analízis feladatok megoldására is használható (pl. tranziens válasz meghatározására), mi itt a szintézisben való alkalmazhatóságát mutatjuk be.

Tekintsük a

$$T(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n} = \frac{Y}{U} \quad (51)$$

transzfer függvényt ( $Y$  és  $U$  a válasz és gerjesztés Laplace-transzformáltjai). Defináljuk az állapotváltozókat az alábbi összefüggésekkel:

$$x_{i+1} = \dot{x}_i \quad (52a)$$

$$u = b_n \dot{x}_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_{i+1} \quad (52b)$$

$$y = a_n \dot{x}_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} \quad (52c)$$

A két utóbbi összefüggés alapján

$$y = \frac{a_n}{b_n} u + \sum_{i=0}^{n-1} \left( a_i - \frac{a_n}{b_n} b_i \right) x_{i+1} \quad (53a)$$

Fentiekből a

$$c_i = a_i - \frac{a_n}{b_n} b_i \quad (53b)$$

jelölés bevezetésével az

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1/b_n \end{bmatrix} u \quad (54a)$$

$$y = [c_0 \dots c_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \frac{a_n}{b_n} u \quad (54b)$$

állapotváltozós modell állítható elő. Hogy (54)-ből  $T(p)$  adódik, az a következőképpen látható be. (52a)-ból Laplace-transzformációval

$$X_i = p X_{i-1} = \dots = p^{i-1} X_1 \quad (55a)$$

és így (52b) és (52c) az

$$U = X_1 \sum_{i=0}^n b_i p^i \quad (55b)$$

$$Y = X_1 \sum_{i=0}^n a_i p^i \quad (55c)$$

alakba írhatók, melyekből (51) nyilvánvaló.

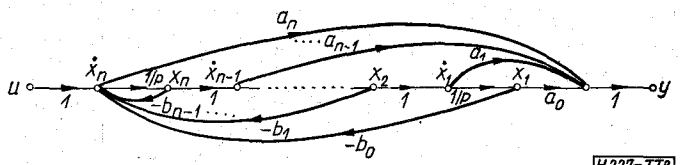
Speciális esetekben az (54) állapotváltozós modell egyszerűbb alakban adódhat, A  $b_n=1$  választás egy konstans kiemelésével mindig biztosítható. Ha  $a_n=0$ , akkor  $D=0$  és  $c_i=a_i$ .

Az (54) alatti modellhez az (52) definíciók alapján a 8. ábrán látható hatásgráf rendelhető ( $b_n=1$  normalizálással). Ha az előírt  $T(p)$  egy feszültség transzfer függvény, melyet aktív RC áramkörrel akarunk realizálni, a hatásgráf műveleti erősítő integrátorral ( $n$  darab) és összegzővel (2 darab) valósítható meg. Az aktív blokkok paramétereibe bevonhatók a hatásgráf éleinek súlyozásai.

Az (52) alatti állapotváltozó választás nem az egyedüli lehetőség. Ha pl. az

$$x_{i+1} = -\dot{x}_i \quad (56)$$

definíciót használjuk, (52) másik két összefüggésében a definiáló összeg tagjai alternálnak, hasonlóképpen a 8. ábra hatásgráfiájában az  $a_i$  és  $b_i$  ágtényezők is,



8. ábra

továbbá az integrátor invertáló. Utóbbi esetben hátrány, hogy az integrátor kapacitása nem földelhető.

Mivel minden transzfer függvény felbontható első és másodfokú transzfer függvények szorzatára, továbbá az elsőfokú realizálása egyszerű RC osztóval lehetséges, célszerű lehet a fenti állapotváltozós modell, illetve hatásgráf alapján másodfokú alaptagok konkrét kialakítása. Ilyenkor a 4 aktív blokkbeli passzív paraméterek közül sok szabadon választható, lehetőség van az érzékenységek optimalizálására. Az alábbiakban két ilyen alaptagot mutatunk be.

A Huelsman—Kerwin—Newcomb által kidolgozott [35] ún. állapotváltozós alaptag kapcsolása a 9. ábrán látható. Az állapotváltozós modell az (56)-nak megfelelő módosítással

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ b_0 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad (57)$$

$$u_2 = [-a_0 + a_2 b_0 \quad a_1 - a_2 b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a_2 u_1$$

A transzfer függvény

$$T(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0} = \frac{R_2(1+R)(1+R_7)}{R_7(1+R_2)(1+R_4)} \frac{p^2 + \frac{1+R_4}{1+R_7} p + R_4}{p^2 + \frac{1+R}{1+R_2} p + R} \quad (58)$$

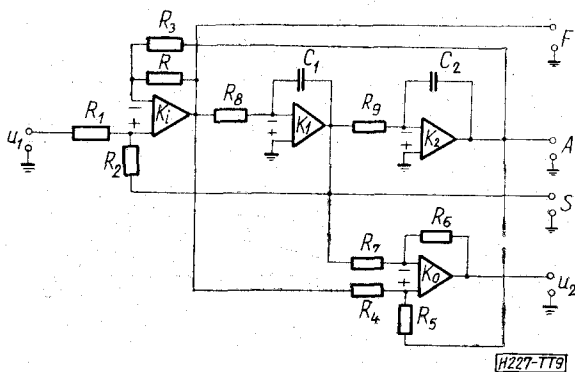
ha az alábbi elemérték választással élünk:

$$R_1 = R_3 = R_5 = R_6 = 1 \quad R_8 C_1 = R_9 C_2 = 1 \quad (59)$$

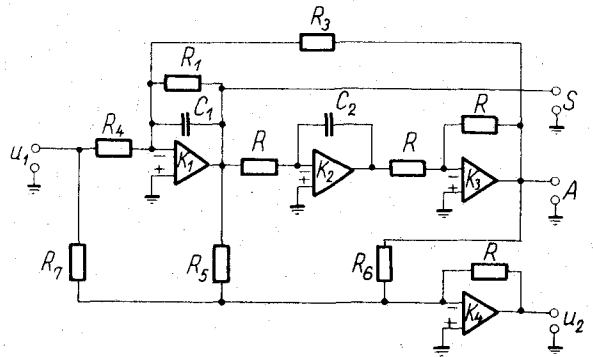
Az áramkörrel csak halfélsíkbeli transzfer zérusok valósíthatók meg, az A, F és S jelű kimenetek az aluláteresztő ( $a_1 = a_2 = 0$ ), felüáteresztő ( $a_0 = a_1 = 0$ ) és sávszűrő ( $a_0 = a_2 = 0$ ) speciális esetekben használhatók, ilyenkor a  $K_0$  kimeneti összegző elmarad. Az elemértékek (58) és (59) alapján nemlineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg. Előnyös oldala a kapcsolásnak a kedvező érzékenységek, az abszolút stabilitás, nagy Q-érték realizálhatósága

( $Q_{\max} \approx \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$ ), és univerzális aktív RC szűrőblokként való használhatósága.

A másik típus egyik változata (Tow-tól származik [36], majd Biquad elnevezéssel Thomas [37] propa-



9. ábra



$ma > c \quad mb > d \quad k_1, k_2, C_1, C_2, R$  tetszőleges  $R_7 = \frac{1}{aC_1}$

$$R_2 = \frac{k_1}{\sqrt{b}C_2} \quad R_3 = \frac{1}{k_1\sqrt{b}C_1} \quad R_4 = \frac{1}{k_2(ma-c)C_1} \quad R_5 = k_2 R$$

$$R_6 = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{ma-c}{mb-d} \sqrt{b} R \quad R_7 = \frac{R}{m}$$

H227-TT40

10. ábra

gálta) a 10. ábrán látható. Az állapotegyenletek — tetszőleges pozitív  $k_1$  és  $k_2$  választással — az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -k_1\sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2|ma-c| \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \quad (60)$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{\text{sgn}(ma-c)}{k_2} & \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{mb-d}{|ma-c|\sqrt{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + mu_1$$

A speciális választás lehetővé tette mindentáteresztő realizálását is. A megvalósítható transzfer függvény

$$T(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{mp^2 + cp + d}{p^2 + ap + b} \quad (61)$$

ahol  $c$  negatív is lehet. Az elemek értékeire képletek vezethetők le. Aluláteresztő (A) és sávszűrő (S) esetén a kimeneti összegző itt is elmaradhat. Előnyös tulajdonságai: egyszerű tervezés, kedvező érzékenységek, abszolút stabilitás, univerzális használhatóság, viszonylag egyszerű hangolhatóság [37].

Végül megemlítjük, hogy a hamis állapotváltozók módszere alapján lyukszűrőként (notch-filter, j-tengelyen levő konjugált zéruspár) használható alaptagok is előállíthatók [38].

### Összefoglalás

Cikkünk céljaként az állapotváltozós szintézis módszerek összefoglaló bemutatását tűztük ki. Megmutattuk, hogy az állapotváltozós szemlélet alapján minden lineáris, koncentrált paraméterű, időinvariáns hálózat szintézise visszavezethető frekvenciafüggetlen hálózat realizálására a reaktáns rész kiemelésével. A módszer elvi alapja általános, aktív, passzív, reciprok és nonreciprok esetben egyaránt használható. Az ellenállás kiemelés a passzív, a hamis állapotváltozók módszere pedig az aktív RC hálózatok esetében illusztrálják az állapotváltozók szintézisbeli használatának további lehetőségeit.

Mint ahogyan a hálózatok analizésében egyre nagyobb tért hódítanak, hasonlóképpen a hálózatszin-



tézisben is az állapotváltozós módszerek megjelenése a hálózatelmélet további jelentős gazdagodását eredményezte. Őszintén reméljük, hogy az új módszerek bemutatásával hozzájárulhattunk azok szélesebb körű megismertetéséhez.

### Függelék

A cikkben a vektorokat és mátrixokat félkövér szedéssel jelöltük: kisbetűk a vektorokra, nagybetűk a mátrixokra vonatkoznak.  $\dot{x}$  illetve  $\mathbf{X}$  vagy  $\mathcal{L}[x]$  az  $x$  vektor időszerinti deriváltja, illetve Laplace-transzformáltja,  $\mathbf{M}'$  az  $\mathbf{M}$  mátrix transzponáltja.  $\mathbf{0}$  és  $\mathbf{1}$  a zérus és egységmátrixok, az alsó index a méretükre utal. A diagonál mátrix jelölése:  $\text{diag}\{m_1, \dots, m_n\}$ , a blokk-diagonál mátrixok egyszerűsített írásmódjával az

$$\begin{pmatrix} (n) & (k) \\ (n) & \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ (k) & \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)$$

jelöléssel definiált ún. direkt összeget használtuk. A mátrix mellett, illetve fölött lévő zárójeles mennyiségek a particionálás sorainak illetve, oszlopainak számát adják meg.

Egy négyzetes, nonsinguláris mátrix egyértelmű inverzzel rendelkezik:  $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{1}$ . Ha  $\mathbf{M}$  ( $n \times m$ )-es, rangja  $n$  (nyilván  $m > n$ ), akkor van jobboldali inverze:  $\mathbf{M}\mathbf{M}_j^{-1} = \mathbf{1}_n$ , ha rangja  $m$  (azaz  $m < n$ ), van baloldali inverze:  $\mathbf{M}_b^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{1}_m$ , mindkét utóbbi inverz típus általában nem egyértelmű. A négyzetes szinguláris és a fentiekől eltérő nem négyzetes mátrixokra értelmezhető az  $\mathbf{M}^*$  pszeudo-inverz az  $\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^*\mathbf{M}$  és  $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^*\mathbf{M}\mathbf{M}^*$  összefüggések kielégítésével vagy egyéb más általánosított inverz [33, 34].

Egy mátrix szimmetrikus, ha  $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$ , ferde (skew, schief) szimmetrikus, ha  $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$ . Minden mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy ferde szimmetrikus mátrix összegére:  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_{fs}$ , ahol  $\mathbf{M}_s = (\mathbf{M} + \mathbf{M}')/2$  és  $\mathbf{M}_{fs} = (\mathbf{M} - \mathbf{M}')/2$ .

A szimmetrikus  $\mathbf{M}$  mátrix pozitív szemidefinit, ha tetszőleges  $x \neq 0$  vektorra  $x' \mathbf{M} x \geq 0$ . Ha az egyenlőségjel nincs megengedve,  $\mathbf{M}$  pozitív definit. Példa az  $\mathbf{M} = \mathbf{K}\mathbf{K}'$  mátrix, amely nonsinguláris  $\mathbf{K}$  esetén pozitív definit, egyébként pozitív szemidefinit. Pozitív szemidefinit kell legyen továbbá minden passzív, frekvenciafüggetlen hálózat impedancia (admittancia, hibrid) mátrixának szimmetrikus része, mivel a felvett összteljesítmény

$$P_u = \sum_k i_k u_k = i' u = i' Z i \equiv i' Z_s i \geq 0$$

nem lehet negatív, akármilyen áramokkal gerjesztjük a kapcsolókat.

A szimmetrikus mátrix domináns, ha bármely sorára fennáll:  $y_{ii} \geq \sum_j |y_{ij}|$ ,  $j \neq i$ ; hiperdomináns, ha ezen felül  $y_{ij} \leq 0$ . A domináns jelleg elégséges feltétel minden ellenállás-hálózat admittancia mátrixának realizálásához, a hiperdomináns jelleg pedig szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy  $\mathbf{Y}$  csomóponti admittancia mátrix legyen, vagyis, hogy a hálózat belső csomópont nélkül realizálható legyen.

- [1] Trón T.: Általános hálózatanalízis az állapotváltozók segítségével. Híradástechnika, XX. évi. 1. sz., 1969. jan., 8–20. old.
- [2] Adorján P. – Herpy M. – Roska T. – Tatai P.: Alkalmazási segédlet az ANAL–34 programhoz. Távközlési Kutató Intézet tanulmánya. TKI–I–72–322–5, Budapest, 1972.
- [3] Roska T.: Állapotváltozós analízis. Műszeripari Kutató Intézet tanulmánya. Budapest, 1970.
- [4] Kalotay B. – Soós T.: Állapotváltozós hálózat analízis. Műszeripari Kutató Intézet tanulmánya. Budapest, 1971.
- [5] C. Pottle: A „Textbook” computerized state-space network analysis algorithm. IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT–16, no. 4, pp. 566–568, Nov. 1969.
- [6] O. Tosun – A. Dervisoglu: Formulation of state equations in active RLC networks and a computer program. Proc. Second Int. Symp. Network Theory, Herceg-Novci, Yugoslavia, 1972, pp. 27–36.
- [7] R. E. Kalman: Irreducible realizations and the degree of a matrix of rational functions. SIAM Jour. on Appl. Math., vol. 13, no. 2, pp. 520–544, June 1965.
- [8] B. D. O. Anderson – R. W. Newcomb – R. E. Kalman – D. C. Youla: Equivalence of linear time-invariant dynamical systems. Jour. Franklin Inst., vol. 281, no. 5, pp. 371–378, May 1966.
- [9] D. C. Youla: The synthesis of linear dynamical systems from prescribed weighting patterns. SIAM Jour. on Appl. Math., vol. 14, no. 3, pp. 527–549, May 1966.
- [10] B. L. Ho – R. E. Kalman: Effective construction of linear state-variable models from input output data. Proc. Third Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 1965, pp. 449–459.
- [11] R. W. Newcomb: Network Theory: The State-Space Approach. Librairie Universitaire Louvain, Belgium, 1968.
- [12] L. M. Silverman – H. E. Meadows: Equivalence and synthesis of time-variable linear systems. Proc. Fourth Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 1966, pp. 776–784.
- [13] B. D. O. Anderson – R. W. Newcomb: Impedance synthesis via state-space techniques. Proc. IEE (London), vol. 115, no. 7, pp. 928–936, July 1968.
- [14] E. S. Kuh – D. M. Layton – J. Tow: Network analysis and synthesis via state variables. Network and Switching Theory, G. Biorci szerkesztésében, New York: Academic, 1968, pp. 135–155.
- [15] D. M. Layton: State representations, passivity, reciprocity, and n-port synthesis. Proc. Fourth Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 1966, pp. 639–647.
- [16] R. W. Newcomb: Linear Multiport Synthesis. New York: McGraw–Hill, 1966.
- [17] B. D. O. Anderson – R. W. Brockett: A multiport state-space Darlington synthesis. IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT–14, no. 3, pp. 336–337, Sept. 1967.
- [18] D. C. Youla – P. Tissi: N-port synthesis via reactance extraction – Part I. 1966 IEEE Intern. Conv. Rec., vol. 14, pt. 7, pp. 183–208.
- [19] B. D. O. Anderson: A system theory criterion for positive real matrices. SIAM Jour. on Control, vol. 5, no. 2, pp. 171–182, May 1967.
- [20] B. D. O. Anderson: Development and applications of a system theory criterion for rational positive real matrices. Proc. Fourth Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 1966, pp. 400–407.
- [21] S. Barnett – C. Storey: Solution of the Lyapunov matrix equation. Electronics Letters, vol. 2, no. 12, pp. 466–467, Dec. 1966.
- [22] C. F. Chen – L. S. Shieh: A note on expanding  $\mathbf{PA} + \mathbf{A}'\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ . IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC–13, no. 1, pp. 122–23, Feb. 1968.
- [23] E. J. Davison – F. T. Man: The numerical solution of  $\mathbf{A}'\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} = -\mathbf{C}$ . IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC–13, no. 4, pp. 448–449, Aug. 1968.
- [24] M. C. Davis: Factoring the spectral matrix. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC–8, no. 4, pp. 296–305, Oct. 1963.
- [25] D. C. Youla: On the factorization of rational matrices. IRE Trans. on Information Theory, vol. IT–7, no. 3, pp. 172–189, July 1961.

- [26] S. G. Loo: Spectral factorization by means of augmented factors. *Electronics Letters*, vol. 3, no. 6, pp. 238–239, June 1967.
- [27] R. Yarlagadda – Y. Tokad: Synthesis of LC networks – A state-model approach. *Proc. IEE (London)*, vol. 113, no. 6, pp. 975–981, June 1966.
- [28] R. Yarlagadda: Network synthesis – A state-space approach. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-19, no. 3, pp. 227–232, May 1972.
- [29] S. Vongpanitlerd – B. D. O. Anderson: Scattering matrix synthesis via reactance extraction. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-17, no. 4, pp. 511–517, Nov. 1970.
- [30] S. Vongpanitlerd: Reciprocal lossless synthesis via state-variable techniques. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-17, no. 4, pp. 630–632, Nov. 1970.
- [31] G. O. Martens: Active RC synthesis of time varying and time-invariant state equations. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-14, no. 3, pp. 345–346, Sept. 1967.
- [32] D. W. Melwin – T. A. Bickart: P-port active RC networks: Short-circuit admittance-matrix synthesis with a minimum number of capacitors. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-18, no. 6, pp. 587–592, Nov. 1971.
- [33] N. S. Urquhart: Computation of generalized inverse matrices which satisfy specified conditions. *SIAM Rev.*, vol. 10, Apr. 1968, pp. 216–218.
- [34] H. P. Decell: An application of the Cayley-Hamilton theorem to generalized matrix inversion. *SIAM Rev.*, vol. 7, Oct. 1965, pp. 526–528.
- [35] W. J. Kerwin – L. P. Huelsman – R. W. Newcomb: State-variable synthesis for insensitive integrated circuit transfer functions. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. SC-2, no. 3, pp. 87–92, Sept. 1967.
- [36] J. Tow: Active RC filters – A state-space realization. *Proc. IEEE*, vol. 56, no. 6, pp. 1137–1139, June 1968.
- [37] L. C. Thomas: The Biquad: Part I. – Some practical design considerations. ... Part II. – A multipurpose active filtering system. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-18, no. 3, pp. 350–361, May 1971.
- [38] S. Chakrabarty – A. K. Choudhury: State-variable realization of voltage-controlled active notch filters. *Proc. IEEE*, vol. 57, no. 11, pp. 2068–2069, Nov. 1969.