

Digitális szűrők

ETO 621.372.64:681.32

A digitális szűrési eljárásokat a digitális jelfeldolgozás egy speciális ágának tekinthetjük. Rendeltesük azonos a hagyományos passzív, ill. aktív LC és RC szűrőkével, kivételük, működés módjuk azonban teljesen eltérő ezektől. Általánosságban egy digitális szűrőt olyan „fekete doboznak” tekinthetünk, mely a bemenetén mintavételezett és digitalizált jelsorozatot fogad, ebből tisztán numerikus módszerekkel képezi a kimeneti digitális jelsorozatot. Az analóg szűrőkhöz hasonlóan itt is definiálható átviteli függvény, csak matematikai leírása kissé eltérő, alkalmazkodik a mintavételes rendszerek tárgyalásmódjához. Az analóg és digitális szűrők közti funkcionális azonosság a gyakorlatban A/D és D/A konverterek felhasználásával igazolható. Egy A/D és D/A konverter közé iktatott digitális szűrő átviteli függvénye ugyanolyan eszközökkel mérhető, mint egy hagyományos szűrőé.

Digitális szűrést kezdetben csak számítógéppel valósították meg, ma azonban a félvezető technika rohamos fejlődése révén több egyre speciális rendeltetésű, integrált áramkörös célberendezés található az irodalomban, melyek digitális szűrőket realizálnak [5, 2, 17]. Ez a jelfeldolgozási technika lényegesen bonyolultabb és költségesebb a hagyományosnál, hogy mégis terjedőben van, az a digitális jelfeldolgozás nyújtotta előnyöknek köszönhető. Ezek: nagy pontosság és stabilitás széles frekvenciatartományban. A hagyományos szűrők az alkatrészek hőfokfüggése, öregedése miatt, a műveleti erősítők driftje és egyéb fogyatékoságai miatt egy sor alkalmazási területen problémák merülnek fel, digitális módszerrel tetszés szerinti alacsony frekvencia-

tartományban dolgozhatunk a pontosság és stabilitás legcsekélyebb romlása nélkül. A digitális szűrők másik nagy előnye a flexibilitás, a programozhatóság: a kívánt átviteli függvény tetszés szerint változtatható tisztán „software” eszközökkel, ami a hagyományos szűrőknél természetesen szinte elképzelhetetlen. A vázolt előnyök meghatározzák a digitális szűrők fő alkalmazási területeit:

1. Mintavételes mérő, ill. szabályozórendszerek, ahol a számítógép rendszerint eleve rendelkezésre áll (DDC) [6].
2. Átviteltechnika (PMC rendszerek, nagy pontosságú csatornaszűrők) [22].
3. Alacsonyfrekvenciás szűrők.
 - a) EKG, EEG jelfeldolgozás [15].
 - b) Rádiólokátor, álló célpontokról eredő visszaverődések kiszűrése, mozgó cél detektálása [20, 21].
 - c) Nukleáris és mágneses rezonancia spektrum feloldásának javítása [25].
4. Egyéb, ahol a programozhatóságra szükség van (pl. alacsony frekvenciás spektrum analízátor, automatikus mérőrendszer stb.).

A digitális szűrők alapvetően két csoportba sorolhatók: rekurzív és nonrekurzív (másképpen: transzverzális) szűrők csoportja.

1. A rekurzív szűrők belső visszacsatolást tartalmaznak, matematikai leírásuk a transzformációval történik, tervezésük általában az átviteli függvény meghatározásából indul ki.
2. A nonrekurzív (transzverzális) szűrők visszacsatolást nem tartalmaznak, tervezésükben az időtartomány, ill. a súlyfüggvény kap nagyobb hangsúlyt.

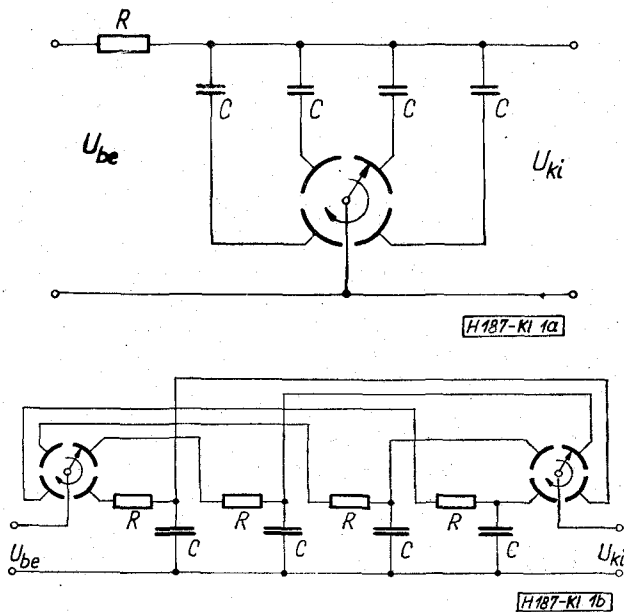
Röviden érdemes egy harmadik, átmeneti csoporttal is foglalkozni az ún. kommutációs szűrőkkel [4, 18]. Ebben a csoportban a digitális elnevezés nem egészen helytálló olyan szempontból, hogy a jelfeldolgozás nem digitális, numerikus, hanem analóg módszerekkel történik. Digitális viszont olyan szempontból, hogy az átviteli függvény frekvenciaskálaja egy óra frekvencia változtatásával széthúzható, vagy összenyomható. A függvény alakja nem változik, csak frekvencia tartománya (pl. sáváteresztő, vagy záró esetén a sávközép helye tolható el).

A következőkben röviden áttekintjük a kommutációs szűrők tulajdonságait, majd részletesebben tárgyaljuk a rekurzív és transzverzális szűrők approximációs és realizálási kérdéseit.

1. Kommutációs szűrők

Kommutációs szűrőknek nevezzük a digitális szűrők azon csoportját, melyek a jelfeldolgozást a jelnek időszakonkénti átlagolásával végzik. Az átla-

Beérkezett: 1972. VIII. 28.



1. ábra

golást kapcsolt RC hálózatok hajtják végre. A kapcsoló elhelyezése szerint beszélhetünk parallel, vagy soros kommutációs szűrőről (1a, 1b ábra).

Az 1a ábrán látható egyszerű párhuzamos rendszerű kommutációs szűrő működése a következő.

A kapcsoló f_0 frekvenciájú körforgást végez, így minden fordulatonál $\frac{1}{Nf_0}$ -ideig földel egy-egy szegmenst (az ábrán $N=4$). Tételezzük fel, hogy a bemenetre pontosan f_0 frekvenciájú jel érkezik, ekkor minden egyes körülfordulás során az egyes aluláteresztő szegmensekre a jel ugyanazon fázisú szakasza jut, ezért az RC időállandónak megfelelően bizonyos periódusszám után C kondenzátoron a kérdéses jelszakasz átlaga képződik. N szegmens esetén RC időállandó N -szeresére növekszik, mivel a kitöltési tényező $\frac{1}{N}$.

Ha a bemeneti frekvencia f_0 -tól eltér, az egyes RC szegmensekre változó jelszakaszok jutnak, ezért a kimeneti amplitúdó az eltéréssel arányosan csökken. A frekvenciamenet f_0 környezetében a 2. ábrán látható.

Az áteresztő sáv szélesség (3 dB-es pontok között) $\frac{2}{NRC}$. A levágási meredekség 6dB/oktáv. Amennyiben a levágási meredekséget növelni akarjuk, az egyes RC szűrő szegmensek helyett több tagú (magasabb fokszámú) RC szűrőt kell beiktatnunk.

Pl. 12 dB/oktáv meredekség eléréséhez két időállandó sorbakötése szükséges (3. ábra). Alacsony frekvencián, valamint f_0 egész számú többszörösei környezetében természetesen ismét átteresztővé válik a szűrő. Kivételt képez az Nf_0 frekvencia, amikor minden aluláteresztő szegmens egy teljes periódust átlagol, ezért ezt a frekvenciát teljesen elnyomja. A teljes frekvenciamenet a 4. ábrán látható (4 szegmensre).

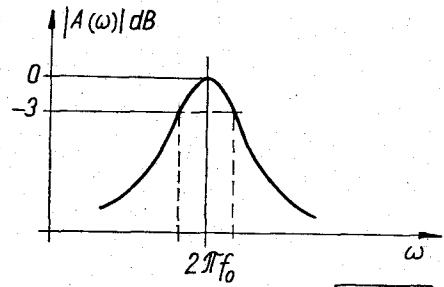
Az átviteli görbe $n f_0$ pontjainak burkolója $\frac{\sin x}{x}$ alakú, ahol $x = n\pi k$, n a harmonikus száma, k a kitöltési tényező, mellyel egy szegmens részt vesz a folyamatban $k = \frac{1}{N}$. A gyakorlati megvalósítás során a forgó kapcsolót elektronikusan kell realizálni. Az elektronikus kapcsoló maradék feszültsége, ill. ellenállása befolyásolhatja a szűrő frekvenciamenetét.

Figyelembe kell venni, hogy a kapcsolónak mindkét irányú áramot tudni kell vezetni, valamint azt, hogy a véges be- és kikapcsolási idők (fel- és lefutás) is leronthatják a szűrő tulajdonságait.

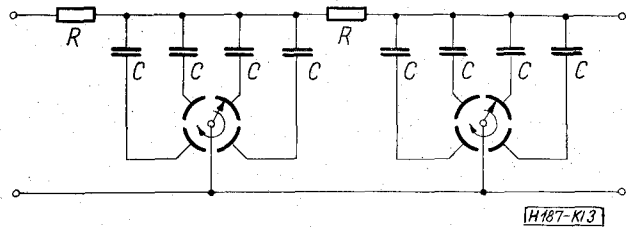
Figyelembe kell venni, hogy a kapcsolónak mindkét irányú áramot tudni kell vezetni, valamint azt, hogy a véges be- és kikapcsolási idők (fel- és lefutás) is leronthatják a szűrő tulajdonságait.

2. Nonrekurzív (transzverzális) szűrők

Azokat a szűrőket, melyek a kimeneti érték előállításához csak a megelőző bemeneti értékeket használják fel, azaz nem tartalmaznak visszacsatolást (a kimenetről) nonrekurzív, vagy tranzverzális szűrőknek nevezzük. Felépítésük igen egyszerű: egy késleltető tárolólánc, melyben az egyes késleltető fokozatokhoz szorzó áramkörök csatlakoznak. A szorzó áramkörök kimeneteit egy összeadó összegzi (5. ábra).



2. ábra



3. ábra

Működése matematikailag legegyszerűbben a Duhamel tétel segítségével írható le [3].

Ha ismert egy rendszer súlyfüggvénye (időtartománybeli viselkedés), akkor a kimenőjel $y(t)$ bármilyen $x(t)$ bemenőjel esetén $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$

konvolúciós integrállal számítható ki. Mintavételes rendszer esetén a mintavételezett súlyfüggvényt alkalmazzuk és az integrálást szummázással közelítjük: $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)x(t-kT)$. A gyakorlatban $h(kT)$

súlyfüggvénynek végesnek kell lenni a stabilitás és realizálhatóság érdekében. Rendszerint feltételezhető, hogy $h(kT)$ csak $k=0$ és N közt vesz fel 0-tól eltérő értékeket (k negatív értékeire a lineáris invariáns négypólusok súlyfüggvénye zérus a kauzalitás miatt). Így a szummát csak véges határok között kell elvégezni: $y(t) = T \sum_{k=0}^N h(kT) x(t-kT)$.

Ha ismert egy rendszer súlyfüggvénye (időtartománybeli viselkedés), akkor a kimenőjel $y(t)$ bármilyen $x(t)$ bemenőjel esetén $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$

konvolúciós integrállal számítható ki. Mintavételes rendszer esetén a mintavételezett súlyfüggvényt alkalmazzuk és az integrálást szummázással közelítjük: $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)x(t-kT)$. A gyakorlatban $h(kT)$

súlyfüggvénynek végesnek kell lenni a stabilitás és realizálhatóság érdekében. Rendszerint feltételezhető, hogy $h(kT)$ csak $k=0$ és N közt vesz fel 0-tól eltérő értékeket (k negatív értékeire a lineáris invariáns négypólusok súlyfüggvénye zérus a kauzalitás miatt). Így a szummát csak véges határok között kell elvégezni: $y(t) = T \sum_{k=0}^N h(kT) x(t-kT)$.

Ha ismert egy rendszer súlyfüggvénye (időtartománybeli viselkedés), akkor a kimenőjel $y(t)$ bármilyen $x(t)$ bemenőjel esetén $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$

konvolúciós integrállal számítható ki. Mintavételes rendszer esetén a mintavételezett súlyfüggvényt alkalmazzuk és az integrálást szummázással közelítjük: $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)x(t-kT)$. A gyakorlatban $h(kT)$

súlyfüggvénynek végesnek kell lenni a stabilitás és realizálhatóság érdekében. Rendszerint feltételezhető, hogy $h(kT)$ csak $k=0$ és N közt vesz fel 0-tól eltérő értékeket (k negatív értékeire a lineáris invariáns négypólusok súlyfüggvénye zérus a kauzalitás miatt). Így a szummát csak véges határok között kell elvégezni: $y(t) = T \sum_{k=0}^N h(kT) x(t-kT)$.

Ha ismert egy rendszer súlyfüggvénye (időtartománybeli viselkedés), akkor a kimenőjel $y(t)$ bármilyen $x(t)$ bemenőjel esetén $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$

konvolúciós integrállal számítható ki. Mintavételes rendszer esetén a mintavételezett súlyfüggvényt alkalmazzuk és az integrálást szummázással közelítjük: $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)x(t-kT)$. A gyakorlatban $h(kT)$

súlyfüggvénynek végesnek kell lenni a stabilitás és realizálhatóság érdekében. Rendszerint feltételezhető, hogy $h(kT)$ csak $k=0$ és N közt vesz fel 0-tól eltérő értékeket (k negatív értékeire a lineáris invariáns négypólusok súlyfüggvénye zérus a kauzalitás miatt). Így a szummát csak véges határok között kell elvégezni: $y(t) = T \sum_{k=0}^N h(kT) x(t-kT)$.

Ha ismert egy rendszer súlyfüggvénye (időtartománybeli viselkedés), akkor a kimenőjel $y(t)$ bármilyen $x(t)$ bemenőjel esetén $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$

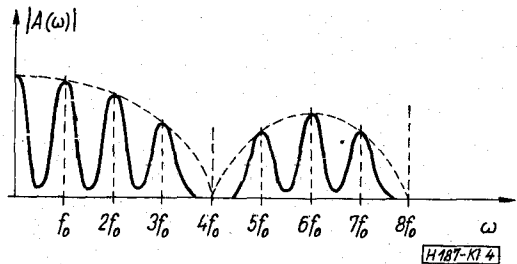
konvolúciós integrállal számítható ki. Mintavételes rendszer esetén a mintavételezett súlyfüggvényt alkalmazzuk és az integrálást szummázással közelítjük: $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)x(t-kT)$. A gyakorlatban $h(kT)$

súlyfüggvénynek végesnek kell lenni a stabilitás és realizálhatóság érdekében. Rendszerint feltételezhető, hogy $h(kT)$ csak $k=0$ és N közt vesz fel 0-tól eltérő értékeket (k negatív értékeire a lineáris invariáns négypólusok súlyfüggvénye zérus a kauzalitás miatt). Így a szummát csak véges határok között kell elvégezni: $y(t) = T \sum_{k=0}^N h(kT) x(t-kT)$.

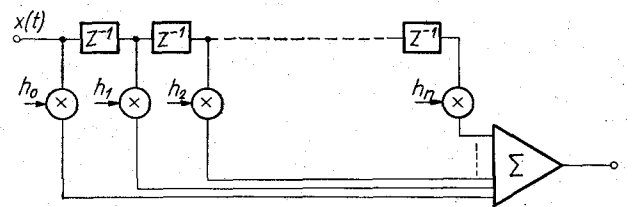
Ha ismert egy rendszer súlyfüggvénye (időtartománybeli viselkedés), akkor a kimenőjel $y(t)$ bármilyen $x(t)$ bemenőjel esetén $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$

konvolúciós integrállal számítható ki. Mintavételes rendszer esetén a mintavételezett súlyfüggvényt alkalmazzuk és az integrálást szummázással közelítjük: $y(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)x(t-kT)$. A gyakorlatban $h(kT)$

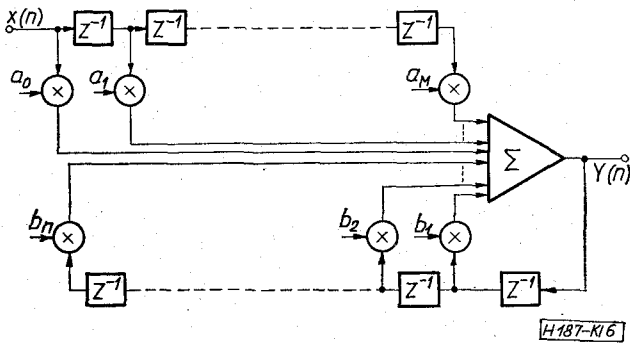
súlyfüggvénynek végesnek kell lenni a stabilitás és realizálhatóság érdekében. Rendszerint feltételezhető, hogy $h(kT)$ csak $k=0$ és N közt vesz fel 0-tól eltérő értékeket (k negatív értékeire a lineáris invariáns négypólusok súlyfüggvénye zérus a kauzalitás miatt). Így a szummát csak véges határok között kell elvégezni: $y(t) = T \sum_{k=0}^N h(kT) x(t-kT)$.



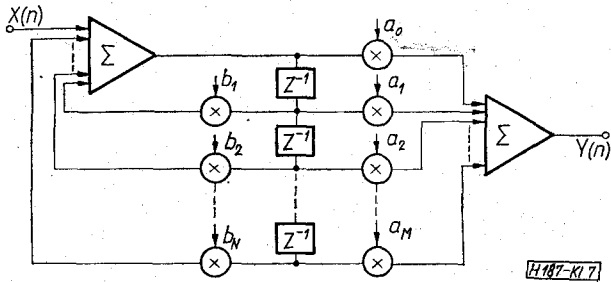
4. ábra



5. ábra



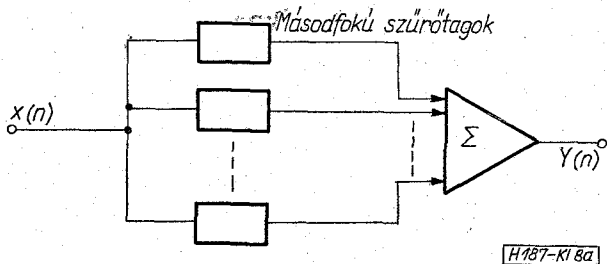
6. ábra



7. ábra

Ezt a formulát valósítja meg az ábra szerinti blokkvázlat.

A súlyfüggvényre vonatkozó követelmény a frekvenciatartományban úgy értelmezhető, hogy a frekvenciamenet és deriváltjai folytonos függvények legyenek (törés, szakadás nem lehet bennük). Ezen kívül a frekvenciamenet Fourier sorba fejthető legyen, ez a sor véges számú tagból álljon, ami akkor biztosítható, ha a frekvenciamenet periodikus, periódusa ω_s (az alapperiódus $\pm \frac{\omega_s}{2}$ között található). A tervezés során ezt a követelményt úgy teljesíthetjük, ha súlyfüggvényt megszorozzuk egy — időben véges — ún. „ablak” függvényvel. Az időtartománybeli szorzás a frekvenciatartományban konvolúciónak felel meg, ennek eredményeképp a frekvenciamenet törései, ugrásai „kisimulnak”, folytonos átmenetté válnak. Az irodalomban [1] több ilyen „ablakfüggvény” is található, melyekkel optimálisan realizálható a megadott átviteli szűrő.



H187-K1 8a



H187-K1 8b

8. ábra

A szükséges késleltető elemek számának meghatározását illetően, szintén az irodalomra [1] utalunk: minél meredekebb átmenetek vannak a frekvenciamenetben, annál hosszabb lecsengésű a súlyfüggvény és annál több késleltető tag szükséges a realizáláshoz.

3. Rekurzív szűrők

3.1. Matematikai alapok

Lineáris invariáns hálózatok időtartománybeli leírása általánosságban lineáris differenciálegyenletekkel történik [3]. Tekintsünk egy általános négy-pólust, melynek bemenete és kimenete közötti összefüggést szintén egy lineáris differenciálegyenlet írja le.

$$\sum_{n=0}^N B_n \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^M A_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

Ha a bemeneten és a kimeneten csak bizonyos meghatározott időközönként ismerjük a jeleket, mintavételes rendszerről beszélhetünk és a differenciálegyenletről differenciaegyenletre térhetünk át.

$$\sum_{k=0}^N b'_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a'_k x(n-k)$$

ebből $y(n)$ kifejezhető,

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{a'_k}{b'_0} x(n-k) - \sum_{k=1}^N \frac{b'_k}{b'_0} y(n-k); \quad \frac{a'_k}{b'_0} = a_k; \quad \frac{b'_k}{b'_0} = b_k$$

Az n -edik kimenő érték k megelőző be- és kimeneti értékből határozható meg [5, 7].

A mintavételes rendszerek matematikailag a z transzformációval tárgyalhatók. Egy folytonos $x(t)$ függvény T közű mintavételes alakja

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT)$$

ahol $\delta(t-nT)$ egységnyi amplitúdójú tüimpulzus-sorozat. Ennek Laplace transzformáltja: $\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-s n T}$

ebből $e^{-sT} = z^{-1}$ definícióval $x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$

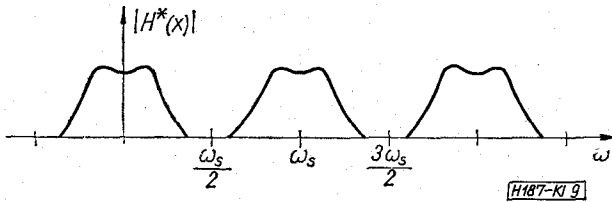
Ezt alkalmazva a lineáris differenciálegyenletre:

$$y(z) = x(z) \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} - y(z) \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

Ha a mintavételes négy-pólus átviteli függvénye $H(z)$ ismert, a_k és b_k konstansok felhasználásával egyszerű késleltetések, szorzók és összeadók segítségével a négy-pólus realizálható.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$



9. ábra

Ezen rekurziós formula alapján a realizálás direkt formája a 6. ábrán, kanonikus formája a 7. ábrán látható.

Mindkét alakot ugyanaz a differenciaegyenlet írja le, viszont a kanonikus változat kevesebb késleltetést tartalmaz. Magasabb fokszám esetén változat hátránya, hogy igen érzékeny a koefficiensek és a műveletvégzés pontosságára. Az érzékenységek nemcsak a realizált függvény alakjának megváltozását jelenti, hanem stabilitási problémákat is. Ennek elkerülésére az átviteli függvényt első-, ill. másodfokú tagok (tényezők) összegéből (szorzatából) kell realizálni. Ez minden olyan racionális törtfüggvényvel elvégezhető, melynek számlálója a nevezőnél nem magasabb fokszámú. Így kapjuk a párhuzamos (soros) realizálási formát (8. ábra).

A soros változatot nagyobb késleltetése és kedvezőtlenebb fázismenete miatt ritkábban alkalmazzák.

3.2. Approximáció

A $H(z)$ átviteli függvény meghatározásánál több kiindulási lehetőség van. Kiindulhatunk a szűrő specifikációiból, súlyfüggvényből stb. A legcélszerűbb azonban az analóg szűrők alaposan és széleskörűen kidolgozott approximációs formuláit felhasználni, melyek általában a komplex frekvenciatartományban adottak.

A feladat tehát adott $H(s)$ függvényéből a $H(z)$ függvény meghatározása. Erre két fő módszer ismeretes.

3.2.1. Standard z transzformáció (impulzus invariancia)

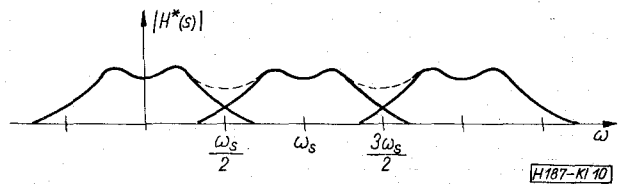
A módszer alkalmazhatóságának előfeltétele, hogy $H(s)$ átviteli függvény $w = \frac{ws}{2}$ -től felfelé elhanyagolhatóan kicsi legyen. Ellenkező esetben frekvenciaátlapolódási hiba jön létre. Ezt a mintavételes átviteli függvény periodicitásából láthatjuk be (1):

$$h^*(t) = T \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) \delta(t - nT)$$

$$L[h^*(t)] = H^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s + jn\omega_s) + \frac{T}{2} h(0)$$

Láthatjuk, hogy ha $H(s)$ csak $\pm \frac{j\omega_s}{2}$ között rendelkezik véges értékkel, $H^*(s)$ $H(s)$ periodikus ismétlése lesz (9. ábra).

Ellenkező esetben a szummázás megváltoztatja az eredeti spektrumot (10. ábra).



10. ábra

Matematikailag megfogalmazva a követelmény $H(s)$ nagyfrekvenciás viselkedésére:

$$\lim_{s \rightarrow j\infty} |H(s)| = \lim_{s \rightarrow j\infty} \left| \frac{i}{(s/\omega_c)^n} \right|; \quad n > 0$$

ha n nagy és $\omega_c \ll \frac{\omega_s}{2}$ az átlapolódási hiba elhanyagolható. Ha $H(s)$ teljesíti a sávkorlátozottság követelményét, a digitalizálást a következőképp hajtjuk végre: a nevező gyökeit megkeressük, majd az egész függvényt $\frac{k}{s+a}$ gyöktényezők összegére bontjuk.

Ezután $\frac{1}{s+a} \rightarrow \frac{T}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$ helyettesítéssel megkapjuk a z transzformált mintavételes átviteli függvényt.

A helyettesítés igazolására, induljunk ki abból a feltételből, hogy a folytonos és a mintavételes rendszer súlyfüggvénye azonos legyen a mintavétel időpontokban. $H(s) = \frac{1}{s+a}$ átviteli függvényhez tartozó súlyfüggvényt inverz Laplace transzformációval kaphatjuk meg: $L^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}$. A követelmény szerint a mintavételes súlyfüggvény: $h(nT)e^{-anT}$ $T=0, T, 2T \dots nT$ pillanatokban megegyezik e^{-at} -vel. Hajtsunk végre a mintavételes súlyfüggvényen z transzformációt

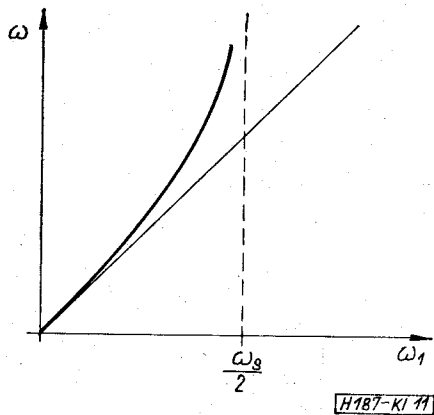
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n}$$

Ezt a végtelen szummát, mint mértani sort összegezve: $H(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$. A módszer azért kapta az „impulzus invariancia” elnevezést, mert az egységimpulzusra adott válasz mindkét rendszerénél azonos a mintavételi időpontokban. Ez a feltétel egyébként akkor is teljesülhet, ha $H(s)$ nem korlátozódik a $\pm \frac{\omega_s}{2}$ sávra, de természetesen az átviteli függvény már nem lesz azonos.

Ha $H(s)$ nem sávhatárolt, meg kell szoroznunk egy megfelelő fokszámú aluláteresztő szűrő átviteli függvényével és az eredő függvényt transzformáljuk. A módszer általában igen bonyolult eredményt ad.

3.2.2. Bilineáris z transzformáció

A frekvencia átlapolódási problémát megkerülő (definíciószerűen) az egész s síkot s_1 sík vízszintes sávjába, a $\pm \frac{j\omega_s}{2}$ vízszintesek közé transz-



11. ábra

formáljuk. $S = \frac{2}{T} \text{th} \frac{s_1 T}{2}$ definíciós összefüggéssel.

$$e^{-s_1 T} = z^{-1} \text{ helyettesítéssel } s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Így $H(s_i)$ biztosan sávkorlátozott lesz, valamint $H(z)$ igen egyszerű behelyettesítéssel nyerhető.

Az egyszerűség ára, hogy az átviteli függvény frekvenciaskálája eltorzul ($j\omega = 0$ és $j\omega = \infty$ közti tartomány $j\omega_1 = 0$ -tól $j\omega_1 = \frac{\omega_s}{2}$ -ig tartományba zsugorodik (11. ábra).

$$j \frac{\omega T}{2} = \frac{e^{j\omega_1 T} - 1}{e^{j\omega_1 T} + 1} = \frac{e^{j\omega_1 T/2} - e^{-j\omega_1 T/2}}{e^{j\omega_1 T/2} + e^{-j\omega_1 T/2}} \cdot \frac{e^{j\omega_1 T/2}}{e^{j\omega_1 T/2}} = j \text{tg} \frac{\omega_1 T}{2}$$

A torzulás miatt ez a módszer elsősorban olyan átviteli függvények transzformálására alkalmas, melyek vízszintes egyenes szakaszokból állnak (átéresztő, ill. záró tartományok), a szakaszok közti átmenet pedig nem specifikált. Hogy a tartomány határok helyükön legyenek, a skálatorzítást kompenzálni kell: a $H(s)$ függvényben szereplő ω_i pontok helyére $\frac{2}{T} \text{tg} \frac{\omega_i T}{2}$ írandó.

A bilineáris z transzformáció definíciós formulája plauzibilissé tehető, ha a négyzetes közelítés alapján működő mintavételes integrátort vizsgáljuk (12. ábra).

$$y(n) = \frac{T}{2} [x(n) + x(n-1)] + y(n-1)$$

Összevetve a mintavételes négy-pólusokat leíró differenciaegyenletet a mintavételes átviteli függvénnyel megállapítható, hogy

$$a_0 = \frac{T}{2}; \quad a_1 = \frac{T}{2}; \quad b_1 = -1 \quad \text{és} \quad H(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Mivel az ideális integrátor átviteli függvénye $H(s) = \frac{1}{s}$, a mintavételes integrátor pedig jól közelíti az ideálist, ezért kézenfekvő $S \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ helyettesítés.

3.3. Realizálás

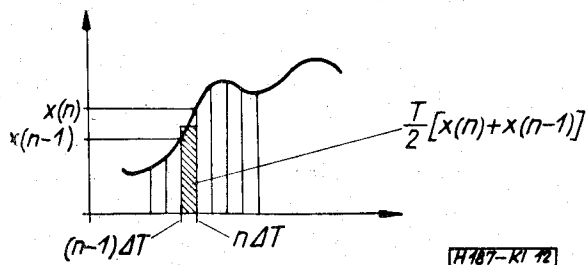
A real-time digitális szűrő a négy-pólusú leíró differenciaegyenlet alapján működik. Bemenetére az $x(t)$ bejövővelei $x(n)$ mintái érkeznek, kimenetén pedig $y(n)$ értékeket szolgáltatja:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k)$$

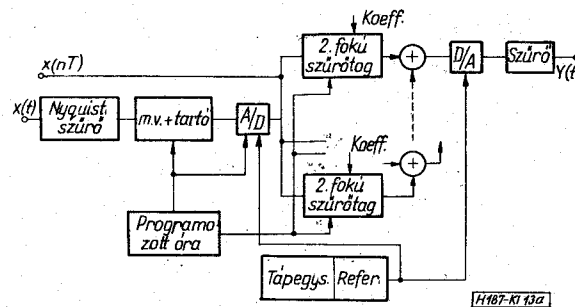
A számítást végezheti számítógép, vagy speciálisan erre a célra konstruált készülék, amely szorzó, összeadó és tároló funkciókat lát el.

Mindkét esetben célszerűtlen közvetlenül a fenti rekurzív formulát realizálni. Ehelyett még a szűrő approximációs fázisában $H(s)$ folytonos átviteli függvényt másodfokú tagok összegére (szorzatára) kell bontani, és a tagokat — valamelyik módszerrel — z transzformációnak alávetni. Az egész szűrőt ezen másodfokú tagok párhuzamos (soros) kapcsolása adja. Hasonló elven felépített szűrőt közöl Wilson [17]. A téma újszerűségét mutatja, hogy a szerző szerint Angliában ez az első ilyen konstrukció.

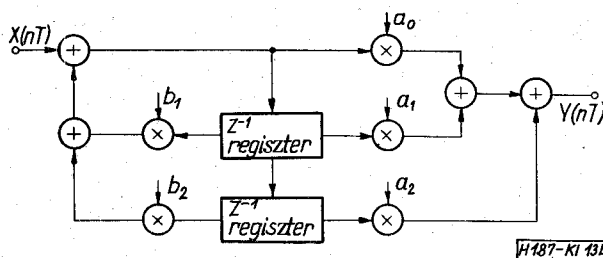
Számítógép esetén a másodfokú kifejezéseket egymás után ki kell számítani és az eredményeket összeadni. Erre a felbontásra azért van szükség, mert magasabb fokszám esetén a szűrő igen érzékeny a pontosságra: a koefficiensek, a számítás hibája igen súlyosan esik latba. Elvben a felbontás elvégezhető másodfokú tagok soros kapcsolásával is,



12. ábra



H187-KI 13a



H187-KI 13b

13. ábra

de ez fázismentet és késleltetés szempontjából sokkal kedvezőtlenebb és zajosabb is [24].

Hogy adott esetben számítógéppel, vagy speciálisan konstruált készülékkel célszerűbb realizálni egy szűrőt, mindig a műszaki és gazdasági követelményektől függ. A számítógépes realizálás hátránya, hogy aránylag lassú: egy-egy kimenő $y(n)$ érték előállításához fokszámtól függően több tíz szorzás és ugyanannyi összeadás szükséges, emellett adatrendelést is kell végezni, el kell helyezni az új, bejövő értékeket és kimenő értékeket a memóriában, az előzőeket pedig shiftelni kell. Alacsonyfrekvenciás alkalmazásnál tehát számítógép használható, de csak akkor gazdaságos, ha egyéb feladatok miatt is szükség van rá.

A blokkvázlatból kitűnik (13a ábra), hogy számítógéppel csak a szorzó, összeadó és tároló funkciók láthatók el, amellett még néhány kiegészítő egység szükséges.

A Nyquist szűrő biztosítja, hogy az A/D konverterre kerülő jel ne tartalmazzon $\frac{\omega_s}{2}$ -nél magasabb frekvenciájú komponenseket. A szűrő kimenetén a D/A konverzió után lépcsős jelformát kapunk. Ebből folytonos jelet egyszerűbb esetben aluláteresztő szűrővel, nagyobb igények esetén interpoláló „jósló” szűrővel állíthatunk elő [28].

Az említett szűrők mellett mintavevő és tartó, A/D konverter egységek szükségesek, valamint az ezeket kiszolgáló óragenerátor és tápegység. Mindezek együtt egy periferiális egységet alkothatnak egy számítógép részére, de kivitelezésük olyan is lehet, hogy számítógépcsatlakozás helyett modulárisan másodfokú szűrőtagok legyenek illeszthetők hozzá (13b ábra).

3.4. Pontosság és stabilitás

A szűrő pontos működését 3 tényező befolyásolja:

1. A/D konverter.
2. Számítási pontosság (kerekítés, csonkítás).
3. Koefficiens pontosság (véges szóhossz).

A A/D konverter kvantálási hibája, mint zaj keletkezik a kimenőjelben pontos analízise speciális esetekre az irodalomban megtalálható [2, 10, 24].

A számítás során a véges szóhossz miatt akkumulálódó kerekítési, vagy csonkítási hiba lép fel, amely attól is függ, hogy az aritmetika fix, vagy lebegőpontos. Ezzel a problémával kapcsolatban is a részletes irodalomra utalunk [2, 10, 24].

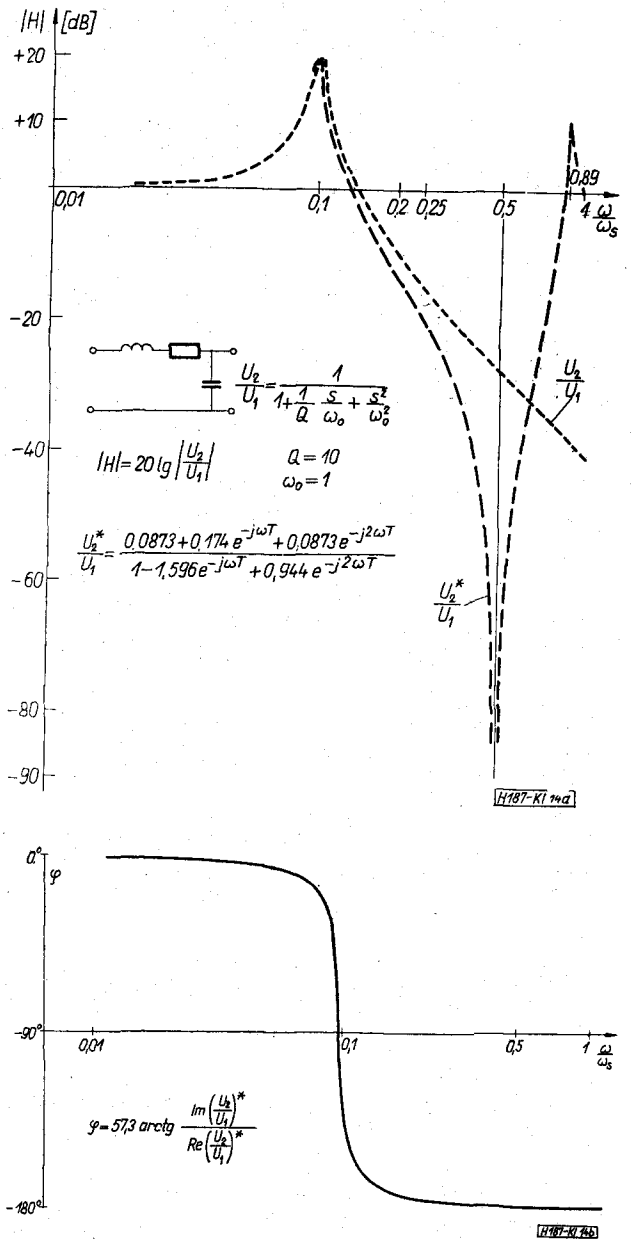
A koefficiensek véges szóhossz miatti hibája is befolyásolja az átviteli függvényt, súlyosabb esetben a stabilitást is veszélyezteti.

A szemléletesség kedvéért aluláteresztőkre egy egyszerű számítást mutatunk be, mely durva közelítést ad a koefficiensek megengedhető eltérésére [1].

Az átviteli függvény általános alakja:

$$H^*(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{N(z^{-1})}{\prod_{k=1}^n (1 + z^{-1}/z_k)}$$

Meghatározandó az a maximális eltérés, amelyet b_k -ra megengedve egy pólus sem kerül az egység-



14. ábra

körön belülré z^{-1} síkban (ez a feltétel analóg azzal, hogy s síkon a pólusok a bal felsíkon legyenek). A nevező gyöktényezői standard z transzformáció esetén $D(z^{-1}) = \prod_{k=1}^n (1 - e^{s_k T} z^{-1})$ alakban, bilineáris

transzformáció esetén $D(z^{-1}) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1 + s_k T/2}{1 - s_k T/2} z^{-1} \right)$

alakban írhatók fel. Most ha a $\mu_k = \frac{s_k}{\omega_s/2} = \frac{s_k T}{\pi}$ jelölést bevezetjük és feltételezzük, hogy ω_s -et növeljük, ill. T -t csökkentjük a zero felé látható, hogy μ_k is egyre kisebb értéket vesz fel. Ezzel a feltétellel $(1 - e^{s_k T} z^{-1}) \rightarrow [1 - (\mu_k \pi) z^{-1}]^{-1}$ közelítéssel,

$$\left(1 - \frac{1 + s_k T/2}{1 - s_k T/2} z^{-1} \right) \rightarrow [1 - (1 + \mu_k \pi) z^{-1}]$$

közéltéssel írható fel.

Látható, hogy mindkét transzformációs eljárás azonosan közelíthető, azaz a nevező pólusai mindkét esetben $z_k = \frac{1}{1 + \mu_k \pi} \cong i - \mu_k \pi$. Mivel $\mu_k \pi$ a feltételezés szerint kicsi, látható, hogy a stabilitás $z^{-1} = 1$ környezetében kritikus. Helyettesítünk a nevezőbe $z^{-1} = 1 - t$ -et:

$$D(z^{-1})|_{z^{-1}=1} = \prod_{k=1}^n (\mu_k \pi) = \prod_{k=1}^n (s_k T) \quad \text{vagy}$$

$$D(z^{-1})|_{z^{-1}=1} = 1 + \sum_{k=1}^n b_k z^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^n b_k$$

A kapott érték akadályozza meg a kritikus $z^{-1} = 1$ helyen a nevező 0-vá válását, tehát bármely b_k koefficiens legfeljebb $\prod_{k=1}^n (s_k T)$ értékkel változhat a stabilitás határán belül.

Az eredményből jól látható, és ezt általánosságban is elmondhatjuk, hogy a koefficiensek megengedett eltérése annál kisebb, minél nagyobb a mintavételi frekvencia és minél nagyobb n a nevező fokszáma.

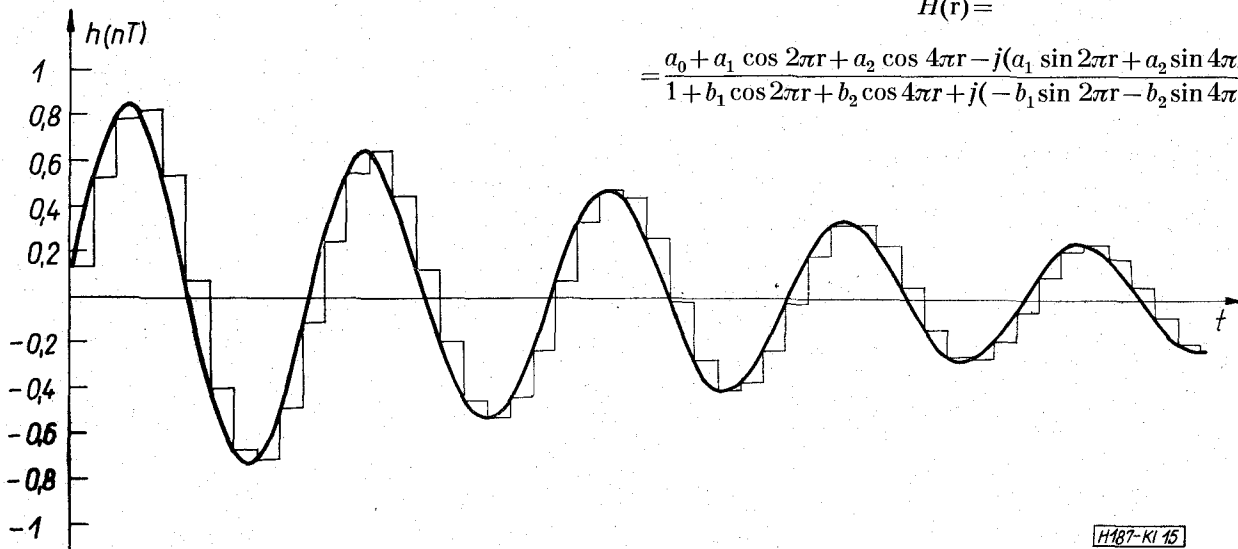
Ha az átviteli függvény megváltozására jellemző képet akarunk kapni — b_k tűrésének függvényében —, akkor a pólusok érzékenységét kell kiszámítani $\left(\frac{\partial z_k}{\partial b_k}\right)$, ebből azután b_k megengedhető ingadozása számítható [1, 2, 10].

4. Példa

Az elmondottak gyakorlati szemléltetésére és igazolására nézzünk egy egyszerű példát: egy másodfokú szűrőtag, egy soros rezgőkör digitális szimulációját (14a ábra).

Az átviteli függvény

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$



15. ábra

Alkalmazzuk a bilineáris transzformáció módszerét: s helyére írjunk

$$\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = -t$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

ahol

$$a_0 = a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{T^2}{T^2 + \frac{2T}{Q\omega_0} + \frac{4}{\omega_0^2}};$$

$$b_1 = \frac{2T - 8\omega_0^2}{T^2 + \frac{2T}{Q\omega_0} + \frac{4}{\omega_0^2}};$$

$$b_2 = \frac{T^2 - \frac{2T}{Q\omega_0} + \frac{4}{\omega_0^2}}{T^2 + \frac{2T}{Q\omega_0} + \frac{4}{\omega_0^2}}$$

Válasszunk $\omega_0 = 1$,

$$\omega_s = 10 \rightarrow T_s = \frac{2\pi}{10};$$

$$Q = i0.$$

Ezekkel az értékekkel:

$$H(z) = \frac{0,0873 + 0,174z^{-1} + 0,0873z^{-2}}{1 - 1,596z^{-1} + 0,944z^{-2}}$$

Ha most a mintavételes átviteli függvényt akarjuk kiszámítani és ábrázolni (a frekvencia függvényében) $z = e^{j\omega T}$ helyettesítést kell végrehajtani. Mivel

$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$ ezért $z = e^{j2\pi \frac{\omega}{\omega_s}} = e^{j2\pi r}$, tehát $r = \frac{\omega}{\omega_s}$ relatív frekvencia függvényében számítható $H(z)$ amplitúdó és fázismenete.

Az amplitúdómenet: $20 \lg |H(r)|$

$$H(r) =$$

$$= \frac{a_0 + a_1 \cos 2\pi r + a_2 \cos 4\pi r - j(a_1 \sin 2\pi r + a_2 \sin 4\pi r)}{1 + b_1 \cos 2\pi r + b_2 \cos 4\pi r + j(-b_1 \sin 2\pi r - b_2 \sin 4\pi r)}$$

H187-KI 15

A fázismenet

$$\varphi = \arctg \frac{\operatorname{Im}[H(r)]}{\operatorname{Re}[H(r)]}$$

$r=0,01$ és 1 között 40 pontban számítógéppel kiszámítva a $14b$ ábrán látható.

Az amplitúdó menet diagramjába a soros rezgőkör eredeti átvitelét is berajzoltuk, összehasonlítás céljából. Az ábrán jól látható a bilineáris transzformáció frekvenciaskála torzító hatása: nevezetesen, hogy az eredeti 0 -tól végtelenig terjedő frekvenciasávot 0 és $\frac{\omega_s}{2}$ közé szorítja, ugyanis az LC kör csillapítása csak végtelen frekvencián lesz végtelen, a digitális szűrő viszont $\frac{\omega_s}{2}$ -nél. A rezonanciapont is eltolódik kissé, ez „előtorzítással” kompenzálható lett volna:

$$\omega'_0 = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 T_s}{2} = \frac{20}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = 1,034.$$

Látható, mivel $\omega_0 = \frac{\omega_s}{10}$, itt még a tangens érték csak kicsit tér el az argumentumától, a korrekció mindössze $3,4\%$.

Az időtartománybeli viselkedést a rekurziós formula írja le:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-2) + a_2 x(n-2) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2).$$

Legyen x bemenőjel egységimpulzus (Dirac-impulzus), azaz $x(0) = \frac{1}{T_s}$, az összes többi $x(n) = 0$.

Az egységimpulzus gerjesztés hatására fellépő $y(n)$ válaszfüggvényt ismét számítógéppel számítottuk ki, eredményként a jól ismert exponenciális lecsengésű szinuszrezgés mintavételes alakját kaptuk (15. ábra).

Ellenőrzésként a kapott súlyfüggvényből Fourier-transzformációval kiszámítottuk a rendszer átviteli függvényét. $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt$ mintavételes alakra áttérve az integrálást szummával közelítettük

$$H(j\omega) \cong T_s \sum_{n=0}^N y(nT)e^{-j\omega n T_s}$$

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}; \quad \frac{\omega}{\omega_s} = r$$

helyettesítéssel

$$H(r) = T_s \sum_{n=0}^N y(nT)e^{-j2\pi r n}$$

A szummázás felső határát úgy választottuk meg, hogy a súlyfüggvény amplitúdója a kezdeti érték 5 ezrelékére csökkenjen. Az így kiszámított amplitúdó és fázismenet (a számítási pontosságon belül) jól egyezik a közvetlenül számítottal.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton fejezem ki köszönetemet *Ribényi András*-nak a téma felvetéséért és értékes tanácsaiért, *Mohos Zoltánnak* a kézirat ellenőrzéséért, *Erdélyi Ágostonnak* a számítások elvégzésében nyújtott segítségéért.

IRODALOM

- [1] Kuo—Kaiser: System Analysis by Digital Computers. John Wiley New York 1966.
- [2] Gold—Rader: Digital Processing of Signals. McGraw Hill 1969.
- [3] Géher Károly: Lineáris hálózatok. Műszaki Könyvkiadó 1968.
- [4] Bud Brocker: Commutating Filter Techniques. Design Electronics 1971. okt.
- [5] Anderson: Proramable Digital Filter. Electronics 1970. okt. 26.
- [6] Merkel: Applying Digital Filtering on Line. Control Engineering 1970. jan.
- [7] Nowak—Schmid: Introduction to Digital Filters. IEEE Trans. on Elektromagn. Compatability 1968. júni.
- [8] Szablatah: Approximation Theory for Digital Filters. IEEE Trans. on Circuit Theory 1971. nov.
- [9] Harrison—Leon: Digital Filters for Approximating Continuous Conv. IEEE Trans. on Circuit Theory 1971. nov.
- [10] Bede Liu: Effect of Finite Word Length on the Accuracy... IEEE Trans. on Circuit Theory 1971. nov.
- [11] McCudden: Digital Transversal Filter. Electronic Engineering 1971. márc.
- [12] White: MOS/LSI brings complex circuits... Electronics 1971. 14. sz.
- [13] Sallay Gyula: Adatátviteli összeköttetés kiegyenlítése transzverzális szűrővel. Híradástechnika 1971. 4. sz.
- [14] Gertler: Digital Filtering—Digital Simulation. Instruments Practice 1969. 10. sz.
- [15] Weaver: Migital Filtering with Applications to Electrocardiogram Processing. IEEE Trans. on AU 16. k. 3. sz.
- [16] Rader: On Digital Filtering. IEEE Trans. on AU 16. k. 3. sz.
- [17] Wilson: Digital Filter Stabilises Servo Control System. Electronic Engineering 1972. febr.
- [18] Harden: Digital Filters with IC's Boost Q without Inductors. Electronics 1967. júl. 24.
- [19] Rader—Gold: Digital Filter Design Techniques... Proc. IEEE 1967. febr.
- [20] Roecker: The Application of Digital Filters for MTI. IEEE Trans. AU 19. k. 1. sz.
- [21] Zverev: Digital MTI Radar Filter. IEEE Trans. on AU 16. k. 3. sz.
- [22] PCM csatornaszűrők. NTZ 22. k. 10. sz.
- [23] Nowak: A Nonrecursive Digital Filters for Data Transmission. IEEE Trans. on AU 16. k. 3. sz.
- [24] Liu—Kaneko: Error Analysis of Digital Filters. Proc. IEEE 1969. 10. sz.
- [25] Caprini—Sfetcu: Application of Digital Filtering in Improving the Resolution and SNR of Nuclear and Magnetic Resonance Spectra. IEEE Trans. on AU 1970. dec.
- [26] Otnes: An Elementary Design Procedure for Digital Filters. IEEE Trans. on AU 16. k. 3. sz.
- [27] Orłowski: Dynamic Behaviour of Discrete Filters... IFAC Szimpózium, Budapest 1968.
- [28] Jess: Kvantált jelek folyamatossá tétele interpoláló szűrőkkel. NTZ 21. k. 2., 12., sz. 20. k. 11. sz.
- [29] Anderson: Pseudo-Random and Random Test Signals. HP Journal 1967. szept.
- [30] Kun L.: Digitális szűrők elmélete és gyakorlati alkalmazási lehetőségeik, Híradástechnika XXIV. (1973) 3. sz.