HÍRADÁSTECHNIKA

DR. VÁGÓ ISTVÁN
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

Távvezetékek elektromágneses terének elméleti kérdéseiről

ETO 537.811;621.315.1

A távvezetékeken fellépő jelenségek az elektromágneses hullámok témakörébe tartoznak. A megfelelő egyenletek felírásának szokásos módszere az, hogy az áram és a feszültség közötti kapcsolatot az elektrosztatikus kapacitással, a stacionárius külső indukció együtthatóval és átvezetéssel, a kvázistacionárius ellenállással és belső indukció együtthatóval fejezik ki. A szakirodalomban ismertetett elméleti kutatások elsősorban TEM módusokra vonatkoznak. Ha a távvezeték veszteséges, akkor a terjedő hullám TM alapmódusú.

A következőkben olyan térelméleti meggondolásokat ismertetünk, amellyel a kapacitás és indukció együttható — veszteséges esetre is érvényes — általános definíciója adható meg és a terjedési együttható meghatározható. Tárgyalunk néhány olyan összefüggést is, amely összekapcsolja a távvezetékre vonatkozó tér- és hálózatelméletet.

Alapegyenletek

A Maxwell-egyenletek megoldása az $\mathbf{A}$ vektorpotenciál és a φ skalárpotenciál segítségével felírható. Ezek differenciálegyenlete:

$$\Delta \mathbf{A} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$\Delta\varphi - \sigma\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{2}$$

ahol σ a fajlagos vezetés, μ a permeabilitás, ε a permittivitás, ϱ a tértöltés és t az idő.

Tételezzük fel, hogy az $\mathbf{A}$ vektorpotenciál párhuzamos a vezeték tengelyével. Válasszuk ezt a koordináta-rendszer z-tengelyének. Ekkor

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_z = \mathbf{k}\, A(z, \vartheta_1, \vartheta_2) \tag{3}$$

ahol $\mathbf{k}$ a z-irányú egységvektor, ϑ_1 és ϑ_2 pedig tranzverzális, egymásra merőleges koordináták. Így az (1) egyenlet

$$\Delta A - \sigma\mu \frac{\partial A}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

alakban írható.

Beérkezett: 1973. I. 19.

A vektor- és a skalárpotenciál között a Lorentz-feltétel ad kapcsolatot:

$$-\frac{\partial A}{\partial z} = \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi. \tag{5}$$

A $\mathbf{H}$ mágneses és $\mathbf{E}$ villamos térerősség a következőképpen fejezhető ki az $\mathbf{A}$ és φ potenciállal:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{k}A = \operatorname{grad} A \times \mathbf{k} \tag{6}$$

$$\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \tag{7}$$

A (6) alatti egyenlet felírásánál figyelembe vettük, hogy $\operatorname{rot} \mathbf{k} = 0$. A $\operatorname{grad} A$ felírható két komponens összegeként, ezek az összetevők A-nak a tranzverzális koordináták szerinti kétdimenziós gradiense és a $\mathbf{k}\frac{\partial A}{\partial z}$. Vagyis

$$\operatorname{grad} A = \operatorname{grad}_\vartheta A + \frac{\partial A}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{8}$$

Így

$$\mathbf{H} = -\mathbf{k} \times \operatorname{grad}_\vartheta A. \tag{9}$$

Bontsuk fel a (7) egyenletet is tranzverzális és longitudinális komponensre:

$$E_\vartheta = -\operatorname{grad}_\vartheta \varphi, \tag{10}$$

$$E_z = -\mu \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{11}$$

(10)-ből megállapítható, hogy a villamos térerősség tranzverzális komponense örvénymentes, ugyanis felírható egy potenciálfüggvény gradienseként.

A kapacitás és a külső indukcióegyüttható

Keressük a (2) és (4) differenciálegyenlet megoldását szorzat szeparációval, vagyis írjuk fel a potenciálokat

$$A(z, \vartheta_1, \vartheta_2, t) = A_0 Z_a(z)\Theta_a(\vartheta_1, \vartheta_2) T_a(t) \tag{12}$$

és

$$\varphi(z, \vartheta_1, \vartheta_2, t) = \varphi_0 Z_\varphi(z)\Theta_\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2)T_\varphi(t) \qquad (13)$$

alakban. Helyettesítsük ezeket az (5) egyenletbe:

$$A_0 \frac{\partial z_a}{\partial z}\Theta_a T_a = \varphi_0 Z_\varphi \Theta_\varphi \left(a + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) T_\varphi \qquad (14)$$

Ez az összefüggés akkor teljesülhet ϑ_1-től és ϑ_2-től[1] függetlenül, ha

$$\Theta_a = \Theta_\varphi = \Theta(\vartheta_1, \vartheta_2). \qquad (15)$$

Ez azt jelenti, hogy a skalár- és vektorpotenciál tranzverzális koordinátáktól való függése azonos.

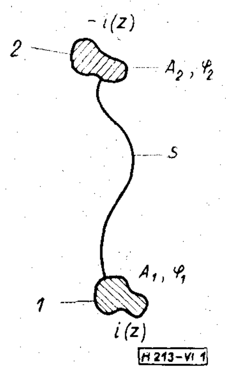
Definiáljuk a távvezeték egységnyi hosszára vonatkozó C kapacitását és L_k külső indukció együtthatóját a következőképpen:

$$C = \varepsilon \frac{\oint_{l_1} (\mathbf{k} \times \mathrm{grad}_\vartheta \varphi)\mathrm{d}\mathbf{l}}{\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{grad}_\vartheta \varphi \, \mathrm{d}s}; \qquad L_k = \mu \frac{\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{grad}_\vartheta A \mathrm{d}s}{\oint_{l_1} (\mathbf{k} \times \mathrm{grad}_\vartheta A)\mathrm{d}\mathbf{l}}. \qquad (16)$$

Geometriai összefüggések felhasználásával ezek az alábbi alakban írhatók:

$$C = \varepsilon \frac{-\oint_{l_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\mathrm{d}l}{\varphi_1 - \varphi_2}; \qquad L_k = \mu \frac{A_1 - A_2}{-\oint_{l} \frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l}. \qquad (17)$$

Itt l_1 az első vezetéket határoló görbét jelenti a z



1. ábra

helyen, s a tranzverzális síkban levő olyan görbét jelent, amely az első vezeték kerületének egy pontját a második vezetékkel összeköti (1. ábra), $\frac{\partial}{\partial n}$ a z helyen a vezeték felületére merőleges, a vezetéktől elmutató differenciálást jelöl, φ_1, ill. φ_2 a skalárpotenciál, A_1, ill. A_2 a vektorpotenciál értéke a z helyen az első, ill. a második vezeték felületén.

Helyettesítsük a (13) és (15) kifejezést a (17) összefüggésbe. Így

$$C = \varepsilon \frac{-\oint_{l_1} \frac{\partial \Theta}{\partial n}\mathrm{d}l}{\Theta_1 - \Theta_2} \qquad (18)$$

és (17)-ből (12) és (15) alapján:

$$L_k = \mu \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{-\oint_{l_1} \frac{\partial \Theta}{\partial n}\mathrm{d}l} \qquad (19)$$

ahol Θ_1 és Θ_2 jelenti Θ értékét az első és a második vezeték kerületén a z helyen.

A (18) és (19) összefüggésből megkapjuk az

$$L_k C = \mu\varepsilon \qquad (20)$$

ismert kifejezést.

A következőkben határozzuk meg az $E_\vartheta = -\mathrm{grad}_\vartheta \varphi$ felületi integrálját az első vezeték dz hosszúságú felületére. A negyedik Maxwell-egyenlet szerint ez az integrál arányos a dz hosszúságú vezeték qdz töltésével. (q a vezeték egységnyi hosszú darabjának töltése.)

$$\varepsilon \int_a \mathbf{E}_\vartheta \mathrm{d}\mathbf{a} = -\varepsilon \int_a \mathrm{grad}_\vartheta \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{a} = q\mathrm{d}z. \qquad (21)$$

Ebből geometriai összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$q = -\varepsilon \int_{l_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\mathrm{d}l. \qquad (22)$$

Jelöljük φ_1-gyel, ill. φ_2-vel a φ értékét a z helyen az első, ill. a második vezeték kerületén és u-val φ_1 és φ_2 különbségét, vagyis u a két vezeték közötti feszültség a z helyen:

$$u(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z). \qquad (23)$$

Így (17)-ből azt kapjuk, hogy

$$C = \frac{q}{u}. \qquad (24)$$

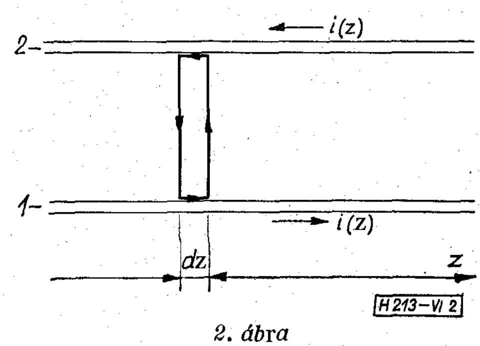
Ez azt jelenti, hogy C-nek (16)-ban adott kifejezése a kapacitás ismert definíciójával megegyezik.

A (9) összefüggés felhasználásával a gerjesztési törvényt az első vezeték kerületére a következő alakban írhatjuk fel:

$$i = \oint_{l_1} \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{l_1} (-\mathbf{k} \times \mathrm{grad}_\vartheta A)\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\oint_{l_1} \frac{\partial A}{\partial n}\mathrm{d}l. \qquad (25)$$

Integráljuk az $\mathbf{A}$ vektorpotenciált a dz szélességű húrok mentén (2. ábra). Ha a hurok által körülvett fluxus Φdz, akkor

$$\frac{\Phi}{\mu}\mathrm{d}z = \oint_s \mathbf{A}\mathrm{d}\mathbf{s} = (A_1 - A_2)\,\mathrm{d}z. \qquad (26)$$



2. ábra

A (16) alatti definícióból kapjuk, hogy

$$L_k=\frac{\Phi}{i}. \qquad (27)$$

Ez az összefüggés megegyezik az indukció együttható szokásos definíciójával.

A távíró egyenletek levezetése

Az eddigi eredmények alapján megkaphatjuk a távíró egyenleteket. Írjuk fel a (11) alatti összefüggést az egyes vezetők felületére és használjuk fel, hogy E_{z1} és E_{z2} — a villamos térerősség longitudinális komponense a két vezető felületén — a vezetékek belső teréből is kifejezhető:

$$E_{z1}=-\mu\frac{\partial A_1}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=R_1 i+L_{b1}\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (28)$$

$$E_{z2}=-\mu\frac{\partial A_2}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=-R_2 i-L_{b2}\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (29)$$

ahol R_1 és R_2, ill. L_{b1} és L_{b2} a két vezető ellenállása, ill. belső indukció együtthatója a szkin effektus figyelembevételével, i a vezető árama. A (28) és (29) különbségéből (23), (26) és (27) felhasználásával olyan differenciálegyenletet kapunk, amely u és i között jelent kapcsolatot:

$$-\frac{\partial u}{\partial z}=(R_1+R_2)i+(L_k+L_{b1}+L_{b2})\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (30)$$

Írjuk fel az (5) egyenletet a két vezeték felületére vonatkozóan:

$$-\frac{\partial A_1}{\partial z}=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_1, \qquad (31)$$

$$-\frac{\partial A_2}{\partial z}=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2. \qquad (32)$$

Vonjuk ki ezeket egymásból és vezessük be a

$$G=\sigma\frac{C}{\varepsilon} \qquad (33)$$

összefüggéssel az egységnyi hosszra vonatkozó G átvezetést. Így a (26), (27), (20) és (23) felhasználásával kapjuk, hogy

$$-\frac{\partial i}{\partial z}=\left(G+C\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{u} \qquad (34)$$

(30) és (34) a távíró egyenletek.

(1) és (2) a vektorpotenciálra és a skalárpotenciálra vonatkozó differenciálegyenlet. Oldjuk meg ezeket az egyenleteket. Bontsuk fel ehhez a Laplace-operátort a következőképpen:

$$\Delta=\Delta_\vartheta+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (35)$$

ahol Δ_ϑ a ϑ_1 és ϑ_2 változók szerinti kétdimenziós Laplace-operátort jelent. Ha az időfüggés szinuszos, akkor (4), (12) és (35) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\Theta}\Delta_\vartheta\Theta+\frac{1}{Z_a}\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}-j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)=0. \qquad (36)$$

A bal oldal első tagja kizárólag a tranzverzális koordinátáktól, a második kizárólag z-től függ, a harmadik tag pedig állandó. Így az egyenlet csak akkor teljesülhet, ha ezek a tagok egy-egy állandóval egyenlők, vagyis

$$\Delta_\vartheta\Theta-g^2\Theta=0 \qquad (37)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z_a}{\mathrm{d}z^2}-\gamma^2 Z_a=0 \qquad (38)$$

g^2 és γ^2 eleget tesz a

$$g^2+\gamma^2=\gamma_0^2 \qquad (39)$$

egyenletnek, ahol

$$\gamma_0^2=j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon) \qquad (40)$$

γ_0 a dielektrikumban terjedő síkhullám terjedési együtthatója.

A (38) egyenlet megoldása

$$Z_a(z)=C_1 e^{-\gamma z}+C_2 e^{\gamma z} \qquad (41)$$

alakú. A C_1 és C_2 állandó a távvezeték lezárásának feszültségéből és impedanciájából határozható meg.

A (37) egyenlet megoldásához konkrét koordinátarendszert szükséges felvenni. g értéke a távvezeték felületére vonatkozó határfeltételekből állapítható meg, g ismeretében pedig γ meghatározható.

A vezeték belsejében az eltolási áram elhanyagolható. Ekkor (40)-ből

$$\gamma_{0v}^2=j\omega\sigma_v\mu_v \qquad (42)$$

ahol a v index arra utal, hogy a terjedési együttható és az anyagjellemzők a vezetőre vonatkoznak.

γ értéke a vezető belsejére és a vezetőn kívüli térrészre ugyanaz. Az energia nagy része a dielektrikumban áramlik. Ebből következik, hogy γ és γ_0 azonos nagyságrendű. γ_{0v}, a síkhullám terjedési együtthatója a vezetőben, jóval nagyobb γ_0-nál. Így (39)-ből:

$$g_v^2\approx\gamma_{0v}^2=j\omega\sigma_v\mu_v. \qquad (43)$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy az elektromágneses tér változása a vezető belsejében rögzített z helyen független a hullámjelenségektől. A térerősségek amplitúdója — a kvazistacionárius esettel ellentétben — függ z-től. A vezeték belső impedanciája független a térerősség amplitúdójától. Ebből az következik, hogy a belső impedancia ugyanúgy számítható, mint kvázistacionárius tér esetén.

TEM módusú megoldás

TEM módus lép fel, ha a vezetékek veszteségmentesek ($R=0$; $L_b=0$) és a dielektrikum a tranzverzális síkokban homogén. Ebben az esetben a vezető belsejében és felületén $E_z=0$. Ekkor (28)-ból és (29)-ből:

$$-\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}=\mu\frac{\partial A_i}{\partial t} \quad (i=1, 2). \qquad (44)$$

A (31) és (32) egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$-\frac{\partial A_i}{\partial z}=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_i \qquad (i=1, 2). \tag{45}$$

Az utolsó két egyenletből kaphatjuk a következő differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\mu\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} \tag{46}$$

és

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\mu\frac{\partial A_i}{\partial t}. \tag{47}$$

Szinuszos időfüggés esetén (13)-ból és (40)-ből:

$$\frac{\partial^2 Z_\varphi}{\partial z^2}=\gamma_0^2 Z_\varphi \tag{48}$$

és hasonlóképpen (12)-ből:

$$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}=\gamma_0^2 Z_a \tag{49}$$

(38) és (39) figyelembevételével:

$$\gamma^2=\gamma_0^2 \tag{50}$$

és

$$g^2=0. \tag{51}$$

Az előbbi egyenletekből $Z_a(z)$ és $Z_\varphi(z)$ meghatározható.

Ebben az esetben (11), (44) és (15) alapján $E_z=0$ mindenütt.

A (37) egyenlet ekkor

$$\Delta_\varphi\Theta=0 \tag{52}$$

alakú. Ez kétdimenziós Laplace-egyenlet. Azt kapjuk tehát, hogy a z helyen az A és φ potenciálra vonatkozó differenciálegyenletek az elektrosztatika megfelelő egyenleteivel megegyeznek. Minthogy a φ-re vonatkozó határfeltételek is hasonlóak (φ állandó a vezeték kerületén a z helyen), a megoldás azonos az elektrosztatikus megoldással. Ebből következik, hogy veszteségmentes vezeték esetén a kapacitás megegyezik az elektrosztatikus kapacitással.

(52) alapján égy rögzített z helyen a vektorpotenciálra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\Delta_\vartheta A=0. \tag{53}$$

Stacionárius tér esetén a megfelelő egyenlet: $\Delta A=0$. Vagyis a két esetben a vektorpotenciálra vonatkozó differenciálegyenlet és annak megoldása azonos. Így veszteségmentes vezeték esetén az indukcióegyüttható a stacionárius indukcióegyütthatóval egyenlő, ugyanis az indukcióegyüttható a vektorpotenciál és az áram kifejezéséből ismert módon meghatározható.

TM módusú megoldás

Ha a vezeték veszteséges, akkor a villamos térerősségnek z-irányú komponense is van. Ezek a (28) és (29) egyenletből meghatározhatók. Ekkor nem TEM, hanem TM módus lép fel.

A következőkben kizárólag a szinuszos időbeli változás esetét vizsgáljuk. Ekkor (28) és (29) az

$$E_{z1}=i(R_1+j\omega L_{b1})=iZ_{b1} \tag{54}$$

$$E_{z2}=-i(R_2+j\omega L_{b2})=-iZ_{b2} \tag{55}$$

alakban írható. E_{z1} és E_{z2} a dielektrikumban fellépő térből is kiszámítható. (5)-ből és (11)-ből:

$$E_z=-j\omega\mu A+\frac{1}{\sigma+j\omega\varepsilon}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \tag{56}$$

(12), (39), (40) és (41) figyelembevételével:

$$E_z=-\frac{\gamma_0^2-\gamma^2}{\sigma+j\omega\varepsilon}A=-\frac{g^2}{\sigma+j\omega\varepsilon}A. \tag{57}$$

Írjuk fel ezeket a vezetékek felületére vonatkozóan:

$$E_{z1}=-\frac{g^2}{\sigma+j\omega\varepsilon}A_1=iZ_{b1}, \tag{58}$$

$$E_{z2}=-\frac{g^2}{\sigma+j\omega\varepsilon}A_2=-iZ_{b2}. \tag{59}$$

Ebből g^2 értéke meghatározható. Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$E_{z1}-E_{z2}=\frac{g^2}{\sigma+j\omega\varepsilon}(A_2-A_1)=i(Z_{b1}+Z_{b2}). \tag{60}$$

Helyettesítsük be A_2-A_1 értékét a (17)-ből. Így a (25) összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$g^2=-(Z_{b1}+Z_{b2})\frac{j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)}{j\omega L_k} \tag{61}$$

(20) és (33) alapján pedig

$$g^2=-(Z_{b1}+Z_{b2})(j\omega C+G). \tag{62}$$

Ekkor a terjedési együttható értékét a (39), (40) és (62) összefüggésből kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned}\gamma^2&=\gamma_0^2-g^2=j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)+(Z_{b1}+Z_{b2})(j\omega C+G)=\\&=(j\omega L_k+Z_{b1}+Z_{b2})(j\omega C+G).\end{aligned} \tag{63}$$

Ez az eredmény azonos az ismert összefüggéssel, azonban az ebben szereplő C, L_k és G csak közelítően egyenlő a megfelelő sztatikus és stacionárius mennyiséggel.

Az elektromágneses tér a tranzverzális síkban közelítően egyenlő a sztatikus és a stacionárius térrel. Általános esetben a Θ függvény a (37) hullámegyenletet, sztatikus és stacionárius esetben az (52) Laplace-egyenletet elégíti ki. g a terjedési együttható a tranzverzális síkban. Jelöljük d-vel a két vezető közötti távolságot. Ha $|gd|\ll 1$, akkor a két egyenlet megoldása közötti eltérés elhanyagolható. Ebben az esetben a kétféle kapacitás és indukció együttható közötti különbség gyakorlatilag elhanyagolható. Ez a gyakorlatban az ultrarövid hullámoknál nagyobb hullámhosszakra fennáll.