HÍRADÁSTECHNIKA

DR. KISS DÉNES
MHE Számítástechnikai és Szervezési Központja

DR. SOLYMOSI JÁNOS
BME Vezetékes Híradástechnika Tanszék

Magasabb rendű érzékenységek meghatározása transzfer függvények segítségével

ETO 62–501.22:621.372.2.001.2

Az érzékenység fogalmát Bode vezette be 1945-ben megjelent könyvében [1]. Azóta igen sok cikk és már könyv is [2] foglalkozik érzékenységgel kapcsolatos problémákkal, mivel a hálózatfüggvények elemek szerinti deriváltja nem csupán elméleti jelentőségű. Első felhasználásuk az automatikában és a szabályozástechnikában terjedt el [3, 4], azután pedig megjelent az elektronika területén is. Az érzékenységfüggvények legkézenfekvőbb alkalmazása a toleranciaszámításban mutatkozik meg, de alapvető fontosságú a változtatható paraméterű hálózatok számításánál és az iteratív szintézisnél is. Jelentősége csak növekedett az integrált áramkörök megjelenésével.

Ha y-nal jelöljük a hálózatfüggvényt és x_i-vel az áramköri elemeket, akkor az elsőrendű abszolút érzékenység

$$S_i=\frac{\partial y}{\partial x_i}, \tag{1}$$

az elsőrendű félig relatív érzékenység

$$Q_i=\frac{\partial y}{\partial \ln x_i}, \quad \text{ill.} \quad Q_i^r=\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}, \tag{2}$$

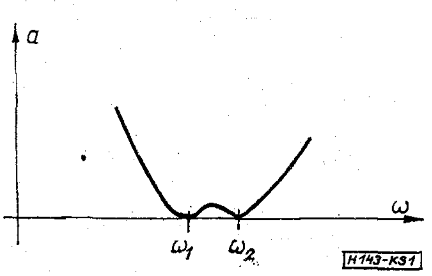
az elsőrendű relatív érzékenység pedig:

$$S_i^r=\frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_i}. \tag{3}$$

Amennyiben számításaink folyamán csak az elsőrendű érzékenységet tekintjük, akkor olyan mélységig vesszük figyelembe a hálózatok tulajdonságait, mint amilyen mélységű a függvények jellemzése, ha Taylor-soruk magasabb rendű tagjait elhanyagoljuk. Nyilvánvaló, hogy nem minden esetben elengendő a lineáris közelítés. Ha pl. egy sávszűrőt vagy bármilyen más passzív áramkört vizsgálunk (1. ábra), amelynek egyes frekvenciákon (ω_1 és ω_2) csillapítás zérus-helyei vannak, akkor ezeken a frekvenciákon nemcsak a csillapítás zérus, hanem a csillapításnak az áramköri elemekre vonatkoztatott elsőrendű deriváltjai, vagyis az elsőrendű érzékenységek is. Ezeken a frekvenciákon tehát a hálózat nem jellemezhető jól az elsőrendű érzékenységekkel. Vagy, ha pl. legrosszabb esetre méretezünk (worst case design) és az elsőrendű érzékenységek kis értékűek a másodrendűekhez képest, akkor tervezésünk valójában nem a „legrosszabb esetet" veszi számításba.

Elsőrendű érzékenységek meghatározására többféle módszer van; a hálózatfüggvény deriválásán kívül indirekt eljárások is lehetségesek. Kiszámítható az érzékenység a bilineáris tétel felhasználásával, speciális transzfer függvények, az állapotváltozós analízis, a scattering mátrix és a hatásgráfok segítségével is. Másodrendű érzékenységek is számíthatók különféleképpen [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Jelen dolgozatban a magasabb rendű érzékenységeket transzfer függvények segítségével fogjuk kiszámítani, amely módszer előnyösen alkalmazható, ha gyors analízisprogram áll rendelkezésre. Első lépésben a feszültségtranszfer függvény elsőrendű érzékenységének kiszámítási módszerét általánosítjuk



1. ábra

Beérkezett: 1971. XII. 2.

magasabb rendű érzékenységekre [11], második lépésben tetszőleges transzfer függvény tetszőleges rendű érzékenységét határozzuk meg.

1. Magasabb rendű érzékenységek számítása

1.1 Bihovszkij módszerének kiterjesztése magasabb rendű érzékenységek számítására

Indirekt módon, transzfer függvények segítségével *RLC* hálózatban egyszerűen határozható meg egy tetszőleges impedanciára vonatkoztatott, (2) szerint definiált félig relatív érzékenység [12]:

$$Q_i=\frac{\partial K}{\partial \ln Z_i}=K_{1i}K_{i2}, \tag{4}$$

ahol $g=K\dfrac{U_2}{U_1}$ (2*a* ábra),

$$K_{1i}=\frac{U_i}{U_1} \quad \text{(2}b\text{ ábra)},$$

$$K_i=\frac{U_2}{U_i} \quad \text{(2}c\text{ ábra)}.$$

A (4) kifejezés nemcsak impedanciára, hanem áramköri elemre vonatkozóan is alkalmazható, mivel $Z_i=j_i(j\omega)x_i$, ahol

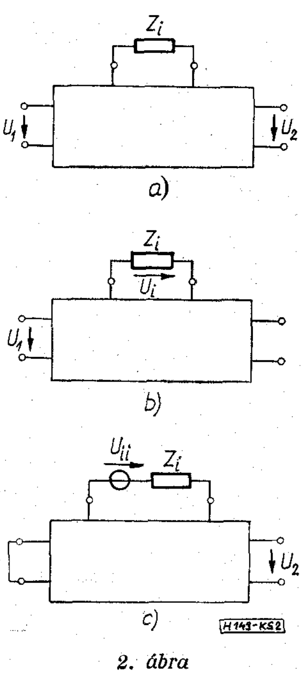
$$x_i=R_i \quad \text{esetén} \quad f_i(j\omega)=1,$$

$$x_i=L_i \quad \text{esetén} \quad j_i(j\omega)=j\omega,$$

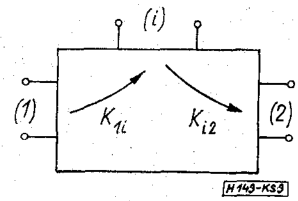
$$x_i=C_i^{-1} \quad \text{esetén} \quad j_i(j\omega)=\frac{1}{j\omega}.$$

Ekkor ugyanis

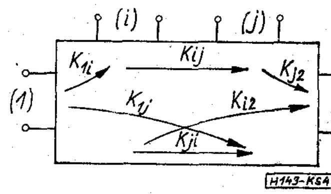
$$Q_i=\frac{\partial K}{\partial \ln x_i}=\frac{\partial K}{\partial \ln Z_i}\frac{\partial \,\mathrm{in}\, Z_i}{\partial \ln x_i}=\frac{\partial K}{\partial \ln Z_i}\frac{x_i}{Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial x_i}=$$
$$=\frac{\partial K}{\partial \ln Z_i}\frac{X_i}{Z_i}f_i=\frac{\partial K}{\partial \ln Z_i}\frac{Z_i}{Z_i}=\frac{\partial K}{\partial \ln Z_i}. \tag{5}$$



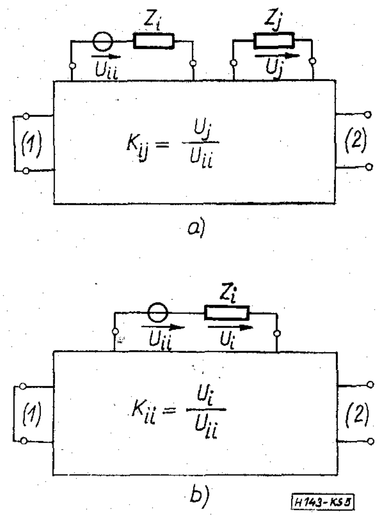
2. *ábra*



3. *ábra*



4. *ábra*



5. *ábra*

Érdemes megjegyezni, hogy a bemenet és a kimenet között egyetlen olyan irányított út található, amely érinti az *i*-edik kaput (3. ábra), és ehhez az úthoz hozzárendelhető a $K_{1i}K_{i2}$ útszorzat.

Határozzuk meg most a másodrendű érzékenységet az *i*-edik és a *j*-edik elemre vonatkoztatva:

$$Q_{ij}=\frac{\partial^2 K}{\partial \ln x_i \partial \ln x_j}=\frac{\partial Q_i}{\partial \ln x_j}=K_{1i}\frac{\partial K_{i2}}{\partial \ln x_j}+\frac{\partial K_{1i}}{\partial \ln x_j}K_{i2}.$$

Ha a (4) és (5) kifejezéseket alkalmazzuk itt, akkor

$$\frac{\partial K_{i2}}{\partial \ln x_j}=K_{ij}K_{j2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial K_{1i}}{\partial \,\mathrm{in}\, x_j}=K_{1j}K_{ji},$$

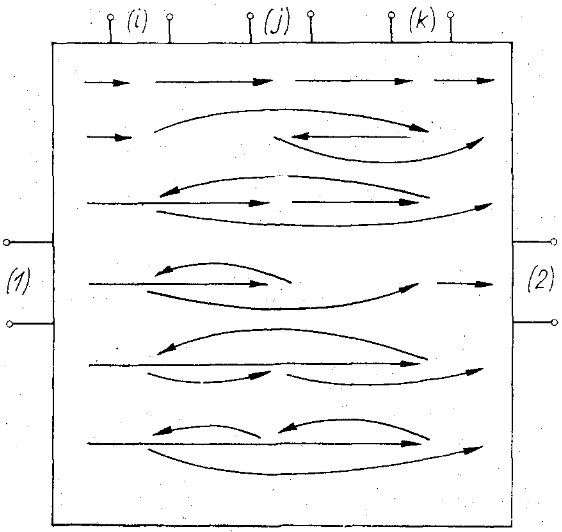
vagyis

$$Q_{ij}=K_{1i}K_{ij}K_{j2}+K_{1j}K_{ji}K_{i2}. \tag{6}$$

Jegyezzük meg ismét, hogy ebben az esetben a bemenet és a kimenet között összesen két irányított út található, amely érinti mind az *i*-edik, mind a *j*-edik kaput és e két úthoz rendelhető a (6) kifejezés két útszorzata (4. ábra).

A (6) kifejezés értelmezhető a $Q_{ii}=\dfrac{\partial^2 K}{\partial(\ln x_i)^2}$ másodrendű érzékenységre is $j=i$ helyettesítéssel:

$$Q_{ii}=K_{1i}K_{ii}K_{i2}+K_{1i}K_{ii}K_{i2}=2\,K_{1i}K_{ii}K_{i2}. \tag{7}$$



6. ábra

A K_{il} és K_{ij} transzfer függvények értelmezése az 5. ábrán látható.

Ha kiszámítjuk a harmadrendű érzékenységet, akkor

$$Q_{ijk}=\frac{\partial^3 K}{\partial \ln x_i \partial \ln x_j \partial \ln x_k}=K_{1i}K_{ij}K_{jk}K_{k2}+$$

$$+K_{1i}K_{ik}K_{kj}K_{j2}+K_{1j}K_{jk}K_{ki}K_{i2}+K_{1j}K_{ji}K_{ik}K_{k2}+$$

$$+K_{1k}K_{ki}K_{ij}K_{j2}+K_{1k}K_{kj}K_{ji}K_{i2}. \quad (8)$$

Q_{ijk} kifejezésében hat tagot találunk, amelyekhez ismét hat utat és hat útsorozatot definiálhatunk (6. ábra). A fentiekből levonhatjuk azt a következtetést, hogy a harmadrendű érzékenység esetén az érzékenységfüggvény $n!=3!=6$ tagból áll. Ez az összes olyan irányított utat determinálja, amely a bemenet és a kimenet között rajzolható, feltételezve az $n=3$ kapu érintését. Az is leolvasható, hogy egy útsorozat $n+1=4$ tényezőből áll. E megállapítás általánosságban is érvényes: egy $K=\frac{U_2}{U_1}$ üresjárati feszültség-transzfer függvénynek az R, L, C^{-1} elemekre vagy az impedanciára vonatkoztatott n-ed rendű $Q_{12\ldots n}=\frac{\partial^n K}{\partial \ln x_1 \partial \ln x_2 \ldots \partial \ln x_n}$ félig relatív érzékenységre mindig kifejezhető n! számú, n+1 tényezős, irányított útszorzat összegeként. A bizonyítást itt nem végezzük el, hanem eredményeinket kiterjesztjük általános lineáris koncentrált paraméterű hálózatokra.

1.2 Magasabb rendű vegyes érzékenységek meghatározása általános lineáris koncentrált paraméterű hálózatban

Bihovszkijnak az 1.1 szakaszban felhasznált tétele nemcsak magasabb rendű érzékenységek számítására terjeszthető ki, hanem aktív hálózatokra és tetszőleges transzfer függvényekre vonatkozóan is általánosítható. Az általánosítás röviden összefoglalva a következő [13]:

Ha a hálózat valamely i-edik ágának elektromos állapota eleget tesz a

$$Q_i=x_i K_i Q_l \quad (9)$$

feltételnek, ahol x_i egy ágparaméter (pl. L, R, C, μ, β),

K_i egy frekvenciától függő konstans,

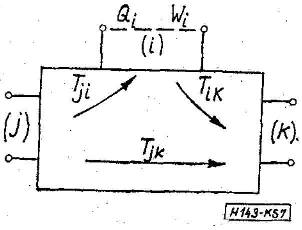
Q_i az ágban folyó áram vagy feszültség,

Q_l egy tetszőleges ágban folyó áram vagy feszültség,

akkor a hálózat egy transzfer függvényének az x_i szerinti logaritmikus deriváltját két másik transzfer függvény szorzatával számítjuk ki. Pontosabban (7. ábra)

$$\frac{\partial}{\partial \ln x_i} T_{jk}=T_{ji}T_{ik}=\frac{Q_i}{W_j}\,\frac{Q_k}{W_i}. \quad (10)$$

A (10) alkalmazásához azt kell megjegyeznünk, hogy T_{ik} meghatározásához az i-edik ágba Q_i-val megegyező jellegű generátort kell beiktatni. Vagyis ha a (9)-nek megfelelő Q_i feszültség, akkor a beiktatandó W_i egy sorosan elhelyezett feszültséggenerátor lesz.



7. ábra

A magasabb rendű érzékenységek meghatározásához az 1.1 szakaszban leírtakhoz hasonlóan induljunk ki a (10) összefüggésből és határozzuk meg x_l szerinti további deriváltját. Az eredmény:

$$\frac{\partial}{\partial \ln x_l}\left(\frac{\partial}{\partial \ln x_i} T_{jk}\right)=\frac{\partial}{\partial \ln x_l}(T_{ji}T_{ik})=$$

$$=T_{ji}\frac{\partial}{\partial \ln x_l} T_{ik}+T_{ik}\frac{\partial}{\partial \ln x_l} T_{ji}. \quad (11)$$

A (11) egyenlet jobb oldalán újabb transzfer függvények deriváltjai szerepelnek. Ha ezekre értelemszerűen alkalmazzuk a (10) összefüggést, akkor a

$$\frac{\partial}{\partial \ln x_i}\,\frac{\partial}{\partial \ln x_l} T_{jk}=T_{ji}T_{il}T_{lk}+T_{jl}T_{li}T_{ik} \quad (12)$$

kifejezést kapjuk.

A (12) formula a (6) kifejezés általánosítása tetszőleges transzfer függvényre, és ehhez is hozzárendelhető a 4. ábrának megfelelő két irányított út és két útszorzat.

A fentiek alapján megfogalmazható a következő tétel:

Tétel:

Egy hálózat valamely transzfer függvényének N számú elem szerinti vegyes logaritmikus deriváltja a be- és kimenetet összekötő és a szóban forgó elemeket tartalmazó összes lehetséges utakhoz rendelt útszorzatok összegéből áll. Az utak meghatározásához minden elemhez a (9) összefüggésnek megfelelő, de tetszőlegesen választható, áram- vagy feszültség típusú generátort kell beiktatni. Az N számú elemen keresztül haladó összes lehetséges utak száma az N elem permutációja, vagyis $N!$. Minden útszorzat $N+1$ mellék transzfer függvény szorzatából áll.

Bizonyítás:

A tételt a 4. ábra alapján teljes indukcióval bizonyítjuk. (10 és (12) képletünk szerint az állítás egy és két elemre igaz. Feltételezve, hogy N-re is igaz, vizsgáljuk meg az $N+1$-edik esetet.

Ha az állítás N-re igaz, akkor az N elem szerinti derivált $N!$ összeadandóból áll, melyek mindegyike $N+1$ transzfer függvény szorzata.

Deriváljunk egy ilyen tagot a következő elem szerint; akkor minden tagból $N+1$ tagú összeg lesz, amelynek minden tagja tartalmazni fogja valamelyik eredeti tényezőnek az új elem szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial}{\partial \ln x_{N+1}}(T_1 \ldots T_{N+1}) = \left(\frac{\partial}{\partial \ln x_{N+1}} T_1\right) T_2 \ldots T_{N+1} + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial \ln x_{N+1}} T_{N+1}\right) T_1 \ldots T_N . \tag{13}$$

A kifejezés jobb oldalán található zárójelek mindegyike azonban egy transzfer függvénynek az új elem szerinti deriváltja. Ez a derivált (10) szerint két új transzfer függvény szorzatára bontható fel, amely elemet magában foglaló útrészlet beiktatását jelenti.

Tekintettel arra, hogy ezt az új elemen áthaladó útbővítést minden régi útra el kell végezni — a szorzat deriválási szabályából következően —, eredményül valóban a megnövelt elemszám összes lehetséges útkombinációját kapjuk.

Továbbá ha figyelembe vesszük az új utak beiktatásánál az $N+1$-edik ágba elhelyezendő generátor megválasztásának eredeti szabályát is (hiszen a (10) összefüggést kell ismételten alkalmaznunk), akkor tételünket bebizonyítottuk.

1. Példa

Tételezzük fel, hogy a 8. ábrán látható kapcsolás $T_{15} = \frac{U_5}{V_1}$ transzfer függvényének C_2, μ_3 és L_4 szerinti vegyes parciális deriváltjára van szükségünk.

Első lépésként a szóban forgó elemek mindegyikénél választunk egy mérőirányt és egy, a méréshez (v. számításhoz) legalkalmasabbnak tűnő áramot vagy feszültséget (l. az ábrát). Ezek után megvizsgáljuk, hogyan elégíthető ki a (9) összefüggés, s beiktatjuk a Q_i-knek megfelelő W_i generátorokat (1. táblázat).

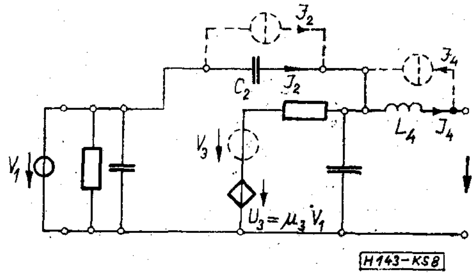
Figyeljük meg az 1. táblázatában, hogy a Q_i mennyiségnek a jelenlétén kívül semmiféle szerepe nincs (bármi lehet). Továbbá vegyük észre, hogy az L_4-nél választott T_4 esetén a (9) összefüggést csak $x=1/L$-re lehet kielégíteni: $I_4 = \frac{1}{L_4}\frac{1}{p}U_4$.

1. táblázat

$Q_i = x_i K_i Q_i,$

$Q_i \to W_i$

i	Q_i	x_i	K_i	Q_i	W_i
2	I_2	C_2	p	U_2	I_2
3	U_3	μ_3	1	V_1	V_3
4	I_4	$1/L_4$	$1/p$	U_4	I_4



8. ábra

A kérdés azonban $x=L$-re vonatkozott. A közvetett deriválás szabálya szerint a reciprok mennyiség szerinti deriválás előjelváltást okoz. Ezt mi a J_4 generátor ellenkező irányú bekapcsolásával vesszük figyelembe (8. ábra).

A fenti előkészítő munka után hozzákezdhetünk a vegyes parciális deriváltak meghatározásához.

2. táblázat

1	2	3	4	5
1	3	2	4	5
1	2	4	3	5
1	4	2	3	5
1	3	4	2	5
1	4	3	2	5

Tételünk alapján ($N=3$) az eredmény 6 darab 4-tényezős sorozat összegéből fog állni. A lehetséges utak és a megfelelő transzfer függvények felírásához célszerű egy táblázatot készíteni (2. táblázat). A táblázat alapján a transzfer függvények könnyen felírhatók, mivel a három középső számot kell permutálni:

$$\frac{\partial}{\partial \ln L_4}\frac{\partial}{\partial \ln \mu_3}\frac{\partial}{\partial \ln C_2} T_{15} = T_{12}T_{23}T_{34}T_{45} + T_{13}T_{32}T_{24}T_{45} + T_{12}T_{24}T_{43}T_{35} + T_{14}T_{42}T_{23}T_{35} + T_{13}T_{34}T_{42}T_{25} + T_{14}T_{43}T_{32}T_{25}, \tag{14}$$

ahol $T_{15} = \frac{U_5}{V_1}$.

A fenti számítás csak logaritmikus deriválásra vonatkozik. A közvetlen deriváltat azonban (a közvetett deriválás szabálya alapján) az előző eredmény $\frac{1}{L_4}\frac{1}{\mu_3}\frac{1}{C_2}$-vel szorzásával állíthatjuk elő.

A tétel kiterjesztése

Tételünk vegyes parciális deriváltak képzésére vonatkozik. A bizonyítás során azonban az újabb deriválások elemeire vonatkozóan semmiféle megkötést nem tettünk. Ebből következik, hogy a tétel magasabb rendű deriváltak képzésekor (transzfer függvény egyazon elem szerinti többszörös deriválása) is érvényes.

2. Példa

Határozzuk meg a 8. ábrán látható áramkör transzfer függvényének C_2 szerinti harmadrendű deriváltját!

A számítás előkészítése (mérőirány, beiktatott generátor) már az előző példában megtörtént. Magát az eredményt pedig a (14) képletből kaphatjuk, ha mind az L_4, mind a μ_3 helyébe C_2-t írunk. Az indexelésnél ez $4\rightarrow 2$ és $3\rightarrow 2$ helyettesítéssel adódik, vagyis eredményképpen a

$$\frac{\partial^3}{\partial(\ln C_2)^3}T_{15}=6T_{12}T_{22}^2T_{25} \qquad (15)$$

összefüggést kapjuk, ahol T_{22} értelemszerűen az $\frac{I_2}{J_2}$ transzfer függvényt jelenti.

Általánosítva a (15)-ben kapott eredményünket, képezhetjük egy elem szerint az n-ed rendű deriváltat is a

$$\frac{\partial^n}{\partial(\ln x_i)^n}T_{kj}=n!\,T_{ki}T_{ii}^{n-1}T_{ij} \qquad (16)$$

kifejezés alapján.

IRODALOM

[1] *Bode, H. W.:* Hálózatok és visszacsatolt erősítők tervezése. Műszaki Könyvkiadó, 1961.

[2] *Géher, K.:* Theory of Network Tolerances. Akadémiai Kiadó, 1971.

[3] *Truxal, J. G.:* Automatic Feedback Control System Synthesis. McGraw-Hill, 1955.

[4] *Horowitz, I. M.:* Synthesis of Feedback Systems, Academic Press, 1963.

[5] *Bingulac, S. P.:* Simultaneous generation of the second-order sensitivity functions. IEEE Trans. AC–11, No. 3. 1966, pp. 563–566.

[6] *Duros, J.:* An efficient method for the computation of second-order network sensitivity functions, Computer Aided Design, Autumn 1969, pp. 37–42.

[7] *Goddard, P. J.–Spence, R.:* Efficient method for the calculation of first- and second-order network sensitivities. Electronics Lettres, Vol. 5, No. 16, pp. 351–352, 1969.

[8] *Herendi M.:* Lánckapcsolások gépi számítása. Kandidátusi disszertáció, Magyar Tudományos Akadémia, 1968.

[9] *Richards, G. A.:* Second derivative sensitivity using the concept of the adjoint network. Electronics Letters, Vol. 5, No. 17, 1969.

[10] *Solymosi, J.:* Calculation of the second-order sensitivity functions by flow-graph metod. Proceedings of the Fourth Colloquium on Microwave Communication, Vol. II. CT–25 Akadémiai Kiadó, 1970.

[11] *Géher, K.–Solymosi, J.:* Calculation of higher-order sensitivities and higher-order sensitivity invariants IEEE International Symposium on Electrical Network Theory, London Sept. 6–10, 1971. pp. 7–8.

[12] Быховский, М.: Основы динамической точности электрическнх и механических цепей, Изд. Академии Наук СССР, Москва, 1958.

[13] *Kiss D.:* Elemérzékenységek meghatározása differenciálás nélkül, az állapotváltozós analizis segítségével. Híradástechnika, XVIII. évf. 11. szám, 333–339. old. 1967.