

Mikrohullámú reciprok és reaktáns kétkapus passzív szerkezet grafikus mátrixanalízise

ETO 512.831(083.57):621.372.5.029.6

A dolgozatban azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor a mikrohullámú reciprok és reaktáns kétkapus passzív szerkezet (a továbbiakban: „a vizsgált szerkezet” vagy „a szerkezet”) mátrixanalízisének célja:

- adott szerkezet S_{ij} szórási mátrixelemeinek meghatározása,
- az S_{ij} szórási mátrixelemekkel megadott szerkezet helyettesítő kapcsolásainak meghatározása,
- adott kapcsolat ekvivalens kapcsolásainak meghatározása.

A szerkezet mátrixanalízisének eredményeként adódó komplex függvények rögzített frekvencia esetén ábrázolhatók a poláris impedancia- (admittancia-) diagramon. Az ábrázolás eredménye egy jellegzetes vektorábra, „a szerkezet karakterisztikus vektorábrája”, amelynek segítségével az a) – c) típusú feladatok grafikusan megoldhatók. A megoldásnak ezt az új módszerét „grafikus mátrixanalízis”-nek neveztük el.

A dolgozat bevezető részében felírjuk a szimmetrikus szerkezet S_{ij} szórási (vagy reflexiós) mátrix-elemeit az egykapus reaktáns szerkezetek jellemző paramétereinek függvényében és viszont. Az adott függvényeket a poláris impedancia- (admittancia-) diagramon ábrázolva megszerkesztjük a szimmetrikus szerkezet karakterisztikus vektorábráját. Ennek birtokában a szimmetrikus szerkezet referenciasíkjainak a szimmetrikus transzformációja bevezetésével ismertetjük a nem szimmetrikus szerkezetek grafikus mátrixanalízisének elvi menetét. Végül az elmélet gyakorlati felhasználásának bemutatására elvégezzük a leggyakrabban alkalmazott szimmetrikus helyettesítő kapcsolások grafikus mátrix analízisét.

A szimmetrikus szerkezet karakterisztikus vektorábrája

A vizsgált szerkezet (1a ábra) S szórási mátrixának $S_{ij} = |S_{ij}| \exp(j\varphi_{ij})$ mátrixelemei és $s_i = \exp(j\varphi_i)$ sajátértékei közötti kapcsolatot leíró egyenletek [1, 2, 3]:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{s_1 + s_2}{2}, \quad S_{12} = S_{21} = \frac{s_1 - s_2}{2} \quad (1)$$

$$s_1 = S_{11} + S_{12}, \quad s_2 = S_{11} - S_{12} \quad (2)$$

ahol

s_i az 1b–1c ábrákon feltüntetett egykapus reaktáns szerkezetek bemeneti feszültségi reflexió-tényezője.

Az adott egykapus szerkezetek

$$z'_i = \frac{z'_i}{z_0} = jX'_i \quad (3)$$

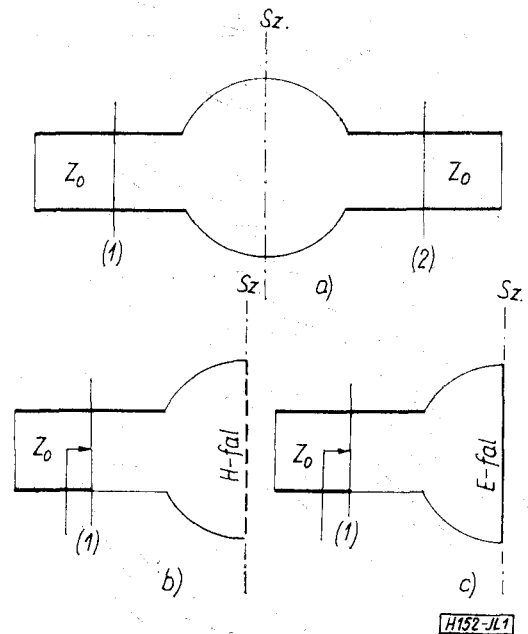
normált bemeneti impedanciájának, illetve

$$y'_i = \frac{y_i}{y_0} = jB'_i = -j \frac{1}{X'_i} \quad (4)$$

normált bemeneti admittanciájának függvényében:

$$s_i = \frac{z'_i - 1}{z'_i + 1}, \quad (5)$$

$$s_i = \frac{1 - y'_i}{1 + y'_i}. \quad (6)$$



1. ábra. a) Ideális homogén tápvonalakban végződő szimmetrikus, reciprok és reaktáns mikrohullámú kétkapus passzív szerkezet. b), c) A szerkezet S' , Z : és Y' karakterisztikus mátrixainak sajátértékei

Az (1)–(6) egyenletek megoldásaként az $S_{ij}(z'_i)$, $S_{ij}(y'_i)$, $z'_i(S_{ij})$, $y'_i(S_{ij})$ komplex függvények:

$$S_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{jX'_1 - 1}{jX'_1 + 1} + \frac{jX'_2 - 1}{jX'_2 + 1} \right), \quad (7)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{jX'_1 - 1}{jX'_1 + 1} - \frac{jX'_2 - 1}{jX'_2 + 1} \right), \quad (8)$$

$$S_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - jB'_1}{1 + jB'_1} + \frac{1 - jB'_2}{1 + jB'_2} \right), \quad (9)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - jB'_1}{1 + jB'_1} - \frac{1 - jB'_2}{1 + jB'_2} \right), \quad (10)$$

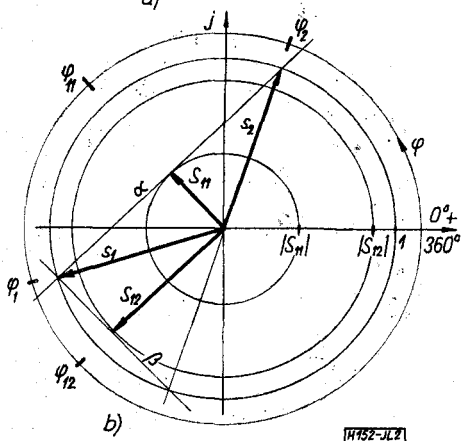
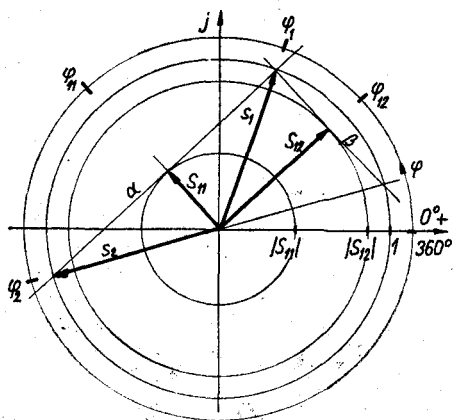
$$z'_1 = \frac{1 + (S_{11} + S_{12})}{1 - (S_{11} + S_{12})} = jX'_1, \quad (11)$$

$$z'_2 = \frac{1 + (S_{11} - S_{12})}{1 - (S_{11} - S_{12})} = jX'_2, \quad (12)$$

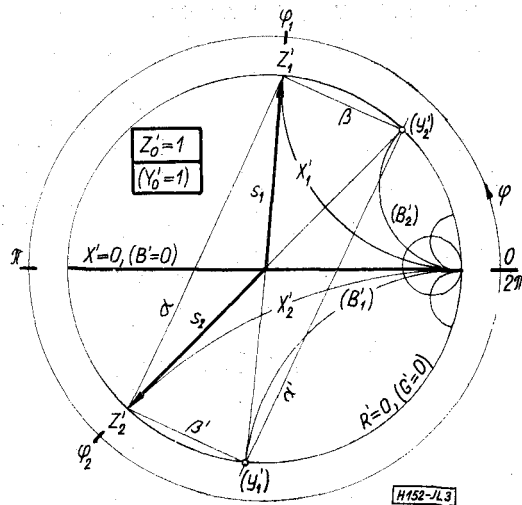
$$y'_1 = \frac{1 - (S_{11} + S_{12})}{1 + (S_{11} + S_{12})} = jB'_1, \quad (13)$$

$$y'_2 = \frac{1 - (S_{11} - S_{12})}{1 + (S_{11} - S_{12})} = jB'_2. \quad (14)$$

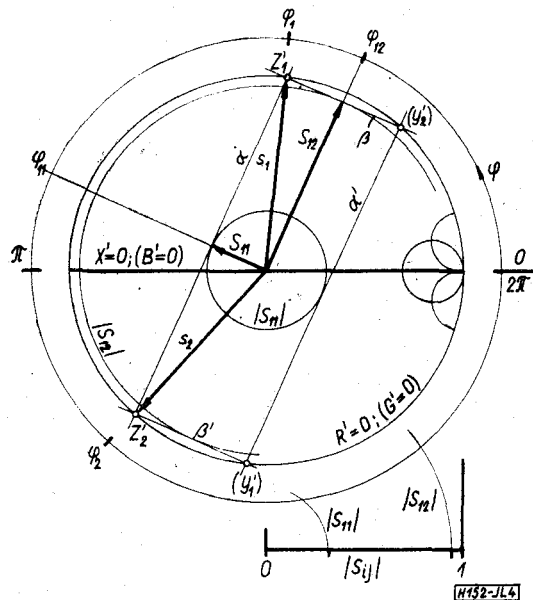
Ezzel a szimmetrikus szerkezetet leíró komplex függvényeket — az α – c) típusú feladatok megoldásához — levezettük.



2. ábra. Az (1) és (2) komplex függvények ábrázolása a komplex számsíkon: a) $\varphi_2 > \varphi_1$, b) $\varphi_2 < \varphi_1$ esetén



3. ábra. A (3)–(6) komplex függvények ábrázolása a poláris impedancia- (admittancia-) diagramon, $\varphi_2 > \varphi_1$ esetén



4. ábra. Az (1)–(14) komplex függvények ábrázolása a poláris impedancia- (admittancia-) diagramon, $\varphi_2 > \varphi_1$ esetén

Az (1), (2) függvények ábrázolása a komplex számsíkon a 2. ábra szerinti. A továbbiak szempontjából lényeges annak megállapítása, hogy

- az egységsugarú kör α szelője merőleges a φ_{11} = állandó egyenesre és érintője az $|S_{11}|$ sugarú koncentrikus körnek,
- az egységsugarú kör β szelője merőleges a φ_{12} = állandó egyenesre és érintőjére az $|S_{12}|$ sugarú koncentrikus körnek.
- az α és β szelők az egységsugarú körön egymást merőlegesen metszik,
- az S_{ij} szórási mátrixelemek az alábbi kötéseknek tesznek eleget:

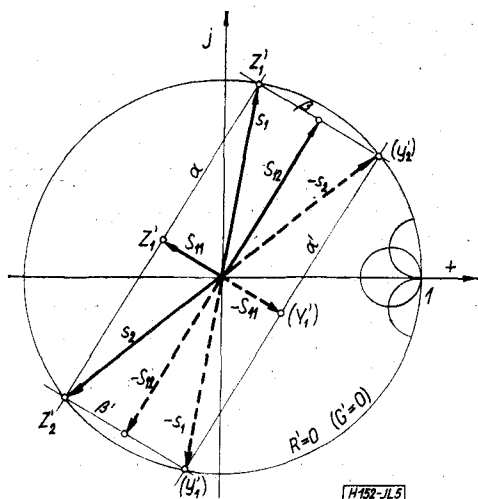
$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \quad (15)$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{11} \pm \pi/2 \quad (16)$$

A (3)–(6) komplex függvények ábrázolása a poláris impedancia- (admittancia-) diagramon a 3. ábra szerinti.

Mivel a poláris impedancia- (admittancia-) diagram $R'=0$ ($G'=0$) paraméterű köre azonos a komplex számsík origó középpontú egységsugarú körével, a 2. és 3. ábrán feltüntetett diagramok egymással fedésbe hozhatók (4. ábra). Ezzel olyan diagramhoz jutottunk, amely az (1)–(6) függvények mellett a (7)–(14) függvények ábrázolását is tartalmazza.

Az (1)–(14) komplex függvényeknek egyetlen poláris impedancia- (admittancia-) diagramon való ábrázolása jellegzetes vektorábrához vezet (5. ábra), amelynek „a szerkezet karakterisztikus vektorábrája” – vagy röviden „karakterisztikus vektorábra” elnevezést adtuk.



5. ábra. Az 1a ábrán feltüntetett szerkezet karakterisztikus vektorábrája $\varphi_{12} = (\varphi_{11} - \pi/2)$ esetén

A karakterisztikus vektorábrán célszerűen feltüntetjük a szerkezet illesztett lezárása esetén mért

$$Z'_1 = \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \quad (17)$$

normált bemeneti impedanciát és az

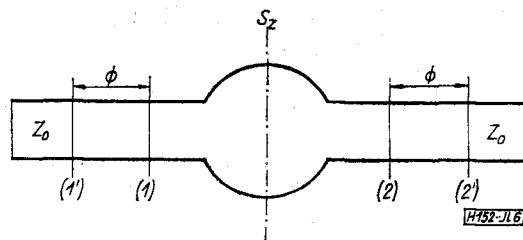
$$Y'_1 = \frac{1}{Z'_1} = \frac{1 - S_{11}}{1 + S_{11}} \quad (18)$$

normált bemeneti admittanciát is.

Megfigyelhető, hogy a karakterisztikus vektorábra egyértelműen megszerkeszthető, ha paraméterei $(z_1, \dots, S_{ij}, \dots, Z'_i, \dots)$ közül bármelyik két, egymástól lineárisan független paraméter adott. Ezért az a)–c) típusú feladatok a karakterisztikus vektorábra alkalmazásával grafikusán megoldhatók.

A grafikus mátrixanalízis menete a referenciasíkok szimmetrikus transzformációja esetén

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az 1a ábra szerinti szerkezettel egy-egy Φ elektromos hosszúságú távvezetékszakaszt szimmetrikusan láncbakapcsolunk



6. ábra. Az 1a ábrán feltüntetett szerkezet bővítése egy-egy Φ elektromos hosszúságú távvezetékszakasszal

(6. ábra) vagy más szóval: a referencia síkokat Φ elektromos hosszúságú szakaszon szimmetrikusan transzformáljuk. Az így felépített szerkezethez két karakterisztikus vektorábra tartozik: az egyik az 1a ábra szerinti szerkezet 5. ábrán feltüntetett karakterisztikus vektorábrája, a másik az adott eredő szerkezeté, amelynek paramétereit ellátjuk egy újabb e lábindexszel is.

Az S_{ij} és S_{je} szórási mátrixelemek kapcsolatát leíró

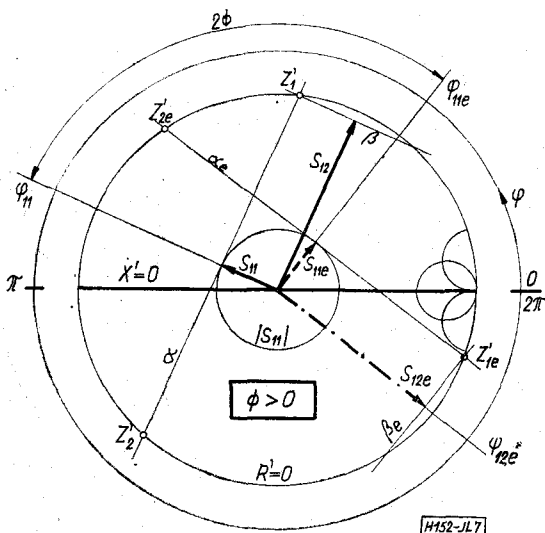
$$S_{ij2} = S_{ij} e^{-j2\Phi} = |S_{ij}| e^{j(\varphi_{ij} - 2\Phi)} \quad (19)$$

összefüggés ([2] 369 old., [3], 34–36 old.) alapján közvetlenül belátható, hogy az 5. ábrán feltüntetett karakterisztikus vektorábrának -2Φ szöggel való elforgatása az eredő szerkezet karakterisztikus vektorábráját adja (7. ábra). A könnyebb áttekinthetőség céljából a karakterisztikus vektorábrákat csak részben tüntettük fel.

Befejezésül megjegyezzük még, hogy a 7. ábrán leítüntetett karakterisztikus vektorábrák (kiegészítve a még hiányzó részekkel is) lényegében a vizsgált szerkezetet leíró egyenletrendszerek három csoportjának:

- az 1a ábrán feltüntetett szerkezetet leíró,
- az 5. ábrán feltüntetett, eredő szerkezetet leíró,
- a két karakterisztikus vektorábra paramétereinek kapcsolatát leíró

egyenletrendszerek grafikus megoldását tartalmazzák. A távvezetékszakasszokkal bővített szerkezet



7. ábra. Távvezetékszakasszokkal bővített szerkezet karakterisztikus vektorábrái (részlet) $\varphi_{12} = (\varphi_{11} - \pi/2)$ és $\Phi > 0$ esetén

karakterisztikus vektorábrái tehát a grafikus mátrixanalízis módszereinek, lehetőségeinek és korlátainak mintegy összefoglalását adják szimmetrikus szerkezetek analizisénél. Megállapítható, hogy a karakterisztikus vektorábrák birtokában az analizis $a)$ – $c)$ típusú feladatai grafikusán megoldhatók. A szerkezet grafikus mátrixanalízisének menete lényegében tehát nem más, mint a szerkezet karakterisztikus vektorábrájának megszerkesztése.

A grafikus mátrixanalízis menete a referenciasíkok nem szimmetrikus transzformációja esetén

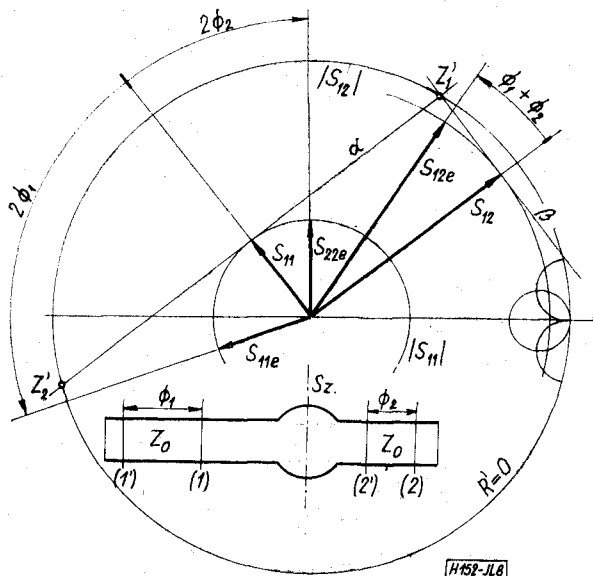
A grafikus mátrixanalízis módszerei alkalmazhatók azokban az esetekben is, amikor a szimmetrikus szerkezet referenciasíkjait nem szimmetrikusan transzformáljuk. Transzformálva ugyanis a referencia síkokat a bemeneti oldalon Φ_1 , a kimeneti oldalon $\Phi_2 \neq \Phi_1$ elektromos hosszúságú szakaszon, az eredő szerkezet S_{ije} szórási mátrixelemei S_{ij} Φ_1 és Φ_2 függvényében, a következő formában írhatók fel [2, 3]:

$$S_{11e} = S_{11} e^{-j2\Phi_1} = |S_{11}| e^{j(\varphi_{11} - 2\Phi_1)}, \quad (20)$$

$$S_{22e} = S_{11} e^{-j2\Phi_2} = |S_{11}| e^{j(\varphi_{11} - 2\Phi_2)}, \quad (21)$$

$$S_{12e} = S_{21e} = S_{12} e^{-j(\Phi_1 + \Phi_2)} = |S_{12}| e^{j[\varphi_{12} - (\Phi_1 + \Phi_2)]}. \quad (22)$$

A fenti egyenletek alapján, kiindulva a szimmetrikus szerkezet karakterisztikus vektorábrájából, az eredő szerkezet S_{ije} szórási mátrixelemei grafikus úton meghatározhatók (8. ábra). Mivel a szerkesztés menete megfordítható, a 8. ábrán feltüntetett elvi megoldás alkalmazásával nem szimmetrikus szerkezetek esetén is számos feladat megoldható a grafikus mátrixanalízis módszereivel.



8. ábra. A grafikus mátrixanalízis menete a referenciasíkok nem szimmetrikus transzformációja esetén

Alkalmazási példák

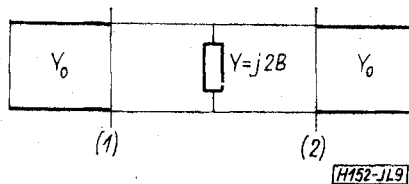
A mikrohullámú szerkezet analizisénél általában a szerkezet helyettesítő kapcsolásával dolgozunk. Hasonló a helyzet valamely előírt mikrohullámú áramkör realizációjának meghatározásakor is. A leggyakrabban alkalmazott szimmetrikus helyettesítő kapcsolások:

1. sönt szuszceptancia négypólus,
2. soros reaktancia négypólus,
3. távvezetékszakaszokkal bővített sönt szuszceptancia,
4. távvezetékszakaszokkal bővített soros reaktancia,
5. szimmetrikus T-tag,
6. szimmetrikus π -tag,
7. távvezetékszakaszokkal bővített szimmetrikus T-tag,
8. távvezetékszakaszokkal bővített szimmetrikus π -tag.

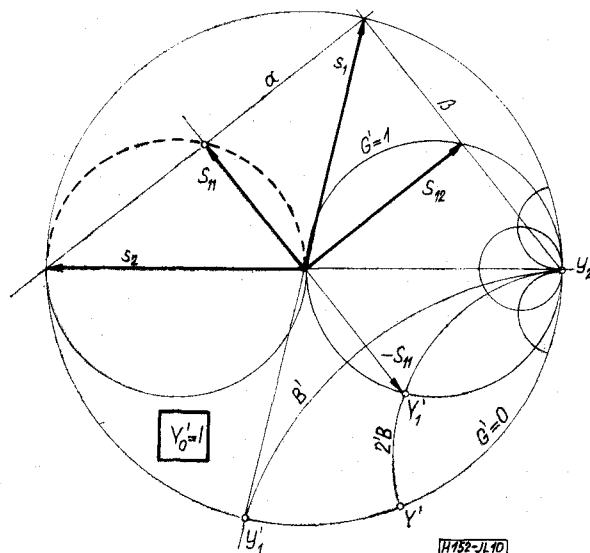
Az alábbiakban megszerkesztjük az 1.–7. kapcsolások karakterisztikus vektorábráját (illetve vektorábráit).

1. A sönt szuszceptancia négypólus (9. ábra) Y' normált admittancia-mátrixának saját értékei:

$$y'_1 = \frac{jB}{Y_0} = jB'; \quad y'_2 = \infty. \quad (23)$$



9. ábra. Sönt szuszceptancia négypólus



10. ábra. Sönt szuszceptancia négypólus karakterisztikus vektorábrája (részlet) $-\infty < B \leq 0$ esetén

Az y'_i normált admittanciákat, a poláris admittanciadiagramon ábrázolva, a karakterisztikus vektorábra megszerkeszthető (10. ábra). A gyakorlati alkalmazáshoz lényeges annak rögzítése, hogy az

$$Y'_1 = 1 + j2B' \quad (24)$$

és az S_{ij} szórási mátrixelemekre vonatkozó (15), (16) kötések alapján:

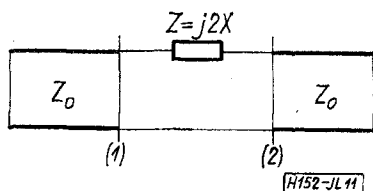
- az S_{12} mátrixelem végpontja elvileg a $G'=1$ paraméterű körre esik,
- az S_{11} mátrixelem végpontja elvileg a $G'=1$ paraméterű kör inverz körére esik.

Megjegyezzük még, hogy $0 < B < \infty$ esetén

$$3\pi/2 > \varphi_{11} > \pi \quad \text{és} \quad \varphi_{12} = \varphi_{11} + \pi/2.$$

2. A soros reaktancia négypólus (11. ábra) Z' normált impedanciadiagramjának sajátértékei:

$$z'_1 = \infty, \quad z'_2 = \frac{jX}{Z_0} = jX'. \quad (25)$$

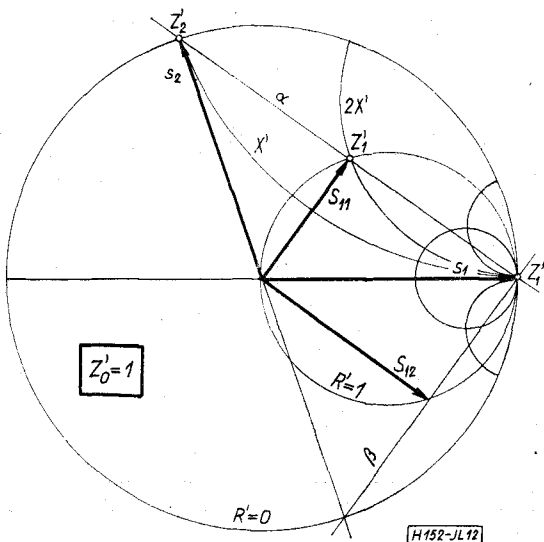


11. ábra. Soros reaktancia négypólus

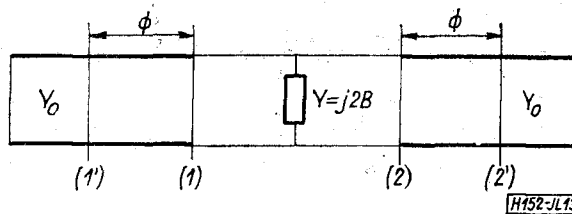
Poláris impedanciadiagramon ábrázolva a z'_i normált impedanciákat, a karakterisztikus vektorábra megszerkeszthető (12. ábra). Adott esetben, mivel az illesztett lezárás esetén mért bemeneti impedancia normált értéke:

$$Z'_1 = 1 + j2X' \quad (26)$$

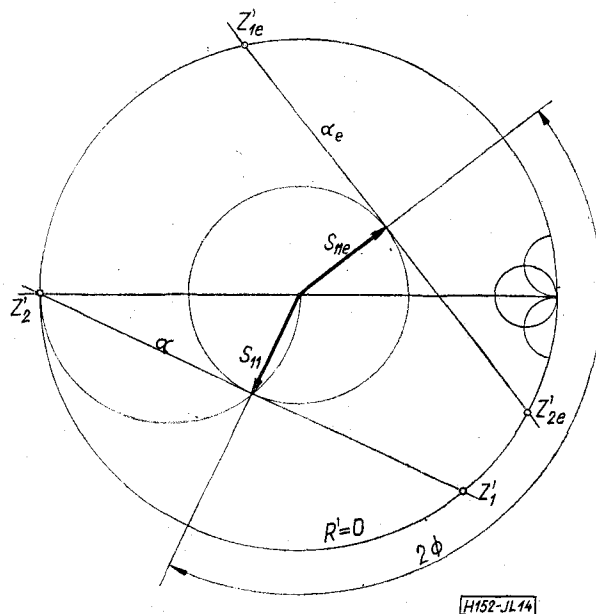
az S_{11} és S_{12} mátrixelemek végpontja elvileg az $R'=1$ paraméterű körre esik. Könnyen belátható, hogy $-\infty < X < 0$ esetén $0 > \varphi_{11} > -\pi$ és $\varphi_{12} = \varphi_{11} + \pi/2$.



12. ábra. Soros reaktancia négypólus karakterisztikus vektorábrája (részlet) $0 \leq X < \infty$ esetén



13. ábra. Távvezetékszakaszokkal bővített sönt szuszceptancia



14. ábra. A 13. ábrán feltüntetett kapcsolás karakterisztikus vektorábrái (részlet) $0 \leq B < \infty$ és $\Phi < 0$ esetén

3. Alkalmazva az elvi megoldás 7. ábrán feltüntetett menetét és figyelembe véve a sönt szuszceptancia négypólus 10. ábrán feltüntetett karakterisztikus vektorábráját, a 13. ábra szerinti kapcsolás karakterisztikus vektorábrái egyszerű módon megszerkeszthetők. Mivel a kapcsolási paraméterek vizsgálható értéke: $B \neq 0$; $\Phi \neq 0$, a feladathoz B és Φ előjelétől függően elvileg négy megoldás tartozik. Ezek egyikét a 14. ábrán tüntettük fel.

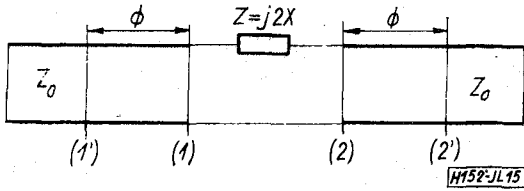
4. A távvezetékszakaszokkal bővített soros reaktancia (15. ábra) karakterisztikus vektorábrái a fentivel analóg módon szerkeszthetők meg. Az elvileg lehetséges négy eset egyikére a megoldást a 16. ábrán tüntettük fel.

5. A szimmetrikus T-tag (17. ábra) Z' normált impedanciadiagramjának sajátértékei:

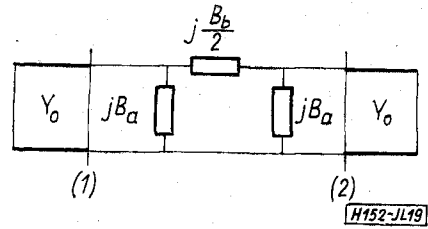
$$z'_1 = \frac{j(X_a + X_b)}{Y_0} = j(X'_a + X'_b) = jX'_1, \quad (27)$$

$$z'_2 = \frac{jX_a}{Y_0} = jX'_a = jX'_2.$$

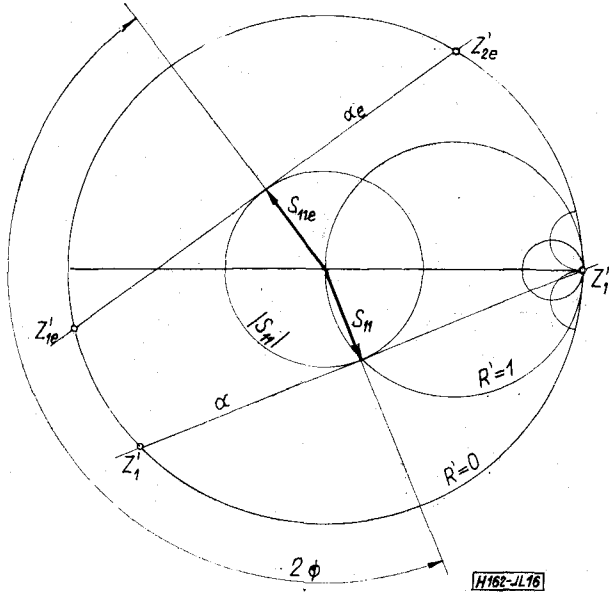
Poláris impedanciadiagramon ábrázolva a z'_i normált impedanciákat, a karakterisztikus vektorábra megszerkeszthető. Az elvileg lehetséges négy eset egyikére a megoldást a 18. ábrán tüntettük fel.



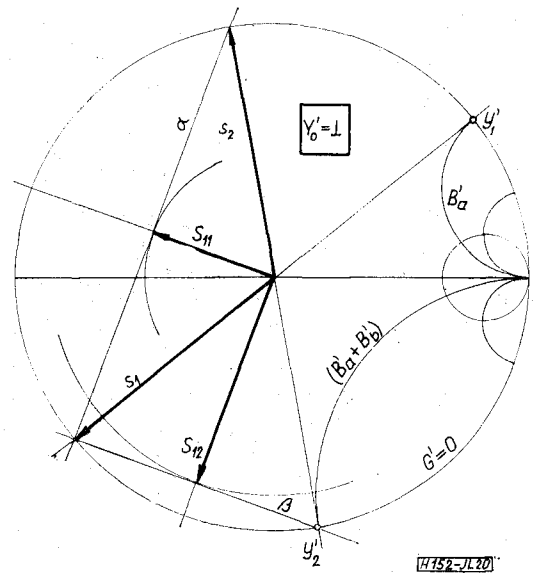
15. ábra. Távvezetékszakaszokkal bővített soros reaktancia



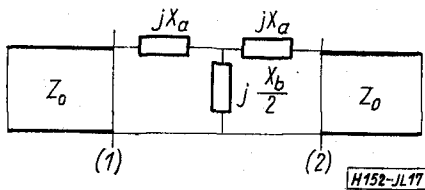
19. ábra. Szimmetrikus pi-tag



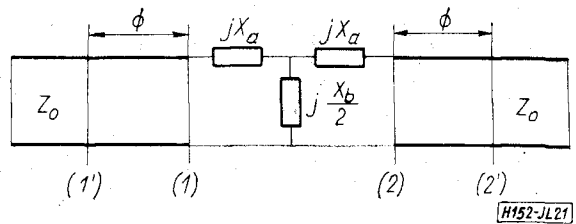
16. ábra. A 15. ábrán feltüntetett kapcsolás karakterisztikus vektorábrái (részlet) - $-\infty < X < 0$ és $\Phi > 0$ esetén



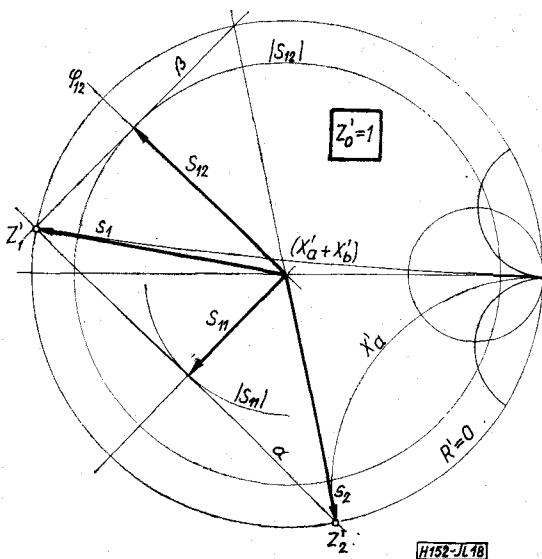
20. ábra. Szimmetrikus pi-tag karakterisztikus vektorábrája (részlet) $0 < B_a < \infty$, $B_b < 0$ esetén



17. ábra. Szimmetrikus T-tag



21. ábra. Távvezetékszakaszokkal bővített szimmetrikus T-tag



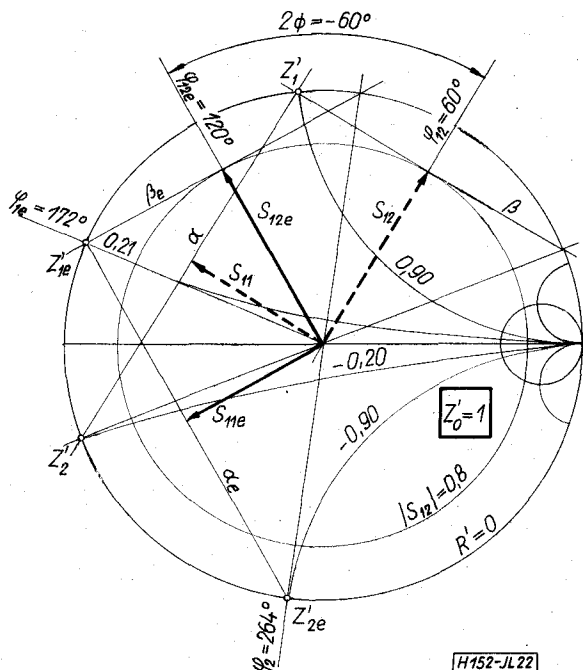
18. ábra. Szimmetrikus T-tag karakterisztikus vektorábrája (részlet) - $-\infty < X_a < 0$, $X_b > 0$ esetén

6. A szimmetrikus pi-tag (19. ábra) Y' normált admittanciamátrixának sajátértékei:

$$\begin{aligned} y'_1 &= \frac{jB_a}{Y_0} = jB'_a = jB'_1, \\ y'_2 &= \frac{j(B_a + B_b)}{Y_0} = j(B'_a + B'_b) = jB'_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Poláris admittanciadiagramon ábrázolva az y'_i normált admittanciákat, a karakterisztikus vektorábra megszerkeszthető. Az elvileg lehetséges négy eset egyikére a megoldást a 20. ábrán tüntettük fel.

7. A távvezetékszakaszokkal bővített szimmetrikus T-tag (21. ábra) grafikus mátrixanalízisének tételünk fel, hogy az eredő szerkezet S_{jje} szórási mátrix-elemeinek értéke rögzített és a feladat az X_a , X_b és Φ kapcsolási paraméterek értékének meghatározása.



22. ábra. A 20 ábrán feltüntetett kapcsolat karakterisztikus vektorábrái (részlet) $|S_{12e}| = 0,8$, $\varphi_{12e} = 120^\circ$, $\varphi_{11e} = 210^\circ$ és $\Phi = -30^\circ$ esetén

Az adott feladatnak elvileg végtelen sok megoldása lehetséges. Ilyen esetekben szokás a három kapcsolási paraméter egyikét független változónak tekinteni, s ennek függvényében megadni a másik két kapcsolási paraméter értékét.

Legyen az előírás pl. $S_{12e} = 0,8 \exp(j120^\circ)$, $\varphi_{11e} = (\varphi_{12e} - \pi/2)$, és tekintsük független változónak a távvezeték szakaszok Φ elektromos hosszát. A grafikus megoldás menete $\Phi = 0$ és $0 > \Phi = -30^\circ$ esetére a 22. ábrán látható. Az ábrán feltüntetett értékek és az

$$\boxed{X'_a = X'_1, \quad X'_b = X'_2 - X'_1} \quad (29)$$

összefüggések alapján:

$$\Phi = 0 \text{ esetén } X'_{a0} = -0,9; \quad X'_{b0} = 1,11,$$

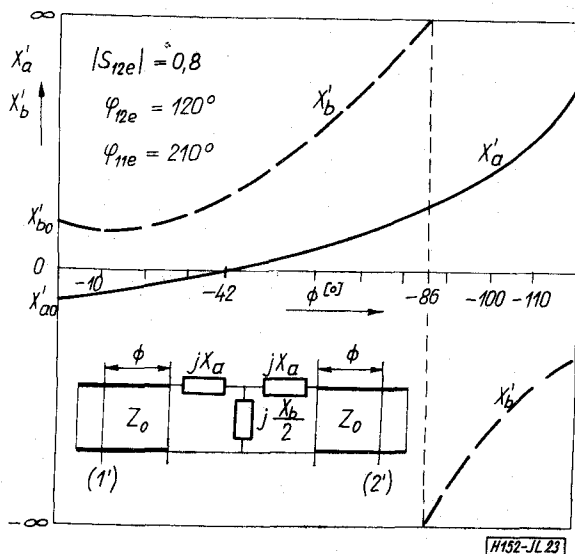
$$\Phi = -30^\circ \text{ esetén } X'_a = -0,2; \quad X'_b = 1,1.$$

Könnyen belátható, hogy

$$2\Phi = \varphi_{2e} - \pi = -84^\circ \text{ esetén } X'_a = 0,$$

$$2\Phi = -\varphi_{1e} = -172^\circ \text{ esetén } X'_b = \pm \infty.$$

Az S_{ije} mátrixelemekre adott előírásokat kielégítő $X'_a(\Phi)$, $X'_b(\Phi)$ reaktanciák jellegzetes menetét a $-120^\circ \leq \Phi \leq 0^\circ$ intervallumban a 23. ábrán tüntettük fel.



23. ábra. Az X'_a és X'_b normált kapcsolási paraméterek jellegzetes változása Φ függvényében, rögzített S_{ije} szórási mátrixelemek esetén

A távvezeték szakaszokkal bővített szimmetrikus π -tag grafikus mátrixanalízisének menete a fentivel analog módon történik, és hasonló eredményekre vezet.

Az előbbieken alapján a grafikus mátrixanalízis módszereivel számos feladat egyszerűen és gyorsan megoldható. Ugyanakkor a karakterisztikus vektorábrák olyan fizikai szemlélettel párosulnak, amely a szerkezetek numerikus mátrixanalízisének jelentős egyszerűsítéseket tesz lehetővé. A szerkezetek karakterisztikus vektorábráival való operálás különösen előnyös azokban az esetekben, amikor a numerikus mátrixanalízis módszereinek alkalmazásával a feladatok megoldásához ellentmondásos egyenletrendszerek megoldása vezet. Ezekben az esetekben az ellentmondásra vezető egyenletek az egyenletrendszerekből a karakterisztikus vektorábra alkalmazásával könnyen szelektálhatók. Egy következő dolgozatban ennek lehetőségeit fogjuk bemutatni.

I R O D A L O M

[1] Montgomery, C. G. - Dicke, L. H. - Purcell, E. M.: Principles of Microwave Circuits, M. I. T. Rad. Lab. Series, 8. kötet, McGraw Hill Book Co. Inc. 1948. pp. 401 - 419.
 [2] Altman, J. L.: Microwave Circuits, D. Van Nostrand Co. Inc. 1964. pp. 83 - 88.
 [3] Dr. Jachimovits L.: Elosztott paraméterű passzív áramkörök. Tankönyvkiadó, 1969. (Szakmérnöki jegyzet, J5 - 869) 36 - 41. old.