

DR. GORDOS GÉZA

Posta Kísérleti Intézet
BME Híradástechnikai Elektronika Intézet

SALLAI GYULA

BME Híradástechnikai Elektronika Intézet

Hírányagok természetes és összetett jeleinek statisztikai tulajdonságai

A jelen közleményben foglaltak kidolgozására két tényező irányította a figyelmet:

- egyrészt a sokcsatornás vivőfrekvenciás berendezések igénybevételében beállott változás;
- másrészt a véletlen változó jelekkel való modellezés és a hozzájuk tartozó mérési és számítási elvek egyre növekvő szerepe.

1. Bevezetés és főbb eredmények

A sokcsatornás vivőfrekvenciás (továbbiakban: vivős) berendezéseket beszédátvitel céljaira dolgozták ki, és méretezési alapelveik célja a beszéd kielégítő minőségű átvitelének biztosítása. Bár már az első időkben is alkalmazták a vivős berendezések egyes csatornáit nem beszéd típusú információ (távíró, képtávíró) átvitelére, a beszédet átvivő csatornák számának döntő túlsúlya miatt ez a tény sem a berendezések üzemére (azaz legfőképpen az átvitt információk minőségére), sem a berendezések méretezésére nem volt kihatással. Az utóbbi időben azonban — elsősorban az adattechnika fejlődése miatt — rohamosan nő az igény a nem beszéd típusú csatornák (az ún. szekunder terhelés) iránt. A tapasztalat azt mutatja, hogy a nem beszéd típusú (adat, zene, távíró stb.) hírányagok másféle terhelést jelentenek a vivős berendezésen, mint a beszéd. Nagy számban vagy nagyteljesítménnyel való megjelenésük lerontja a beszédátvitelre tervezett berendezések mind beszédátviteli, mind a nem beszéd típusú hírányagokra vonatkozó teljesítőképességét. A felmerülő döntő kérdés az, hogy a beszédátvitelre tervezett berendezéseken a nem beszéd típusú hírányagok milyen kombinációja, továbbá az egyes hírányagokra milyen szint engedhető meg a teljesítőképesség leromlása nélkül.

A kérdés megválaszolásához nem elég a hagyományos — az egyes hírányagok teljesítményére, spektrumára vonatkozó — vizsgálatok elvégzése. Szükség van a hírányagok — és a belőlük összeálló

eredő sokcsatornás jel — részletesebb ismeretére: nevezetesen tudni kell a legkülönbözőbb amplitúdók előfordulási és túllépési valószínűségét. Ez azt jelenti szabatos fogalmazásban, hogy ismerni kell az összetevő hírányagokhoz, és ezek legkülönbözőbb kombinációihoz tartozó jelek ún. amplitúdóeloszlását.

Ahhoz, hogy egy bizonyos terhelési kombináció megengedhetőségét eldöntsük, még egy olyan megbízható matematikai módszerre is szükség van, amellyel e kombináció amplitúdóeloszlását összehasonlíthatjuk egy másik, ismert hatású amplitúdóeloszlással.

Jelen dolgozatunk célja a fent vázolt kérdés megválaszolásához eddig kidolgozott elvi és gyakorlati apparátus ismertetése. Ez az apparátus három részre tagolható:

1. A távközlésben leggyakrabban előforduló hírányagokhoz tartozó jelek amplitúdóeloszlásának összeállítása, továbbá az ezen amplitúdóeloszlásokhoz tartozó karakterisztikus függvények meghatározása (ez utóbbira akkor van szükség, ha különböző hírányagokból összetett jel amplitúdóeloszlását kívánjuk meghatározni). Az apparátus ezen részét a dolgozat 2. pontja tartalmazza.

2. Gyors számítógépes módszer ismert amplitúdóeloszlású jelekből összetett jel amplitúdóeloszlásának meghatározására. Dolgozatunk 3. része bemutatja, hogy e feladatra az összetevő amplitúdóeloszlások konvolúcióját a karakterisztikus függvények szorzatával és gyors Fourier-transzformációval kiértékelő módszernek döntő előnyei vannak a közvetlen integráláson, valamint a Monte-Carlo eleven alapuló mód-szerek felett.

3. Gyors számítógépes módszer két amplitúdóeloszlás összehasonlítására és hasonlóságuk, ill. eltérésük számszerű kifejezésére (a dolgozat 4. része).

Megjegyezzük, hogy a felsorolt eljárások még nem fedik le teljesen azt az apparátust, amellyel a sokcsatornás berendezéseken még éppen megengedhető nem beszéd típusú hírányagok számát és szintjét meg

lehet határozni. Hiányzik ugyanis a frekvenciaáttevés (AM-SSB/SC moduláció) amplitúdóeloszlásra gyakorolt hatásának matematikailag pontos leírása. Amint azonban a dolgozat 5. részében kimutatjuk, műszakilag jól megalapozott elhanyagolásokkal a már most rendelkezésre álló apparátus is alkalmas igen jó becslések megtételére, amelyek közül néhányat be is mutatunk.

A függelékek az elméleti kérdéseket és levezetéseket tartalmazzák.

A cikk elején említettük, hogy a fenti kérdések kidolgozását a sokcsatornás vivőfrekvenciás berendezések igénybevételében beállott változáson túlmenően a véletlen jelekkel való modellezés és az ehhez tartozó mérési és számítási elvek egyre növekvő szerepe is indokolja. Most ezt fejtjük ki kissé részletesebben.

A híradástechnika fejlődését végigkíséri az átvinni kívánt jelek minél tökéletesebb modellezésére és az éppen elfogadott modellekhez tartozó mérési és számítási módszerek kifejlesztésére irányuló törekvés. Az „őskorszak” az egyenáram, az egyenfeszültségű „telepek” és mérőműszerek korszaka volt. Óriási lépést jelentett előre a „harmonikus” korszak, amelyben a vizsgálójel szinuszos, és kifejlődnek a szinuszos generátorok és a szinuszra helyesen mutató csúcsetektáló mérőműszerek (pl. csővoltmérők). A korszak matematikai hátterét a Fourier-módszerek képezik. Új híryanagok és a régebben is ismert híryanagok addig tekintetbe nem vett átmeneti jelenségeinek kezelése válik lehetővé a következő, „impulzus” korszakban. A tipikus vizsgálójel az egységugrás és az impulzus, az adóműszereket impulzusgenerátorok, a vevőműszereket oszcilloszkópok képviselik. A korszak matematikai bázisa a Laplace-transzformáció. A legutóbbi időkben köszöntött be a „sztochasztikus”, véletlen-változó korszak, amely döntően abban lép túl az összes korábbin, hogy tekintetbe veszi az összes híryanag alapvetően véletlenszerű jellegét. (Szinte közhely már az a megállapítás, hogy híradástechnikára éppen — és csak — azért van szükség, mert a közvetítendő híryanagok előre ismeretlenek, véletlenszerűek.) E korszak alapvető vizsgálójeljei: a folytonos értékészletű Gauss (normális) — folyamat és a véletlen bináris folyamat. Az adóműszereket az elterjedt zajgenerátorok képviselik. A praktikus, nem túl bonyolult, de lényeges információkat szolgáltató vevőműszerek kifejlesztése és részben kitalálása még többnyire a jövő feladata. Úgy tűnik, hogy a sztochasztikus korszak vevőműszerének legfontosabb funkciói az igazi négyzetes karakterisztikával és jól definiált ablakkal végrehajtott teljesítménymérés [1], azon valószínűség mérése, amellyel a jel pillanatnyi amplitúdója egy bizonyos küszöböt túllép, továbbá egy több célú, statisztikai műveletekre nyomógombbal programozható analízator (célszámítógép). A korszak számítási apparátusa a sztochasztikus folyamatok elmélete. Meg kell jegyezni, hogy a korszakok egymást nem váltották ki. Egy újabb szemlélet beköszöntése nem tette feleslegessé a korábbiakat, ellenkezőleg, minden feladathoz a négy szemlélet közül a legalkalmasabbat kell kiválasztani. Az egyes korszakok beköszöntésével azonban a híryanagok és hírközlés újabb és újabb oldalait lehetett sikeresen vizsgálni.

Mint a fentiekből is kitűnik a „sztochasztikus” korszak műszerei és a matematikai apparátus műszaki alkalmazásai területén még meglehetősen sok feladatot kell megoldani ahhoz, hogy a szemléletmód előnyei kihasználhatók legyenek. Az alábbiakban röviden megpróbáljuk beleilleszteni ebbe az általánosabb feladatba a cikkben foglaltakat.

A 2. részben a távközlésben gyakran előforduló híryanagok amplitúdóeloszlásait a hozzájuk tartozó karakterisztikus függvényekkel együtt adjuk meg. Ezzel lehetővé válik minden olyan probléma matematikai kezelése, ahol két vagy több jel összege (különbsége) is a vizsgálat tárgyát képezi.

A 3. rész gyors számítógépes módszert ismertet akárhány jelből összetett eredő jel amplitúdóeloszlásának meghatározására.

A 4. rész elvi és számítógépes eljárást javasol eloszlások összehasonlítására. Ezen apparátus számtalan alkalmazási lehetősége közül itt csak egyet emelünk ki. A „sztochasztikus” korszakban kitüntetett szerepe van a normális eloszlású jelnek (másnéven Gauss-folyamatnak), csakúgy mint a szinuszos szemléletmódban a szinuszos jelnek. Ez a kitüntetett szerep döntően két tényre vezethető vissza. Először: a normális eloszlás invariáns a lineáris rendszeren történő átvitelrel szemben, azaz Gauss-eloszlású jel bármilyen lineáris rendszeren (erősítőn, szűrőn, jól működő hírközlő csatornán) áthaladva Gauss-eloszlású marad. Másodszor: a központi határeloszlástétel értelmében — durván fogalmazva — bármilyen eloszlású jelek összegeként képzett eredő jel eloszlása, az összetevő jelek számának növekedésével egyre jobban közelít a Gauss-eloszláshoz. Ez a tétel magyarázza egyébként a Gauss-eloszlású természetes zajforrások nagy számát. Szerencsére a matematikai apparátus is jól illeszkedik a Gauss-eloszlás műszakilag kitüntetett voltához, amennyiben a Gauss-eloszlásra vonatkozólag igen sok jól felhasználható tétel és táblázat áll rendelkezésre. Mindezek alapján kijelenthetjük: a műszaki életben igen fontos annak a megítélése, hogy egy adott eloszlás milyen közel áll a normálishoz, mennyire helyettesíthető a normálissal. Egy hasonlattal élve: a szinuszos szemléletmódnak is döntő kérdése egy szinusz-szerű jel torzításának, felharmonikusainak számszerű kifejezése. A dolgozat 4. részében ismertett módszer és számítógépes eljárás célja éppen ez: műszaki szempontból összevetni különböző eloszlásokat.

2. A távközlésben előforduló eloszlások és azok karakterisztikus függvénye

Jelen szakasz első célja a távközlésben (elsősorban az idő- és frekvencia-multiplex berendezések technikájában) leggyakrabban előforduló híryanagokhoz tartozó jelek amplitúdó-sűrűségfüggvényeinek irodalmi adatok alapján való összeállítása. Második célunk megadni (s ahol szükséges volt levezetni) az összeállításban szereplő eloszlásokhoz tartozó karakterisztikus függvényeket, amelyekre a véletlen jelekkel való számolás során sűrűn van szükség. A sűrűség- és karakterisztikus függvényeket az 1. táblázat mutatja.

Mielőtt az egyes híryanagokat sorra vennénk, te-
kintsünk át néhány feltételt és definíciót.

Az alábbiakban feltételezzük, hogy minden jel
legalábbis szakaszonként stacionárius, ergodik,
sztochasztikus folyamattal írható le. A jel pillanat-
nyi amplitúdója ily módon valószínűségi változó,
(rövidítve: v. sz. v.). A v. sz. v. jelzésére ξ , a v. sz. v.
egy konkrét megvalósulásának jelzésére x szolgál
(1. ábra).

A jel pillanatnyi amplitúdóját statisztikailag leíró
adatok összességét amplitúdóeloszlásnak nevezzük.

Az amplitúdóeloszlás teljes jellemzésére az elosz-
lásfüggvény ($F(x)$) vagy — a műszaki gyakorlatban
teljesülő feltételek esetén — a sűrűségfüggvény $f(x)$
szolgál. Ezek definíciói:

$$F(x) = P(\xi \leq x), \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (2)$$

ahol P a valószínűség jele.

Bizonyos számításokban (lásd pl. 3. fejezet) szük-
ség van az eloszláshoz tartozó ún. karakterisztikus
függvényre, amely a sűrűségfüggvény Fourier-transz-
formáltja.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jxt} dt. \quad (3)$$

A gyakorlatban előforduló eloszlások többsége az
 $x=0$ helyre szimmetrikus: $f(x) = f(-x)$. Ilyen eset-
ben jól használható az abszolút érték túllépési való-

színűségfüggvény (röviden túllépési v. sz. függvény)

$$\Phi(|x|) = P(\xi < -|x|) + P(\xi > +|x|) =$$

$$= \begin{cases} 1 - [F(x) - F(-x)] & \text{ha } F(x) \text{ folytonos,} \\ 2[1 - F(x)] & \text{ha } F(x) \text{ szimmetrikus} \end{cases} \quad (4)$$

$\Phi(|x|)$ egy adott x mellett annak valószínűségét adja,
hogy a valószínűségi változó kilép a $(-x, x)$ tarto-
mányból (sávból). Az (1), (2) és (4) összefüggéssel de-
finiált függvényeket az 1. ábra szemlélteti.

Az amplitúdóeloszlás részleges jellemzésére mi az
alábbi mennyiségeket fogjuk használni:

— a várható érték $m = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, amely fizikai-

lag a jel egyenkomponense,

— a másodrendű momentum $\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$, amely

fizikailag a jel ellenállásegységre vonatkoztatott át-
lagteljesítménye (ahol az átlagteljesítmény a jel tel-
jes energiájának és teljes időtartamának hányadosa),
s így a szokásosan értelmezett effektív értékkel az,
alábbi kapcsolatban van:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{x}^2}, \quad (5)$$

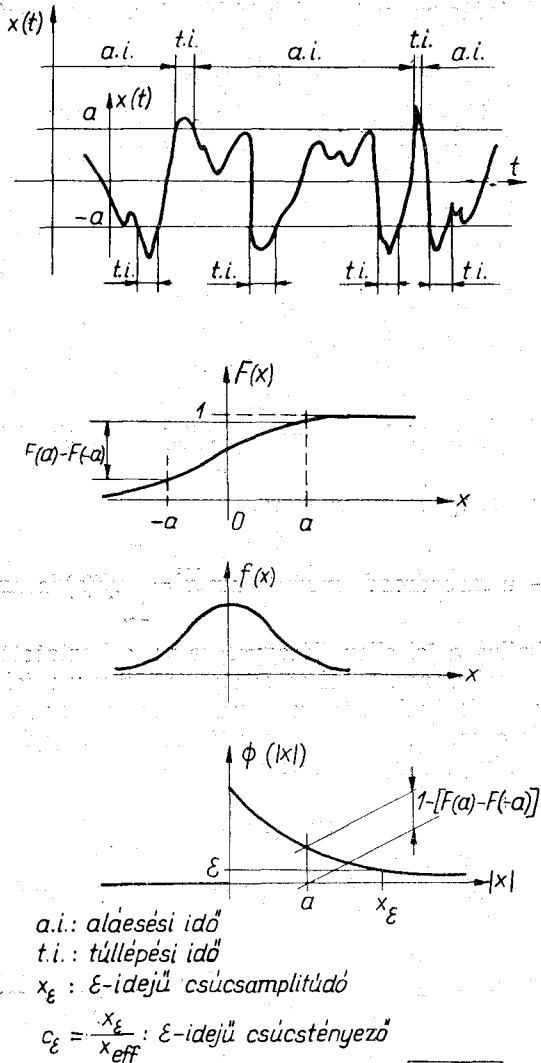
— a szórás $D = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$; amely zérus egyenkom-
ponensű jel esetén az effektív értékkel egyenlő.

— a jel ε valószínűségű csúcsamplitúdója, x_ε ,
($x_\varepsilon \geq 0$), amely fizikailag azon $(-x_\varepsilon, +x_\varepsilon)$ amplitúdó-

1. táblázat

Híryanagok jeleinek amplitúdó-sűrűségfüggvénye, karakterisztikus függvénye és jellegzetes paraméterei

Eloszlások (híryanagok)	Sűrűség fv.	Karakterisztikus fv.	D: eff. érték A: absz. csúcs- érték
1. Normális (Gauss-zaj)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	$D = \sigma$
2. Gamma, $l > 0$ (beszéd)	$\frac{1}{2\beta\Gamma(l)} \left \frac{x}{\beta}\right ^{l-1} e^{-\left \frac{x}{\beta}\right }$	$\frac{\cos[l \cdot \arctg(\beta t)]}{[1 + (\beta t)^2]^l}$	$D = \beta\sqrt{l(l+1)}$ $l > 0$
3. Exponenciális (Gamma $l=1$) (zene)	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x }$	$\left[1 + \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2\right]^{-1}$	$D = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} = \sqrt{2} \cdot \beta$
4. Egyenletes (kép)	$\frac{1}{2A}$ ha $ x \leq A$ 0 ha $ x > A$	$\text{sl}(A \cdot t)$	$A = \sqrt{3} \cdot D$
5. Harmonikus (pl. jelzés)	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}$ ha $ x \leq A$ 0 ha $ x > A$	$J_0(A \cdot t)$	$A = \sqrt{2} D$
6. Bináris (poláris adat)	$\frac{1}{2} \delta(x+A) + \frac{1}{2} \delta(x-A)$	$\cos(A \cdot t)$	$A = D$
7. Dirac (szünet)	$\delta(x)$	1	



H174-GS1

1. ábra. Véletlen jelek statisztikai jellemzői

sávot jelöli ki, amelyből a jel ϵ valószínűséggel lép ki, s amelynek definícióját az alábbi implicit egyenlet adja:

$$\epsilon = \Phi(|x_\epsilon|) \tag{6}$$

(megjegyezzük, hogy x_ϵ -t ϵ -idejű csúcsamplitúdónak is nevezhetjük, mivel a $(-x_\epsilon, +x_\epsilon)$ sávból a jel az idő ϵ hányadában lép ki),

— a jel ϵ valószínűségű (idejű) csúcstényezője, amely a fent definiált fogalmakkal

$$c_\epsilon = \frac{x_\epsilon}{x_{eff}} \tag{7}$$

alakban fejezhető ki,

— a jel abszolút csúcsamplitúdója A , amelyre fennáll:

$$A = \max \{|x(t)|\}, \tag{8}$$

— a jel abszolút csúcstényezője: $c_p = \frac{A}{x_{eff}}$.

Megjegyezzük, hogy a jobb összehasonlíthatóság érdekében sokszor célszerű az effektív értékre normált pillanatnyi amplitúdók függvényében ábrázolni és megadni az eloszlásokat jellemző függvényeket.

Az 1. táblázatban megadtuk — amennyiben értelmezhető — a csúcsamplitúdó és az effektív érték viszonyát, s az egyéb paraméterekkel való kapcsolatot. Mindegyik híranyag eloszlása szimmetrikusnak, zérus egyenkomponensűnek tekintett. Az esetleges egyenkomponens (m) a sűrűségfüggvénynél a független változó transzformációjával, a karakterisztikus függvénynél $\varphi(t)$ -nek e_{jmt} -vel való szorzásával vehető figyelembe (utóbbi a Fourier-transzformáció tulajdonságaiból következik).

Fenti definíciók áttekintése után rátérünk a távközlésben sűrűn előforduló híranyagokkal, valamint a sztochasztikus mérőjelekkel kapcsolatos eloszlások tárgyalására.

2.1 Gauss-zaj

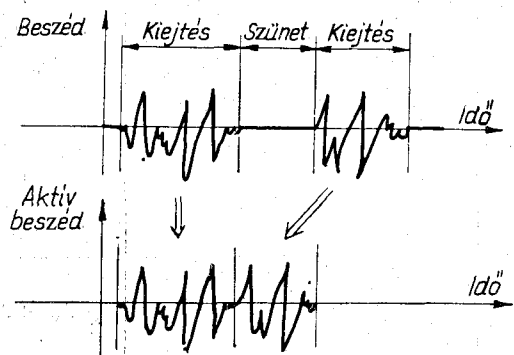
A Gauss-zaj, azaz a normális folyamat a híradástechnikában nagy jelentőségű, mert a legtöbb zaj — a központi határeloszlástétel következményeként — vagy ilyen, vagy ezzel igen jól közelíthető, továbbá mint a bevezetőben láttuk, a legszelesebb körben használt sztochasztikus mérőjel.

A normális folyamat igen fontos jellemzője, hogy a zajból vett minták lineáris korrelátlansága a minták teljes függetlenségét jelenti.

A normális folyamat olyan stacionárius sztochasztikus folyamat, amelynek n -ed rendű eloszlásfüggvénye az ún. n dimenziós normális eloszlás. Az elsőrendű eloszlásfüggvényt és ennek közismerten hasonló alakú Fourier-transzformáltját, azaz karakterisztikus függvényét az 1. táblázat első sora tartalmazza, a normális eloszlásnál szokásos szórását (σ -t) paraméterként választva [5.]

2.2 A beszéd

A beszéd egy Richardstól [2] származó modell szerint „kijtésekre” és „szünetekre” tagolható (a kijtések és szünetek pontos definíciójával itt nem foglalkozunk). Amennyiben egy beszélő kijtéseit időfolytonosan egymás mellé rendezve képzeljük a 2. ábra szerint, az így nyert ún. „aktív beszéd” igen jól



H174-GS2

2. ábra. A beszéd modellje

jellemezhető egy stacionárius sztochasztikus folyamattal. E folyamat amplitúdó eloszlását először Holdbrook és Dixon [3] vizsgálta. Később kitűnt, hogy az eloszlás nem teljesen szimmetrikus [4], de az aszimmetria viszonylag kismértékű, így a Richards által közölt, szimmetriát feltételező ún. Gamma-eloszlás ma is jól felhasználható. Az eloszlást leíró függvényt az 1. táblázat tartalmazza. A vizsgálatok kimutatták, hogy az elektromos jel amplitúdóeloszlása lényegesen mértékben függ az alkalmazott mikrofontól. Ezt a függést írja le matematikailag az l paraméter, szénmikrofon esetén $l=0,2$, jó minőségű mikrofonra $l=0,5$ adja a legjobb leírást.

Érdeemes kiemelni a beszéddel kapcsolatban azt, hogy a nagy amplitúdók sokkal gyakoribbak benne, mint a Gauss-eloszlású jelben. Az effektív érték négyszeresét a jel pl. az előbbiben kb. 1%-os, míg utóbbiban mindössze kb. 0,02%-os valószínűséggel lépi túl. Ezt az átvivő berendezések kivezérlési tartományának méretezésekor feltétlenül figyelembe kell venni.

A Gamma-eloszláshoz tartozó karakterisztikus függvényt szintén az 1. táblázat, míg annak levezetését az 1. Függelék tartalmazza. A Gamma-eloszlás β paramétere és effektív értéke közötti összefüggést szintén az 1. táblázatban találjuk.

2.3 A zene

A zene stacionárius sztochasztikus modelljében a szünetektől eltekinthetünk, s a folyamat amplitúdóeloszlását exponenciális eloszlással közelíthetjük a legjobban.

Az exponenciális eloszlás a Gamma-eloszlás speciális esete ($l=1$ helyettesítéssel). Mint várható, a zene jel esetén is a nagy amplitúdók nagyobb valószínűsége mint a Gauss-eloszlású jelben.

2.4 A (fekete-fehér) kép

A tapasztalat azt mutatja, hogy a képtávíró jelében, valamint a szinkronjeleket nem tartalmazó TV-video jelben a fehér és fekete közötti minden árnyalat azonos valószínűséggel fordul elő. Tehát a képinformációt hordozó jelek egyenletes eloszlással írhatók le, amely megegyezik a mérőjelként használható lineáris felfutású fűrészel eloszlásával. A képjel pillanatértékei tehát — ellentétben az előzőekkel — egy meghatározott szinttartományon kívül nulla valószínűségűek. Az egyenletes eloszlás karakterisztikus függvényét — az 1. táblázat definíciója alapján — a $\sin x/x$ alakú függvénnyel írhatjuk le. Megjegyezzük, hogy a szinkronjelek a sűrűségfüggvényben Dirac-delta függvényekkel vehetők figyelembe.

2.5 Harmonikus jel

A távközlésben használatos különböző vonali jelzések, a vonalas rajzok továbbítására alkalmas fakszimile, valamint a frekvenciamodulált távíró jelei különböző frekvenciájú szinuszos jelekből és szünetekből állnak. Az alapelemet képező harmonikus jel eloszlása nem függ a jel frekvenciájától, fázisától, így különböző szinuszos vivőjú modulált jelek egysze-

rűen leírhatók a jel A amplitúdójának megadásával. A harmonikus jel sűrűségfüggvényének meghatározását pl. [6]-ban találjuk, míg karakterisztikus függvényét, amely nulladrendű Bessel-függvény a 2. függelékben vezetjük le.

2.6 Véletlen bináris jel

A véletlen bináris jel jelentőségét az adja, hogy egyrészt mint sztochasztikus vizsgálójel használható fel (lásd pl. [7]), másrészt mint kétállapotú poláris adatjel fordul elő a távközlésben. A véletlen jelről feltételezzük, hogy amplitúdója minden elemi (óra-) időtartamban, a korábbi állapottól függetlenül, $\frac{1}{2}$ -es valószínűséggel A , illetve $-A$. A sűrűségfüggvényt képező két Dirac-delta függvény következményeként — ellentétben az előző véletlen jelek lecsengő karakterisztikus függvényével — periodikus karakterisztikus függvényt kapunk (lásd az 1. táblázatot).

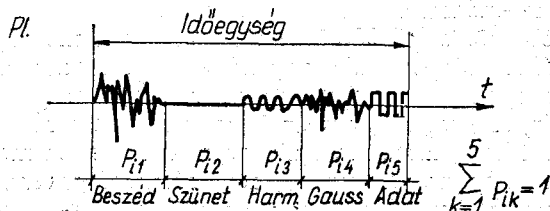
2.7 Szünet

A beszéd, fakszimile stb. jeleinek modellezése az aktív jelrészek mellett szünetek figyelembevételét is szükségessé teszi. Az azonosan nulla jel sűrűségfüggvénye egységnyi területű Dirac-függvény, karakterisztikus függvénye pedig t -től függetlenül konstans. A gyakorlati esetekben a vizsgált jel aktivitásától függ az alkalmazott szünetjel Dirac-függvényének nagysága. Például 25% aktivitású beszéd esetén a sztochasztikus modell 0,25 valószínűséggel aktív beszédet leíró Gamma-eloszlásból és 0,75 valószínűséggel szünetből komponált.

3. Összetett jel eloszlásának számítása

Jelen fejezet célja gyors számítógépes módszert ismertetni komponált jelek összegeként előálló összetett jel amplitúdó-sűrűségfüggvényének meghatározására. Komponált jelen itt olyan jelet értünk, amelyet különböző statisztikai tulajdonságú, egymást időben át nem fedő alap- (elemi-) jelek alkotnak. (Komponált jelre mutat példát a 3. ábra.) A komponált jeleket egymástól függetlennek fogjuk tekinteni, ami a gyakorlati eseteket tekintve nem jelent megszorítást.

A fenti modell felhasználható frekvenciamultiplex sokcsatornás berendezéseknél, ha az egyes hírányagokat (pl. beszéd, csengetés stb.) alapjelnek, az egyes csatornák jelét komponált jelnek, s — ha a frekvenciaáttevés amplitúdóeloszlásra gyakorolt hatásától eltekintünk — a csatornanyaláb együttes jelét a fent



[H174-GS3]

3. ábra, Példa a komponált jelre

definiált összetett jelnek tekintjük. Így a bemutatott módszer jól alkalmazható pl. az együttes jelet átvivő egységek csúcsterhelésre méretezésénél.

A feladat megoldása során először a komponált jelek sűrűségfüggvényeit kell meghatározni. Ezzel a kérdéssel a 3.2 részben foglalkozunk. Logikailag ezután következik a tulajdonképpeni számítástechnikai nehézség: a komponált jelek sűrűségfüggvényeinek ismeretében az összegjel sűrűségfüggvényének meghatározása.

3.1 Eloszlások konvolúciójának számítógépes meghatározási módszerei

Ismeretes, hogy ha az egyes összegezendő véletlen jelek eloszlásának $f_i(x)$ sűrűségfüggvénye ismert, akkor az összegjel $f(x)$ eredő sűrűségfüggvényét — feltevézve az egyes összetevő jelek függetlenségét — az $f_i(x)$ sűrűségfüggvények konvolúciójaként kapjuk; n jel esetén

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) * \dots * f_n(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x). \quad (9)$$

Ha az i -edik és j -edik összegezendő jel sűrűségfüggvénye megegyezik, akkor $f_i(x) = f_j(x)$.

A (9) szerinti művelet sor számítógépes elvégzésére három egymástól merőben különböző módszer kínálkozik: 1. A konvolúcióintegrálok direkt elvégzése, például Romberg-eljárással. 2. A valószínűségi jelenség szimulációja Monte-Carlo elven. 3. A konvolúcióintegrál elvégzése a karakterisztikus függvények útján, Fourier-transzformáció közbeiktatásával.

A Vezetékes Híradástechnika Tanszék meglévő programkönyvtára, illetve e feladat számára készült programok segítségével lehetőség nyílt a három módszer összevetésére.

1. *Közvetlen eljárás.* A konvolúció közvetlen számítása során tkp. szorzat paraméteres integrálását kell elvégeznünk:

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\sigma) f_2(x - \sigma) d\sigma.$$

Ennek egy standard számítógépes módszere a Romberg-eljárás alapuló integrálás.

A módszer rendkívüli hátránya, hogy egy lépésben csak 2 függvény (2 jel) konvolválható, az adatok megadása rendezést igényel. A módszer időigényességét mutatja, hogy két, egyenként N pontban megadott függvény konvolúciójának meghatározására az összeadásoktól eltekintve kb. N^2 szorzás szükséges, ami nagy N esetén lényegesen több műveletet jelent, mint a 3. alpontban ismertetendő Fourier-módszer.

Többszörös (pl. 900 jel = 900 csatorna) konvolúció esetén reménytelenül nagy műveletszám adódik, s ha meggondoljuk, hogy azonos típusú jelek megegyező $f(x)$ sűrűségfüggvényeinek konvolúciója sem egyszerűsíthető, kimondhatjuk, hogy a közvetlen módszert nagy pontszámmal adott sűrűségfüggvények többszörös konvolúciójának számítására nem célszerű használnunk.

2. *Monte-Carlo-módszer.* Ismeretes, hogy adott $f_1(x)$ és $f_2(x)$ sűrűségfüggvényű ξ_1, ξ_2 véletlen szá-

mokat generálva, a véletlen számok $\xi_1 + \xi_2$ összegének sűrűségfüggvénye — nagyszámú kísérlet elvégzése esetén — $f_1(x)$ és $f_2(x)$ konvolúcióját adja. A hangsúly itt a kísérletek nagy számán és a megfelelő eloszlású véletlen számok generálásán van. A véletlen számok összegezése jól egyezik a fizikai képpel.

Az országban hozzáférhető program [9] egy lépésben maximálisan 6 sűrűségfüggvény konvolúciójára alkalmas. Az adott feladatunkban való alkalmazása során a futtatási tapasztalatok alapján problémát jelent az $f_1(x)$ sűrűségfüggvények megadása, a konvolvált eredmény-függvény értékes tartományának relatív leszűkülése, az elméletileg szimmetrikusnak várt sűrűségfüggvények a módszer statisztikus jellegével magyarázható aszimmetriája, a sűrűségfüggvény számunkra fontos kis ordinátájú szakaszának — szintén a módszer lényegéből következő — fokozott pontatlansága. Mindezek mellett a módszer elegendő pontossághoz nagyszámú kísérletet (10⁵... 10⁶), így nagy gépi időt is igényel. Hatnál többszöri konvolúció kiszámítására pedig a program többszöri alkalmazására — esetleg önbehívására — lenne szükség, ami nagyszámú feladat megoldását rendkívül bonyolulttá teheti.

3. *Fourier-módszer.* Ismeretes, hogy egy valószínűség iváltozó karakterisztikus függvényén e valószínűségi változó sűrűségfüggvényének Fourier-transzformáltját értjük:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jxt} dx, \quad (10)$$

ahol $t = 2\pi f$ és a dimenziókra ([]) nézve fennáll:

$$[t] = \frac{\text{radián}}{[x]}.$$

Számunkra lényeges az a tény, hogy független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvényét az egyes valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek szorzataként kapjuk, ugyanis (9)-et Fourier-transzformálva:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_n(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(t), \quad (10a)$$

ahol
$$\varphi_i(t) = \mathcal{F}\{f_i(x)\}. \quad (10b)$$

Tehát, ha rendelkezésünkre áll egy gyors Fourier-transzformációt végző program, akkor a különböző típusú sűrűségfüggvények karakterisztikus függvényét kiszámolva, szorzatképzés után inverz transzformációval nyerjük az eredő sűrűségfüggvényt:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\varphi(t)\}. \quad (11)$$

A gyakorlatban számos analitikusan megadható sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye ismert (lásd 2. fejezet), közvetlenül programozható, és ami nagyon lényeges az előző módszerekkel szemben: azonos típusú sűrűségfüggvények karakterisztikus függvényét tulajdonképpen csak egyszer kell meghatározni. Előnyös továbbá, hogy semmiféle gyakorlati korlátozás nincs n -re, a konvolválendő függvények számára.

A Fourier-transzformáció igen gyors elvégzése valószínűsíthető meg az ún. FFT (Fast Fourier Transform) módszerrel. Ilyen program munkánk során kidolgozásra került R. C. SINGLETON eljárásainak alapulvételével [10].

Az FFT módszer hatásosságát bizonyíthatjuk azal, hogy a közvetlen eljárással azonos pontosságot biztosítva — e módszer legkevésbé hatékony esetében, csupán két, egyenként N pontban megadott függvény konvolúciójának meghatározására kb. $3N \lg(N)$ számú szorzásra van szükség a közvetlen eljárás N^2 műveletszámával szemben. Ez például $N = 2^{10} \cong 10^3$ adat esetén $3 \cdot 10^4$ műveletszámot jelent 10^6 -nal szemben, hangsúlyozva azt, hogy kettőnél több konvolválendő sűrűségfüggvény esetén az előző módszerek számítástechnikája bonyolódik, míg e módszer mind kedvezőbb feltételeket és pontosabb eredményt nyújt. Nagy csatornaszám esetén a két módszer műveletszámának viszonya kb. N .

Az FFT módszerrel való konvolúciószámítás a Monte-Carlo-módszerrel szemben lényegesen nagyobb pontosságot nyújt sokkal kevesebb gépi idő felhasználásával. Számszerű összehasonlítást Gauss-eloszlás négy, ill. hatszoros önkonvolúciójának mindkét módszerrel történő meghatározásával végeztünk. Az eredményeket a 2. táblázatban hasonlíthatjuk össze, ahol FFT-vel számolt értékek 10^{-9} -es nagyságrendig megegyeznek az elméleti — az eredményt közvetlenül számító program segítségével meghatározott — értékekkel, ezért az elméleti értékeket külön nem is tüntettük fel. A táblázati adatok számítását FFT módszerrel, 256 ponttal végezve 130 s, míg Monte-Carlo-módszerrel, 10^5 számú kísérletet véve kb. 20 perc futási idő adódott.

2. táblázat

Saját effektív értékére norm. abszoltszám	Az eredő sűrűségfüggvény értéke			
	Négyszeres önkonvolúció esetén		Hatszoros önkonvolúció esetén	
	FFT-KONV módszerrel	Monte-Carlo módszerrel	FFT-KONV módszerrel	Monte-Carlo módszerrel
0	0,19947114	0,19777333	0,1628675	0,16048889
0,78	0,058848507	0,05752	0,026098617	0,0272444
1,35	0,005388901	0,00522666	0,00072321	0,00078222
2,34	0,7774 · 10 ⁻⁶	0	1,1384 · 10 ⁻⁸	0*

* Már 2,03-tól állandó nulla értéket ad

Összefoglalva, határozottan kimondhatjuk, hogy nagyszámú eloszlás konvolúciójának számítógépes meghatározása leggazdaságosabban a karakterisztikus függvények elvén, az FFT eljárás felhasználásával végezhető.

3.2 FFT-n alapuló eljárás az összetett fel eloszlásának meghatározására

Összegjel eloszlásának meghatározására az előző pontban a karakterisztikus függvények segítségével való számítást találtuk a legmegfelelőbbnek. Ezen pontban e módszer választása mellett végigkövetjük

a komponált jelek összegeként adódó összetett jel sűrűségfüggvényének meghatározását, a bementi program-paraméterek meghatározásának lényeges szempontjait s a számítás menetét.

A számítás elve

A sokcsatornás berendezéseknél előálló helyzet könnyű figyelembevételére tételezzük fel, hogy összesen L féle híryanag fordul elő, s ezek sűrűségfüggvénye $f_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, L$). Ezen híryanagokból H darab komponált jelet (csatornajelet) állítunk össze. Gyakorlati eseteknek megfelelően feltételezzük, hogy a H darab komponált jel nem mind különbözik egymástól (statistikailag), hanem mindössze M ($M \leq H$) különböző típusú komponált jel van, s az i -edik típusú ($i=1, 2, \dots, M$) komponált jel h_i esetben (h_i csatornán) fordul elő. Nyilvánvalóan $\sum_{i=1}^M h_i = H$.

Az i -edik típusú komponált jelben (lásd 3. ábra) forduljon elő a k -adik híryanag p_{ik} valószínűséggel. Más szóval: az idő p_{ik} hányadában, azaz p_{ik} aktivitással van jelen a k -adik típusú híryanag. Ekkor az i -edik típusú komponált jel amplitúdó-sűrűségfüggvénye az alapjelek sűrűségfüggvényeinek lineáris kombinációja:

$$f_{(i)}(x) = p_{i1}f_1(x) + p_{i2}f_2(x) + \dots + p_{ik}f_k(x) + \dots \quad (12)$$

$$\dots + p_{iL}f_L(x) = \sum_{k=1}^L p_{ik}f_k(x)$$

Ha a k -adik típusú híryanag nem fordul elő, akkor természetesen $p_{ik} = 0$.

Az összetett jel sűrűségfüggvényének meghatározásához (10b) szerint szükség van a (12) szerinti komponált jel karakterisztikus függvényére. A Fourier-transzformáció linearitása miatt

$$\varphi_{(i)}(t) = \mathcal{F}\{f_{(i)}(x)\} = \sum_{k=1}^L p_{ik}\varphi_k(t). \quad (13)$$

Ha az egyes híryanagok $\varphi_k(t)$ karakterisztikus függvényei analitikus alakban rendelkezésre állnak (amint az a 2. fejezetben felsorolt híryanagok esetében teljesül), akkor a (13) összefüggés közvetlenül programozható (!), és nem kell a benne kijelölt Fourier-transzformációt numerikusan elvégezni.

Az M fajta, fajtánként h_i darab komponált jel összegeként adódó összetett jel eloszlásához tartozó karakterisztikus függvény (10a) szerint:

$$\varphi(t) = \prod_{i=1}^M [\varphi_{(i)}(t)]^{h_i} = \prod_{i=1}^M \left[\sum_{k=1}^L p_{ik}\varphi_k(t) \right]^{h_i}. \quad (14)$$

A $\varphi_k(t)$ -k és p_{ik} -k ismeretében ez az összefüggés is jól programozható. (Megjegyezzük: az eredő karakterisztikus függvény valós páros függvény lesz, ha az összetevő híryanagok jeleinek egyenkörponens nélküli, szimmetrikus sűrűségfüggvénye van.)

Az eredetileg célként megjelölt mennyiséget, az összetett jel sűrűségfüggvényét a (14) jobb oldalán levő mennyiség inverz Fourier-transzformációjával határozzuk meg. Az elkészült program ezt a lépést FFT eljárással hajtja végre (megjegyezzük, hogy a transz-

formáció során nullára szimmetrikus függvényt kapunk).

A számítás hibája. Mivel numerikus számítás csupán véges számú adatból kiindulva, véges számú művelettel végezhető el, a Fourier-transzformáció improprius integráljait véges szummákkal kell közelíteni, így ún. diszkrét Fourier-transzformációt (DFT) végzünk. Folytonos függvény esetén a Fourier-transzformáció akkor közelíthető megfelelően DFT-vel, ha mind a transzformálandó, mind a transzformált függvény elegendően gyorsan tart nullához (vagy az egyik bizonyos intervallumon kívül nulla). Ugyanis pl. a t tartományban a karakterisztikus függvényt valamely T -nél határolva, és $N+1$ számú diszkrét pontban megadva valós és képzetes részét (a nulladik és N -dik pontban a képzetes rész kötelezően zérus), az x tartományban $2 \cdot N$ pontban adott valós periodikus függvényt kapunk, amely a mintavételi tételnek megfelelően a lehatárolás figyelembevételével elméletileg várt

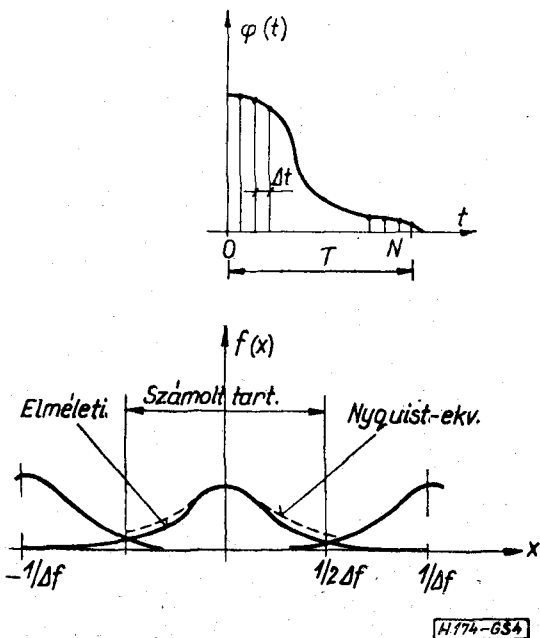
$f(x)$ sűrűségfüggvény helyett annak $\Delta f = \frac{\Delta t}{2\pi} = \frac{T}{2\pi N}$ szerinti Nyquist-ekvivalense (4. ábra). Ez

utóbbinak definíciója:

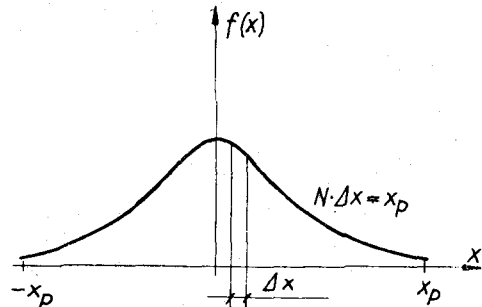
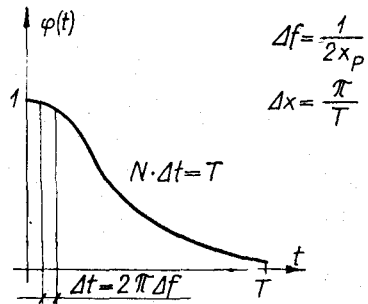
$$f_{\text{NyQ}}(x) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{k}{\Delta f}\right), & \text{ha } |x| \leq \frac{1}{2 \cdot \Delta f} \\ 0 \dots \text{különben.} \end{cases}$$

Így a t tartományban a lehatárolás, az x tartományban pedig az $1/\Delta f$ -fel eltolt $f(x)$ -ek okozta visszalapódások jelentenek hibát. Ahhoz, hogy az utóbbi hiba kicsi legyen az szükséges, hogy $f(x)$ elég gyorsan tartson nullához, ha $x > 1/2\Delta f$.

A számítási adatok konkrét megadása során a fentiek figyelembevétele rendkívül fontos a megfelelő pontosság elérésére.



4. ábra. A DFT (diszkrét Fourier-transzformáció) számítási hibái



H174-655

5. ábra. A karakterisztikus- és a sűrűségfüggvény számítási adatainak kapcsolata

A karakterisztikus függvény és a sűrűségfüggvény megfogása. A fentiek alapján pontosíthatjuk feladatunkat. A számítás során az eredő karakterisztikus függvényt úgy kell meghatározni, hogy: 1. a figyelembe vett tartományon kívül $\varphi(t)$ elhanyagolható legyen, 2. a Δf mintaköz elegendően kicsiny legyen, s így az x tartományban létrejövő visszalapódási hibától eltekinthetünk, 3. a számolt pontok száma $2^m + 1$ ($m = 3, 4, \dots$) legyen. (Ezen utóbbi megkötés az FFT algoritmus alkalmazásának feltétele)

A követelmények teljesítésére kvalitatíve ismerünk kell a $\varphi(t)$ és $f(x)$ függvényeket (pl. 5. ábra).

Az első feltétel olyan T felvételét követeli meg, ahol már $\varphi(t) \approx 0$. Ezen T értéket a (14) összefüggés becslésével határozhatjuk meg. Néhány jól felhasználható gondolat:

- Hatványozás hatására $\varphi(t)$ csak csökkenhet, ugyanis $|\varphi(t)| \leq 1$ minden t -re.
- Egy komponált jelben szereplő karakterisztikus függvények közül célszerű a „domináns”, a legkevésbé eltűnő tagot kiválasztani. Ez, ha van, akkor – általában a szünet – jelnek megfelelő konstans tag.
- Ha T ismert egységnyi effektív értékű jelre, akkor tetszőleges D effektív érték esetén:

$$T_D = \frac{T_{D=1}}{D}$$

A 2. feltétel Δf felvételére ad utasítást. Mivel Δf összefüggésben van a számolt x intervallum határával ($X_p = 1/2\Delta f$), így olyan nagy X_p -t kell választani, amelynél $f(x) \approx 0$, továbbá X_p elegendően nagy az eredő jel csúcstényezőjének pontos meghatározásához. X_p jól becsülhető az összetett jel effektív értékének (x_{eff}) ismeretében, hisz a gyakorlatban tapasztalható

jelek amplitúdói a saját effektív értéküknek kb. 4-szeresig fordulnak elő számottevő valószínűséggel, azaz pl. $X_p = 4x_{\text{eff}}$. Az x_{eff} viszont egyszerűen meghatározható az egyes elemi hiranyagok D_{ik} effektív értékei, és p_{ik} aktivitási tényezői segítségével:

$$x_{\text{eff}} = \left[\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^L p_{ik} \cdot D_{ik}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

amint az (14)-ből egyszerű számítással belátható.

Amennyiben X_p és T értékét a fentiek szerint felvettük, az összes többi adat már meghatározható. Lényeges N értékének ellenőrzése a 3. követelmény teljesítése szempontjából. Az 5. ábra szerinti összefüggések alapján ugyanis fenn kell állni az

$$N = \frac{X_p \cdot T}{\pi} \text{ egyenletnek.}$$

Amennyiben az így kapott N nem teljesíti az FFT algoritmus alkalmazhatóságának ($N = 2^m + 1$) feltételét, a kiszámolandó pontok számát ($2N > 2^m + 1 \cong \cong N$)-ben határozzuk meg, s az X_p és T módosításával a $\pi \cdot 2^m = X_p \cdot T$ egyenlőséget állítjuk be.

3.3 A számítógép-programról

A fenti számítást két, RAZDAN-ALGOL nyelven írt program, a KARAKT és az FFT egymás utáni alkalmazásával végezhetjük el.

A KARAKT összetett jel karakterisztikus függvényének (14) szerinti meghatározására alkalmas. Segítségével lehetőség nyílik az 1. táblázatban felsorolt hiranyagok karakterisztikus függvényeinek felhasználásával a (14) összefüggéssel definiált eredő karakterisztikus függvény tetszőleges számú pontban való meghatározására. Mint az 1. táblázatból kitűnik, az egyes karakterisztikus függvények effektív értékükkel (1.—3.), illetve csúcserékükkel (4.—6.) paraméterezhetők, a Gamma-eloszlás esetén pedig egy további paraméter is szerepel. Komponált eloszlást — az aktivitási tényezők megadásával — e két eloszlásból állíthatunk össze, egy-egy eloszlástípust akár többször is, különböző paraméterrel és aktivitási tényezővel szerepeltetve.

A (14) összefüggésnek megfelelően különböző típusú kompozíciókat (csatornákat) definiálhatunk, megadva az egyes kompozíciók számát az összetett jelben.

A program segítségével a kiszámolt eredő karakterisztikus függvény segédadatokkal ellátva lyukszalagra perforálható úgy, hogy közvetlenül a sűrűségfüggvényt meghatározó FFT program adatszalaiaként szerepeljen.

Az FFT program valós Fourier-, illetve inverz Fourier-transzformációt hajt végre az ún. gyors Fourier-transzformáció módszerével, kötött számú pontban megadott függvényeken. Egyaránt felhasználható Fourier-sor és Fourier-integrál meghatározására.

Az FFT program eredményeként a csatornanyaláb összetett jelének sűrűségfüggvényét kapjuk.

4. Statisztikus paraméterek meghatározása

Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy miként célszerű egy amplitúdóeloszlást műszakilag értékelni, illetve két, sűrűségfüggvénnyel adott

amplitúdóeloszlást műszaki szempontból összehasonlítani. Noha a javasolt módszer bármilyen eloszlás esetén alkalmazható, a kidolgozott számítógépprogram viszonyítási eloszlásnak mindig a normális eloszlást tekinti.

A viszonyítást célszerűen a vizsgált sűrűségfüggvény átlagértékével és szórásával azonos paraméterű normális sűrűségfüggvénnyel végezzük. E két paraméter a normális eloszlást már determinálja.

Feladatunk egyrészt tehát a sűrűségfüggvény műszakilag érdekes jellemzőinek meghatározása, másrészt a sűrűségfüggvény összehasonlítása a normális eloszlással. E feladatokat számítógépes módszerrel célszerű elvégezni, tekintettel az adatok nagy mennyiségére. A fentebb vázolt feladatok elvégzésére készült a STATISZTIKA nevű program.

A program kiszámolja a pontonként beolvasott „sűrűségfüggvény” 2. fejezetben definiált momentumait, nevezetesen a várható értéket (egyenkomponenst), a másodrendű momentumot (teljesítményt), a szórást (effektív érték) stb.

Ezen jellemzőket oly módon számolja a program, hogy a beadott „sűrűségfüggvény” alatti terület automatikusan egyre normálja. A várható érték számítására felhasznált összefüggés például:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i \cdot f(x_i)}{\sum_i f(x_i)}$$

E számítás jogosságának feltétele természetesen az, hogy a sűrűségfüggvényt egyenletes lépésközökben adjuk meg.

A program eredményeként nyerjük továbbá a program felhasználója által megkívánt e valószínűségű csúcstényezőket, valamint a nem szimmetrikus sűrűségfüggvényeknél is értelmezhető e valószínűségű csúcsmplitúdókat, a két kvartilist (25, ill. 75%-os valószínűségű túllépéshez tartozó csúcsmplitúdók), a mediánt (50%) stb.

Az eddig említett sűrűségfüggvény-jellemzők ismeretében is már messzemenő következtetéseket vonhatunk le a normális vagy egyéb eloszlással való hasonlatosságra, esetleg a számítási eljárás pontosságára vonatkozólag.

A 3. fejezetben szerepelt feladat esetén például az eredő eloszlás összteljesítménye könnyen meghatározható a (15) összefüggéssel, így lehetőségünk nyílik a kiindulási adatok, a figyelembe vett T és X_p tartományok értékének ellenőrzésére. A normális eloszlásra jellemző csúcstényezőket ismerve pedig lehetővé válik az adott eloszlással való kvalitatív összevetés.

A statisztikus kiértékelés második fő feladata az $f(x)$ sűrűségfüggvény kvantitatív összehasonlítása az ugyanolyan átlagértékű és szórású $g(x)$ normális sűrűségfüggvénnyel. A hasonlóság mérőszámát a számítástechnikai korlátok figyelembevételével, a műszaki feladat orientáltságának megfelelően különbözőképpen definiálhatjuk. A megfelelő mérőszám meghatározásának kérdését nem tartjuk lezártnak. A legkézenfekvőbb módszer, a χ^2 próba [11], amelynek fogalmai azonban feladatkörünkben nehezen értelmezhetők, s hasznossága körülbelül egy kvalitatív vizsgálattal ér fel.

Megfelelőnek látszik két — egyenletes lépés-közönként megadott — sűrűségfüggvény hasonlóságának megítélésére területeltérésük, illetve területfedésük nagysága. A területeltérés az ugyanazon koordináta-rendszerbe rajzolt két sűrűségfüggvény által csupán egyszer lefedett területösszeg:

$$S_D = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx \cong \sum_i \left| \frac{\sqrt{f(x_i)}}{\sum_i f(x_i)} - \frac{g(x_i)}{\sum_i g(x_i)} \right|$$

A területeltérésből a két sűrűségfüggvény közös, kétszer lefedett területét, a területfedést közvetlenül megkaphatjuk:

$$S_C = 1 - \frac{S_D}{2}$$

Amennyiben az egyik sűrűségfüggvény normális, akkor az S_C mennyiséget célszerű a másik sűrűségfüggvény normalitásának nevezni.

Belátható, hogy $0 \leq S_D < 2$, illetve $0 < S_C \leq 1$. A definiált hasonlósági mérőszámok alkalmasságát a következő fejezet példáiban mérhetjük le, ahol különböző sűrűségfüggvények normalitását vizsgáljuk meg.

5. Vívőfrekvenciás berendezések terhelési viszonyainak statisztikus vizsgálata

Egy vívőfrekvenciás sokcsatornás berendezés terhelési szituációján azon adatok összességét értjük, amelyek meghatározzák, hogy az egyes csatornákon milyen híryanagok milyen aktivitással és milyen szinttel fordulnak elő.

Jelen fejezet célja a 2., 3. és 4. fejezetekben ismertett apparátus alkalmazása az egyes terhelési szituációkhoz tartozó sokcsatornás együttes jel amplitúdóeloszlásának meghatározására és diszkutálására.

A különböző híryanagokat az 1. táblázat függvényei, s a belőlük a 3. ábra szerint komponált csatornájel sűrűségfüggvényét a (12) összefüggés helyesen írja le.

A valóságban a csatornajelek frekvenciaáttevés (AM-SSB/SC moduláció) után adódnak össze. Ha feltételezzük, hogy ez az operáció a jel amplitúdóeloszlását nem változtatja meg, akkor a sokcsatornás együttes jel karakterisztikus függvénye a (14) egyenlet szerinti. A 3.3 pontban ismertetet KARAKT és FFT programok segítségével tehát meghatározható a sokcsatornás együttes jel sűrűségfüggvénye. Mielőtt a számítás eredményét néhány konkrét terhelési szituációra ismertetnénk, vizsgáljuk meg az előbbi lényeges feltételezés teljesülésének esélyeit.

A frekvenciaáttevésnek az amplitúdóeloszlás szempontjából figyelmen kívül hagyását az alábbiak indokolják:

1. Holbrook és Dixon mérési eredményekre hivatkozik [3], amelyek szerint az AM-SSB/SC moduláció után a beszéd amplitúdóeloszlása nem változik.

2. Néhány, egyenkomponens nélküli jelre (pl. szinusz) ugyanez triviálisan belátható.

3. Amennyiben az AM-SSB/SC moduláció változtatja az amplitúdóeloszlást, ez csak az eloszlás zömökítésében, „gausszosításában” nyilvánulhat meg. Ez abból következik, hogy a modulációt pl. gyűrűsmodulátorral és sávszűréssel végezve, a modulátor szimmetrikus amplitúdóeloszláson nem változtat, a sávszűrés pedig — amennyiben változtat — csak „gausszosíthat” az eloszláson (lásd [6]). Mivel mi a csúcstényező, az igényelt kivezérlési tartomány szempontjából itéljük meg elsősorban az amplitúdóeloszlást, a zömökítés figyelmen kívül hagyása a vizsgálati feltételek szigorítását jelenti, és összhangban van a legkedvezőtlenebb esetre (ti. az eloszlás változatlanul maradására) történő méretezéssel.

Azok a feltételek tehát, amelyek fennállása esetén a későbbiek érvényesek, a következők:

- az egyes híryanagok jelei egyenkomponens nélküliek, és amplitúdóeloszlásuk szimmetrikus,
- az AM-SSB/SC modulációval nyert jel és az előbbi feltételnek eleget tevő moduláló jel amplitúdóeloszlásai megegyeznek,

3. táblázat

N számú csatorna összetett jelének statisztikája, ha az egyes csatornákat $l=0,2$ paraméterű, $D=1$ effektív értékű Gamma-eloszlással közelített beszédjellel terheljük az idő 100%-ában

Csatornaszám	A s.f. pontjainak száma	Számolt tartomány	Effektív érték \sqrt{N}	Teljesítmény N	Karak. ív. T_{max}	Csúcstényező				CM ² próba valószínűség %	Terület eltérés	Terület fedés (normalitás) %
						1%	1%	10%	50%			
1/Holbrook)	—	—	1	1	—	?	appr. 4,5	1,2	0,1	n. k.	n. k.	n. k.
1	1024	± 12,5	0,995	0,99	129	8,39	4,52	1,24	0,09	0	1,089	45,6
3	1024	± 12,5	1,72	2,96	129	6,16	3,86	1,57	0,27	0	0,62	69
6	1024	± 12,5	2,42	5,87	129	4,84	3,46	1,64	0,43	0	0,38	81
12	128	± 25	3,46	11,995	8	4,58	3,13	1,63	0,53	0	0,22	89
24	128	± 25	4,89	23,96	8	4,07	2,91	1,64	0,60	100	0,12	94
60	23	± 46	7,75	60	0,75	3,72	2,78	1,68	0,66	100	0,05	97,5
240	19	± 85	15,5	240	0,33	3,36	2,66	1,66	0,69	100	0,013	99,4
900	32	± 142	30	900	0,33	3,31	2,60	1,65	0,68	100	0,003	99,8
Normális	—	± ∞	—	—	—	3,3	2,57	1,645	0,675	100	0	100

— az egyes csatornák véletlen jelei egymástól függetlenek.

Most térjünk rá a különböző terhelési szituációk vizsgálatára.

5.1 Sok beszédjel együttes eloszlása

A 3. táblázat 3, 6, 12, 24, 60, 240 és 900 darab (csatornás), 100%-os aktivitású, $l=0,2$ paraméterű Gamma-eloszlással és egységnyi effektív értékkel jellemzett beszédjel összegeként adódó együttes jel statisztikai jellemzőit és normalitását mutatja. Fel-tűntettük még a számítógépes módszer értékelésének megkönnyítésére a Holbrook és Dixon által [3] mérés-sel nyert adatokat, valamint a nagy csatornaszámok jelének határeloszlását adó normális eloszlás idevágó paramétereit.

A táblázat adataiból kitűnik, hogy a számítás a mérési és az elméleti eredményekkel jó egyezést mutat, hiszen a két referenciaeloszláshoz jól simul. A terület-fedés százalékos értékei szemléletesen mutatják a normális eloszláshoz való közeledést, s hogy nagyobb csatornaszám esetén ($N \leq 24$) a normális eloszlástól való eltérés már a mérési pontosság tartományába esik.

5.2 12 csatornás terhelési szituációk

Célunk különböző terhelési szituációjú, általában 12 beszédcsatornából álló, 48 kHz sávzélességű csoport együttes terhelésének statisztikus jellemzőit meghatározni.

Az eredményeket közlő 4. táblázatban a következő jellegzetes terhelési szituációk szerepelnek. Az

eloszlások paramétereit 1 mW, 775 mV és 600 Ω egységválasztással adjuk meg.

1. 9 beszéd- és 1 zenecsatorna, ahol a beszédcsatornák aktív jelének közelítő eloszlása $l=0,2$ -es Gamma, aktív átlagteljesítménye $P=0,128$, effektív értéke 0,358 aktivitása 25% (-15 dBmO hosszú idejű átlagteljesítményű beszéd), a zenecsatorna jelének eloszlását 100% aktivitású exponenciális eloszlással közelítjük.

A zenejel effektív értékét két tényadat alapján határoztuk meg. Az első: a CCITT szerint a „zenejel csúcsmplitúdója” (s erről mi feltételeztük, hogy megegyezik a jel 1%-os valószínűségű csúcsmplitúdójával) ekvivalens a $+9$ dBmO szintű szinuszos jel csúcsmplitúdójával. Ebből: $x_{1\%}=4$ relatív érték. A másik: exponenciális eloszlás 1%-os csúcstényezője $c_{1\%}=3,25$. Ezekből: $D=1,23$, $P=1,5$ relatív érték adódik (azaz a zenejel hosszú idejű átlagteljesítménye $+1,75$ dBmO).

2. 11 beszéd- + 1 faksimile-csatorna. A beszédcsatorna leírása: mint az 1. esetben. A faksimile-csatornát 35% aktivitású (70%-os foglaltságú és 50%-os fekete-fehér arányú) $A=\sqrt{2}$ relatív csúcsertékű (0 dBmO-as vivőjű) harmonikus jellel szimuláltuk.

3. 6 beszéd- + 144 FM táviró-csatorna (6 beszédcsatornában egyenkint 24 táviró). A beszédcsatorna paramétereit megegyeznek az előzőekkel. Egy-egy beszédcsatornában 24 független FM VT csatorna nyerhet elhelyezést, együttesen 135 μ W teljesítménnyel. Ebből kiindulva egy táviró-csatornát 0,106 relatív amplitúdójú, 100% aktivitású harmonikus jellel szimuláltunk számításainkban.

Az adatokat tartalmazó 4. táblázat utolsó sorában 4 összehasonlítási alapul feltűntettük a normális

4. táblázat

12-csatornás terhelési szituációkhoz tartozó sokcsatornás együttes jel statisztikája

Hivatkozási sorszám	A nyaláb összetétele*	A s.f. pontjainak száma	Számolt tartomány*	Effektív érték* (D)	Teljesítmény* (P)	Karak. fv. T_{max}	Csúcstényező				CHI* próba valószínűség %	Terület-eltérés	Terület-fedés (normalitás) %
							1%	1%	10%	50%			
1.	9 db $\Gamma(0,2)$ $p=25\%$ $D=0,36$ + 1 db exp $p=100\%$ $D=1,23$	256	± 9	1,34	1,8	44	4,68	3,17	1,63	0,52	0	0,24	88
2.	11 db $\Gamma(0,2)$ $p=25\%$ $D=0,36$ + 1 db harm. $p=35\%$ $A=\sqrt{2}$	256	$\pm 5,5$	0,837	0,7	72,4	4,95	3,16	1,66	0,376	0	0,53	73,4
3.	6 db $\Gamma(0,2)$ $p=25\%$ $D=0,36$ + 6 \times 24 db harm. $p=100\%$ $A=0,1$	64	± 12	1	1	8,5	4,02	2,73	1,62	0,66	0	0,004	98
4.	Normális	—	$\pm \infty$	—	—	—	3,3	2,57	1,645	0,675	100	0	100

*Az adatok $P_e=1$ mW, $U_e=0,775$ V, $R_e=600$ ohm egységválasztással értendők
p: aktivitási tényező

eloszlás csúcstényezőit. A táblázatból néhány érdekes következtetést vonhatunk le.

Az 1. és 2. szituáció lényegesen eltér a normális eloszlástól. Így egy 12 csatornás együttes jel nem helyettesíthető Gauss-folyamattal.

A normális eloszlástól leginkább a 2. szituáció tér el (11 beszéd és 1 fakszimile).

A legnagyobb kivezérlési tartományt — az 1%-es csúcsmplitúdót alapul véve — az 1., ($x_{1\%} = D \cdot c_{1\%} = 1,34 \cdot 4,68 = 6,28$) szituáció igényli, messze túllépve a 2., ($x_{1\%} = 4,14$) és 3. ($x_{1\%} = 4,02$) szituáció igényeit.

A χ^2 próba műszakilag nem használható.

5.3 Futtatás időigénye

A RAZDAN számítógép minden egyes futtatás idejét kinyomatja, így mód nyílik a gépi idők összevetésére.

A KARAKT, FFT és STATISZTIKA nevű programok fordítási ideje — protokollal kiírás nélkül — rendre 37, 53 és 49 másodperc.

A programok futási időigényét lényegesen befolyásolja a pontok N száma. Az első két program esetében N -nel körülbelül arányos a nyomtatásigény (1!). A statisztika programnál csak nagyobb pontszám esetén tapasztalunk időigény-növekedést, amennyiben normalitásvizsgálatot is végzünk.

Az 5. táblázatban tájékoztató időket közlünk az eredő sűrűségfüggvény 32, 128 és 1024 pontszámmal való szimulációjának esetében.

5. táblázat

Az eredő sűrűségfüggvény pontjainak száma	32	128	1024
KARAKT. időigénye	40 s	1 m 20 s	2 m 20 s
FFT időigénye	30 s	2 m	5 m 30 s
STATISZTIKA időigénye	45 s	47 s	1 m 20 s
Összesen kb.	2 m	4 m	10 m

1. Függelék. A kétoldalas Gamma-eloszlás karakterisztikus függvénye

Feladatunk, hogy az egyoldalas Gamma-eloszlás $f(x)$ és $\varphi(t)$ függvényeinek ismeretében határozzuk meg a kétoldalas Gamma-eloszlás hasonló jellemzőit, $g(x)$ -et, illetve $\psi(t)$ -t.

Tekintsük általánosságban a problémát. Az egyoldalas sűrűségfüggvények negatív x értékeken zérus értéket vesznek fel. Az egyoldalas $f(x)$ sűrűségfüggvényből $x=0$ -ra szimmetrikus kétoldalas függvényt nyerünk, ha $f(x)$ -et annak tükörképével összegezzük. Ahhoz, hogy sűrűségfüggvényt kapjunk, a területet egységnyire kell hoznunk. Mivel $f(x)$ és $f(-x)$ nem negatív, egységnyi területű függvények:

$$g(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2} f(|x|). \quad (\text{F.1.})$$

Természetesen $g(x)$ átlaga zérus lesz, s szórása sem egyezik $f(x)$ szórásával.

A karakterisztikus függvényt — amelynek valós-nak kell lennie a szimmetria miatt — (F.1.) Fourier-

transzformálásával nyerjük. Ismeretes, hogy ha $f(x)$ -hez $\varphi(jt)$ tartozik, akkor $f(-x)$ -hez $\varphi(-jt)$ rendelhető, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(-x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{jx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{j(-\xi)(-x)} d(-\xi) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{j\xi x} d\xi = \varphi(jx) = \varphi(-jt). \end{aligned}$$

Tehát $g(x)$ Fourier-transzformáltja:

$$\psi(jt) = \frac{1}{2} [\varphi(jt) + \varphi(-jt)] = \text{Re}\{\varphi(jt)\},$$

hiszen konjugált komplex függvényt párt összegeztünk.

Általában kimondhatjuk tehát, hogy a kétoldalasított sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye az egyoldalas sűrűségfüggvényhez tartozó karakterisztikus függvény valós része.

Alkalmazzuk összefüggéseinket jelen esetben a kétoldalas Gamma-eloszlás karakterisztikus függvényének meghatározására. Ismert az általánosított egyoldalas Gamma (Pearson III.) eloszlás karakterisztikus függvénye [5], [12]:

$$\varphi(t) = (i - j\beta t)^{-l},$$

ahol a szórásra adódó kifejezés: $D = \beta\sqrt{l}$.

Most $\varphi(t)$ reális részét kell meghatározni; ehhez írjuk

$$\varphi(t) = (Ae^{-jB})^{-l} = A^{-l} e^{jB \cdot l}$$

ahol $A = \sqrt{i + (\beta t)^2}$,

$$\beta = \arctg \beta t.$$

Tehát

$$\psi(t) = \text{Re}\{\varphi(t)\} = \frac{\cos(B \cdot l)}{A^l}.$$

Visszahelyettesítve:

$$\psi(t) = \frac{\cos(l \arctg \beta t)}{[1 + (\beta t)^2]^{l/2}},$$

amely láthatóan páros valós függvény, s ahol a szórásra $D = \beta\sqrt{l(l+1)}$ adódik. Speciálisan, $l=1$ esetén egyszerű összefüggéshez jutunk:

$$\psi(t) = \frac{1}{1 + (\beta t)^2}.$$

2. Függelék. Harmonikus jel karakterisztikus függvénye

Bizonyítsuk be, hogy a harmonikus jel sűrűségfüggvényének Fourier-transzformáltja nulladrendű Bessel-függvény. Mivel a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{A^2 - x^2}, & \text{ha } |x| < A, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

a karakterisztikus függvény:

$$\varphi(t) = \int_{-A}^A \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} e^{jtx} dx =$$

$$= \int_{-A}^A \frac{1}{\pi A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} \cdot e^{jA \left(\frac{x}{A}\right)} dx.$$

Legyen $x/A = \cos \alpha$, akkor $dx/d\alpha = -A \sin \alpha$,

$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} = \sin \alpha$, így egyszerűsítések után

$$\varphi(t) = - \int_{\pi}^0 \frac{1}{\pi} e^{jA \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{jA \cdot \cos \alpha} d\alpha.$$

Az integrál az elsőfokú nulladrendű Bessel-függvényt adja $A \cdot t$ argumentumnál [8]. Tehát a harmonikus jel karakterisztikus függvénye.

$$\varphi(t) = J_0(A \cdot t),$$

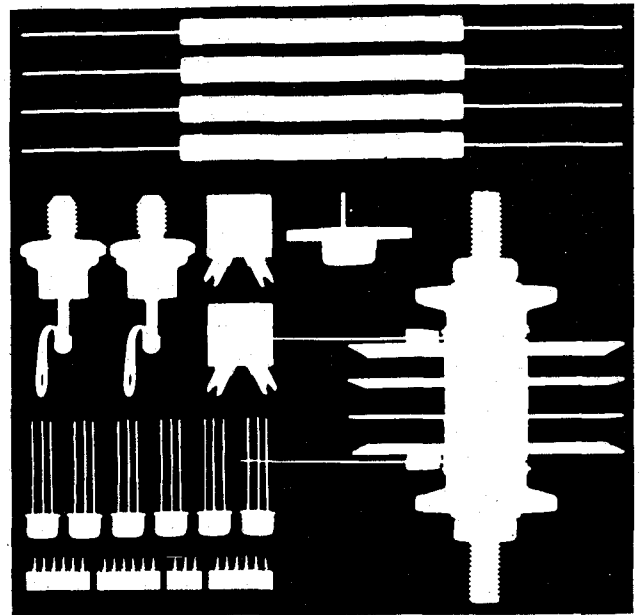
ahol A a harmonikus jel (csúcs)amplitúdója.

Köszönetnyilvánítás

A BME vezeték Híradástechnikai Tanszékén és a Posta Kísérleti Intézetben folytatott — és a fentiekben leírt — munka során szerzők igen sok segítséget kaptak, dr. Kozma László tanszékvezető egyetemi tanártól, az MTA levelező tagjától, dr. Géher Károly és dr. Lajtha György kandidátusoktól, továbbá a Posta Kísérleti Intézetből, amely dr. Lajtha György téma-vezetésével a programok kifejlesztését kezdeményezte és anyagilag támogatta.

I R O D A L O M

- [1] Gordos G.: Csillapításgadozás és zaj mérése átviteltechnikai berendezésekben. Posta Kísérleti Intézet Közleményei, Vol. IX. 1968. pp. 41—62.
- [2] Richards, D. L.: Statistical properties of speech signals. Proc. IEE, Vol. 111, No. 5, May 1964, pp. 941—949.
- [3] Holbrook, B. D.—Dixon, J. T.: Load rating theory for multichannel amplifiers. The Bell Syst. Tech. J, Vol. 18. 1939. p. 624.
- [4] Weiss, W.: Statistische Untersuchungen an Sprachschwingungen. NTZ, Juli, 1964. pp 339—348.
- [5] Rényi A.: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó 1968.
- [6] Gordos G.: A hírközlés rendszerelmélete. Tankönyvkiadó 1969. Mérnöki Továbbképző Int.
- [7] Tóth Á.: Bináris- és Gauss-amplitúdóeloszlású álvéletlen zajgenerátorok, előnyei és alkalmazásuk. Híradástechnika. XXIII. évf. 2. szám. 46—49. (1972. febr.)
- [8] Pattantyús: Gépész- és villamosmérnökök kézikönyve. 1. kötet. Műszaki Könyvkiadó 1959.
- [9] Géher, K.—Gulyás, O.—Dévai G.: Monte-Carlo Verfahren zur Ermittlung mehrfacher Faltungen. XIV. XIV. Intern. Wiss. Koll. Ilmenau 1969. Nachrichtentechnik.
- [10] Singleton, R. C.: ALGOL procedures for the fast Fourier transform. Commun. ACM. Vol. 11. pp. 773—776., Algorithm 338; November 1968.
- [11] Reimann I.: Valószínűségszámítás. A matematikai statisztika elemei. Tankönyvkiadó, 1971.
- [12] Abramowitz, M.—Stegun, A.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 55; New York, 1964.



ELEKTRONIKUS ÉPÍTŐELEMEK — NAGY TELJESÍTMÉNY ÉS MEGBÍZHATÓSÁG

A korszerű kapcsolástechnika fejlődésére az egyre növekvő integráció a jellemző. Az RFT félvezető építőelemek ennek a fejlődésnek új lökést adnak.

Korszerű félvezető építőelemek széleskörű áruválasztékát szállítjuk Önöknek: integrált TTI-kapcsolókat, kis-, közép- és nagyfrekvenciás tranzisztorokat műanyag- vagy fémtokban, Si-diódákat és egyedirányítókat, valamint számos alkalmazáshoz szükséges szelén-egyenirányítókat.

Szívesen adunk Önöknek részletes műszaki felvilágosítást és tájékoztatást speciális szállítási lehetőségeinkről. Minden alkalmazási problémával kapcsolatban tapasztalt szakmérnökök adnak tanácsot.

Exportálja az

Elektrotechnik
EXPORT-IMPORT
VOLKSEIGENER AUSSENHANDELSBETRIEB DER
DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK
DDR 102 BERLIN-ALEXANDERPLATZ
HAUS DER ELEKTROINDUSTRIE

Felvilágosítást nyújt
a NDK Magyarországi
Nagykövetsége
Kereskedelempolitikai
osztály (27),
Budapest XIV.,
Népstadion út 101—103.

Német Demokratikus Köztársaság

RFT
electronic