

# Integráltranszformációk gyors végrehajtása számítógépen

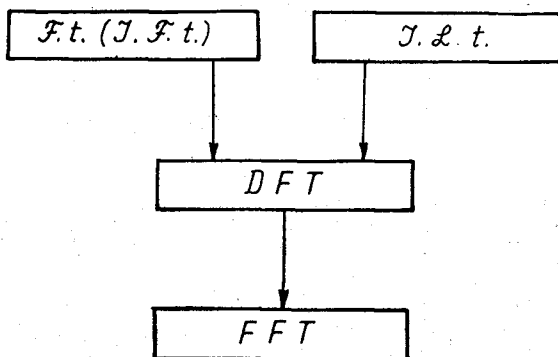
ETO 518.5:517.948.5:681.3

A hírközlő rendszerek jelátviteli tulajdonságainak vizsgálata és az elektronikus áramkörök tranziens analízise jelentősen leegyszerűsíthető az integráltranszformációk segítségével. Az időtartománybeli differenciálegyenletek megoldása helyett a differenciálegyenlet-rendszert Fourier- vagy Laplace-transzformációval (továbbiakban F. t. és L. t.) algebrai egyenletrendszerre vezetjük vissza, és az algebrai egyenletrendszer megoldását az inverz Fourier-, illetve az inverz Laplace-transzformációval (I. F. t. és I. L. t.) visszaállítjuk az időtartományba.

Hírközlő rendszer és áramkörök tervezésére szolgáló programrendszerben az F. t., I. F. t. és I. L. t. többszöri végrehajtására van szükség, ezért fontos, hogy ezeket minél gyorsabban lehessen elvégezni. A gyorsaság növelését a műveletek számának csökkentésével érjük el. Ismeretes egy gyors Fourier-transzformációs módszer, amely a műveletek számát jelentősen lecsökkenti. A módszer [1] Cooley-től és Tukey-től származik, Fast Fourier Transform (FFT) néven szerepel az irodalomban. Mint később látni fogjuk, kb.  $N/\log_2 N$ -ed részére csökken a gépidő ( $N$  a numerikus integrálásnál felvett pontok száma), ha numerikus kvadratura közvetlen alkalmazása helyett FFT-vel dolgozunk. (Pl.  $N=64$  esetben kb. tízszer kevesebb komplex összeadást és szorzást kell végezni FFT alkalmazása esetén, mint egyébként.)

Az F. t. feladatát numerikus számításához diszkrét (véges) Fourier-transzformáció (DFT) alakra kell hoznunk. Az FFT ezt a DFT-t számítja ki gazdaságosan. Ezenkívül olyan egyéb feladatokhoz is jól alkalmazható az FFT, amelyeknél ez nem ennyire szembetűnő (pl. I. L. t., konvolúcióintegrál, konvolúció típusú integrálegyenletek, Fourier-sorok [3]). A továbbiakban ezek közül az F. t.-vel, az I. F. t.-vel és az I. L. t.-vel foglalkozunk.

Beérkezett: 1971. IX. 20.



[H128-PL1]

1. ábra. Az F.t. (I.F.t.) és I.L.t. számítása DFT-vel, illetve FFT-vel

Az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

$$x(t) \xrightarrow{F.t.} a(f)$$

és

$$f(t) \xrightarrow{L.t.} F(s).$$

Az F.t.-t és I. F. t.-t a következő egyenletekkel definiáljuk:

$$a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi jft} dt \quad (1)$$

és

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(f) \cdot e^{2\pi jft} df. \quad (2)$$

Megjegyezzük, hogy  $\omega = 2\pi f$  jelöléssel ezek a megfelelő összefüggések:

$$x(t) \xrightarrow{F.t.} a(\omega),$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Az L. t. és I. L. t. definíciója:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (3)$$

és

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

ahol  $c$  egy alkalmas konstans

és

$$f(t) = 0, \quad \text{ha } t < 0.$$

Az F. t. azokra a függvényekre létezik biztosan, amelyek abszolút integrálhatók, L. t. létezéséhez pedig elegendő, ha  $f(t)$  helyett  $f(t) \cdot e^{-ct}$  abszolút integrálható ( $c$  valamilyen pozitív valós állandó), ezért ezt a függvényosztályt az előbbi kiterjesztéseként tekinthetjük.

## 1. A diszkrét (véges) Fourier-transzformáció (DFT)

A DFT és inverz DFT (IDFT) két periodikus függvény értékei között fejez ki kapcsolatot az alábbiak szerint:

Jelölések:

$$X(i) \xrightarrow{DFT} A(k), \quad A(k) \xrightarrow{IDFT} X(i)$$

$$i, k=0, 1, \dots, N-1$$

$$W = e^{2\pi j/N}$$

DFT def.:

$$A(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X(i) \cdot e^{-2\pi jik/N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X(i) \cdot W^{-ik},$$

$$k=0, 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

$$X(i) = \sum_{k=0}^{N-1} A(k) \cdot e^{2\pi jik/N} = \sum_{k=0}^{N-1} A(k) \cdot W^{ik}$$

$$i=0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

## 2. Fourier-transzformáció visszavezetése DFT-re

Az FT-nek a DFT-vel való összefüggését abból a szempontból fogjuk vizsgálni, hogy az FFT-eljárást hogyan lehet alkalmazni FT-számítására, egy FT-feladat esetén milyen adatokra van szükség FFT-hez és az FFT eredményét miként értelmezzük.

Amint látni fogjuk, az  $x(t)$  és  $a(f)$  függvény helyett ezeknek periodikus kiterjesztéseként kapott  $x_p(t)$  és  $a_p(f)$  függvények között fogunk megfelelő összefüggést kapni. Mi tehát a bemeneti  $x_p(t)$  függvény helyett vesszük az  $x(t)$ -t és az FFT-vel eredményül kapott  $a_p(f)$  függvény fogja közelíteni a meghatározandó  $a(f)$  függvényt.

Tegyük fel, hogy az  $x(t)$  függvénynek létezik FT-ja,  $a(f)$  és az  $a(f)$ -ből az inverz transzformáció előállítja  $x(t)$ -t ((1) és (2) szerint).

Osszuk fel a  $t$  tengelyt  $\Delta t$  hosszúságú intervallumokra, és tekintsük az  $x(t)$  függvényt az  $i \cdot \Delta t$  pontokban, ahol  $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$x(i \cdot \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(f) \cdot e^{2\pi jft \Delta t} df = \int_{-\infty}^{\infty} a(f) \cdot e^{2\pi jft/F} df =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kF}^{(k+1)F} a(f) \cdot e^{2\pi jft/F} df. \quad (7)$$

A  $\Delta t=1/F$  jelölést vezettük be. (8)

Az  $e^{2\pi jft/F}$  periodikus függvény  $F$  periódussal, ezért írható:

$$x(i \cdot \Delta t) = \int_0^F \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(f+kF) \cdot e^{2\pi jft/F} df =$$

$$= \int_0^F a_p(f) \cdot e^{2\pi jft/F} df. \quad (9)$$

Az  $a_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(f+kF)$  tehát  $f$ -nek  $F$  szerint periodikus függvénye, tehát az  $e^{-2\pi jft/F}$  rendszer szerint Fourier-sorba fejthetjük

$$a_p(f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{F} \cdot \int_0^F a_p(f) \cdot e^{2\pi jfl/F} df \right) \cdot e^{-2\pi jfl/F}.$$

(9) felhasználásával átalakítva:

$$a_p(f) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(i \cdot \Delta t) \cdot e^{-2\pi jfl/F}. \quad (10)$$

Ez már diszkrét FT, de nem véges.

Osszuk fel a  $[0, F]$  intervallumot  $N$  egyenlő részre és vegyük  $a_p(f)$  értékeit  $\Delta f$ -enként.

$$\Delta f = F/N, \quad \text{tehát} \quad n \cdot \Delta f / F = n/N,$$

$$a_p(n \cdot \Delta f) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i \cdot \Delta t) \cdot e^{-2\pi jln/N} =$$

$$= \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(i \cdot \Delta t + lN \Delta t) \right\} \cdot e^{-2\pi jln/N}, \quad (11)$$

mivel  $e^{-2\pi jln/N}$   $N$  szerint periodikus.

$$a_p(n \cdot \Delta f) = \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_p(i \cdot \Delta t) \cdot e^{-2\pi jln/N}, \quad (12)$$

ahol

$$x_p(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t+iT)$$

periodikus  $T$  szerint.

$$T = N \cdot \Delta t = N/F = 1/\Delta f.$$

Tétel:

Ha  $x(t) \leftrightarrow a(f)$  egy FT-pár (ahol  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < f < \infty$ ), akkor  $T \cdot x_p(i \cdot \Delta t) \leftrightarrow a_p(n \cdot \Delta f)$  a fenti definíció értelmében DFT-pár (5) és (6)).

A tétel állítását helyettesítéssel ellenőrizhetjük, ld. (12)-es összefüggést.

A közelítési hibával és a felosztási intervallumok választásával kapcsolatos megjegyzéseket ld. a Függelék F1 pontjában.

## 3. Inverz Laplace-transzformáció visszavezetése DFT-re

Az inverz Laplace-transzformáció számítására használatos módszerek egyike a reziduumszámítással oldja meg a feladatot, racionális törtfüggvény esetén. Általánosabb esetben lehet esetleg táblázatban található függvényekből megfelelő szabály szerint számítani (néhány, a gyakorlatban sűrűn előforduló példa ki van dolgozva és táblázatban rögzítve). Ismeretes olyan módszer, amely az integrálnak trigonometrikus integrálokra bontásán alapszik. Különösen abban az esetben, amikor a független változó sok értékén akarjuk kiszámítani az inverz Laplace-transzformált függvényt, gépi számítások alkalmasak a sor alakjában való kiszámítás. Ilyenkor ui. először a sorfejtési együtthatókat számítjuk ki egyszer s mindenkorra, és azután már nem jelent nagy gépidőigényt a sorösszegezés elvégzése különböző helyeken. A következőkben az ortonormált Laguerre-függvényrendszer szerinti sorfejtést [4, 5] fogjuk alkalmazni. Ez előnyösebb, mint a régebben használatos trigonometrikus függvényrendszer vagy Legendre-polinomrendszer szerinti sorfejtés, mert azoknál külön transzformációt kell végezni, mivel véges intervallum fölött alkotnak ortonormált rendszert.

Feladat: Adott  $F(s)$  komplex változójú és -értékű függvény, számítandó az az  $f(t)$  valós változójú és értékű függvény, amelynek a Laplace-transzformáltja az  $F(s)$  (3) és (4) szerint.

Tegyük fel, hogy létezik olyan  $c_0$  valós szám, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt < \infty \quad (13)$$

és

$$\int_0^{\infty} e^{-2ct} |f(t)|^2 dt < \infty, \text{ ha } c \geq c_0.$$

Ebből következik, hogy az

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \text{ analitikus,}$$

ha  $\sigma > c_0$ , ahol  $s = \sigma + i\omega$ .

Tekintsük az  $f(t)$  függvényt a következő sor alakjában:

$$f(t) = e^{ct} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\frac{t}{2T}} \cdot L_n\left(\frac{t}{T}\right). \quad (14)$$

Ezt a sort az  $f(t) \cdot e^{-ct}$  függvény  $e^{-\frac{x}{2}} \cdot L_n(x)$  ortonormált rendszer szerinti sorfejtéséből kaptuk, ahol  $L_n(x)$   $n$ -edfokú Laguerre-polinomot jelöl.

Helyettesítsük (14)-et (3)-ba. A kijelölt integrálást elvégezve kapjuk:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(s - c - \frac{1}{2T}\right)^n}{\left(s - c + \frac{1}{2T}\right)^{n+1}}.$$

Közelítsük  $F(s)$ -t a sor első  $N$  tagjával.

$$F(s) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot \frac{\left(s - c - \frac{1}{2T}\right)^n}{\left(s - c + \frac{1}{2T}\right)^{n+1}}, \quad (15)$$

innen

$$\left(s - c + \frac{1}{2T}\right) \cdot F(s) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot \frac{\left(s - c - \frac{1}{2T}\right)^n}{\left(s - c + \frac{1}{2T}\right)}.$$

Legyen  $s = c + j\omega$  (ha  $c$ -t rögzítjük és  $\omega$ -t változtatni fogjuk, akkor azt a képzetes tengellyel párhuzamos egyenest vesszük, amelyen az integrálás történik).

$$\left(j\omega + \frac{1}{2T}\right) \cdot F(c + j\omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot \frac{\left(j\omega - \frac{1}{2T}\right)^n}{\left(j\omega + \frac{1}{2T}\right)} \quad (16)$$

$$\omega = \frac{1}{2T} \cdot \text{ctg} \frac{\Theta}{2} \quad (17)$$

helyettesítéssel

$$\frac{j\omega - \frac{1}{2T}}{j\omega + \frac{1}{2T}} = e^{j\Theta},$$

tehát (16)-ot így írhatjuk:

$$\left(\frac{j \text{ctg} \frac{\Theta}{2}}{2T} + \frac{1}{2T}\right) \cdot F\left(c + j \frac{\text{ctg} \frac{\Theta}{2}}{2T}\right) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\Theta}. \quad (18)$$

Ez valós ( $a_n$ ) együtthatós komplex Fourier-sorfejtés.

Összefüggésünket  $\Theta_i = 2\pi i/N$  sorozatra alkalmazva (ahol  $i=0, 1, \dots, N-1$ ) DFT alakú összefüggéshez jutunk (ld. (6)).

(5) alkalmazásával tehát az  $a_n$  együtthatókat kiszámíthatjuk, s ezután már csak a (14) alakú sorösszegzést kell elvégezni, a sor első  $N$  tagját véve.

A paraméterek választására vonatkozóan ld. a Függelék F2. pontját.

#### 4. Az FFT-eljárás

Az integráltranszformációkat DFT-számításra vezettük vissza. A DFT-t gyorsan számító módszerek egyikét ismertetjük itt.

Feladat:

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot W^{-rk} \quad (19)$$

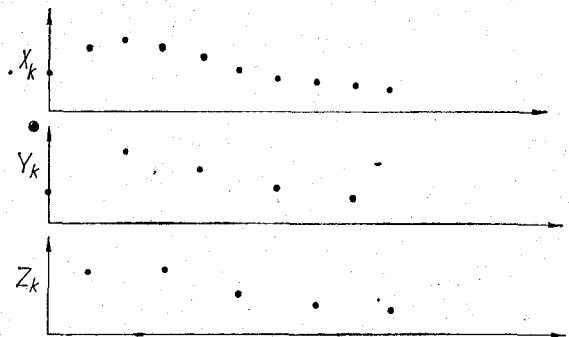
alakú összeg számítása, ahol  $r=0, 1, \dots, N-1$ .

$$W = e^{2\pi j/N}.$$

Itt láthatjuk, hogy  $N$  tagú összegzés szerepel, minden tag szorzat, tehát egy  $A_r$  kiszámításához  $N$  komplex szorzás és összeadás, az egész  $A_r$  sorozathoz ( $r=0, 1, \dots, N-1$ ) pedig  $N^2$  komplex művelet szükséges. Ha viszont egy sorozat DFT-jét részsorozatának DFT-jére vezetjük vissza, megtakaríthatunk műveleteket, csak  $N \log_2 N$  művelet lesz szükséges.

Feltételezzük, hogy  $N=2^n$ .

Bontsuk úgy két része az  $X_k$  mintasort ( $Y_k$ -ra és  $Z_k$ -ra), hogy mindkettő  $N/2$  pontot tartalmazzon



[H128-PL2]

2. ábra.  $N$  pontos mintasor felbontása két  $N/2$  pontos mintasorra

és az  $Y_k$  álljon a páros sorszámú  $X_k$  pontokból,  $Z_k$  pedig a páratlanokból. Tehát

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= X_{2k} \\ Z_k &= X_{2k+1} \end{aligned} \right\} k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Mivel  $Y_k$  és  $Z_k$  az  $X$ -függvény pontjai  $N/2$  helyen, ezeknek is felírható a DFT-ja:

$$B_r = \sum_{k=0}^{N/2-1} Y_k \cdot W^{-2rk} \quad r=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (20)$$

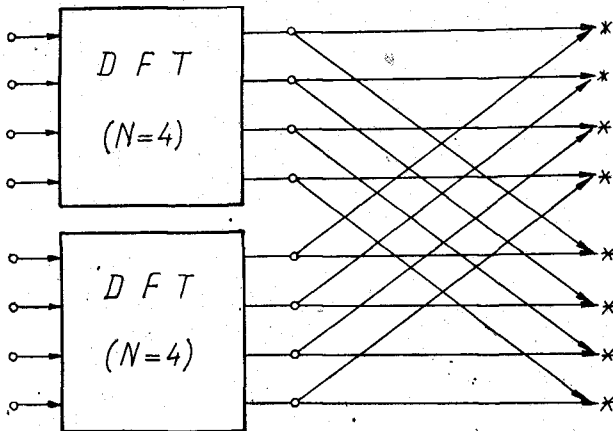
$$C_r = \sum_{k=0}^{N/2-1} Z_k \cdot W^{-2rk} \quad (21)$$

Ezek felhasználásával az  $X_k$  DFT-ja a következőképpen írható (részletesen 1. a Függelék F3. pontjában):

$$\begin{cases} A_r = B_r + W^{-r} \cdot C_r \\ A_{r+N/2} = B_r - W^{-r} \cdot C_r \end{cases} \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2}-1 \quad (22)$$

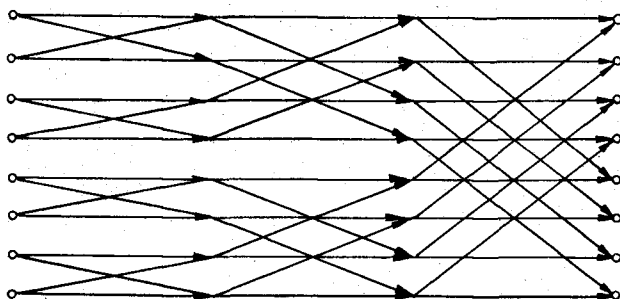
Tehát ha az  $Y_k$  és  $Z_k$   $N/2$ -mintás DFT-t ismerjük, akkor ezekből  $N$  összeadással és  $N/2$  szorzással megkaphatjuk az  $X_k$  DFT-ját. További felezésekkel,  $n$  lépéssel visszavezethetjük a feladatot egyetlen pont DFT-jára (egy pont DFT-ja önmaga).

Mivel  $n = \log_2 N$ , összesen  $N \cdot \log_2 N$  összeadásra és  $\frac{N}{2} \log_2 N$  szorzásra van szükség.



H128-PL3

3. ábra. 8 pontos DFT számítása két 4 pontos DFT-ből. Két nyíl találkozása egy csomópontban egy összeadást, a nyílak melletti \* jel szorzást jelöl (de az 5. \* jelnél ugyanaz a szorzat szerepel, mint az 1-nél, a 6-nál ugyanaz, mint a 2-nél stb.)



H128-PL4

4. ábra. Teljes felbontás  $N=8$  esetben

Amikor  $N$  nem 2 hatványa, hanem tetszőleges  $p$  prímszám hatványa, akkor is hasonlóan egyszerűsíthető a számolás azáltal, hogy  $p$  sorozatra bontjuk a mintapontokat (mindegyik  $N/p$  pontot tartalmaz) és ezek DFT-jeiből állítjuk elő az  $X_k$  DFT-jét.

Tetszőleges  $N$  esetén az eljárás  $N$ -et felbontja 2 hatványainak és a többi prímszám hatványainak szorzatára, s ily módon visszavezeti a számítást a fenti egyszerűbb esetekre.

### 5. Számítógép típusprogramok

A TKI Fourier- és inverz Laplace-transzformációs programjai és ezek jellemzői az 1. táblázatban láthatók.

1. táblázat

Programok táblázata

Név	Funkció	In put függvény	Alapmódszer	Hol készült
FFT	F, F <sup>-1</sup>	valós	Cooley—Tukey	TKI
KOGR FFT	F, F <sup>-1</sup>	komplex	Cooley—Tukey	TKI
LAPLACE	L <sup>-1</sup>	ált.	Laguerre—Cooley	TKI
INV LAPL	L <sup>-1</sup>	racion. tört fv.	Parc. törtre bontás	MIKI
LAPPERC	L <sup>-1</sup>	racion. tört fv.	Sperc-gyök-keresés, Laguerre, Cooley	TKI

A Függelék F4. és F5. pontjában mutatjuk be az egyik program (FFT) tömbvázlatát és egy programrészletet LAPLACE-ból.

### 6. Mintapélda

Feladat az

$$F(s) = \frac{0,2733 - 0,89888s + 0,99477s^2 - s^3}{0,2733s + 0,89888s^2 + 0,99477s^3 + s^4}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltjának előállítása, a  $[0, 12,57]$  intervallumban.

A Távközlési Kutató Intézetben a szerző által kidolgozott program az alábbi adatokkal az alábbi eredményt adta:

Adatok: Felosztásszám:  $N=64$

A legjobboldalibb

pólus valós része: 0

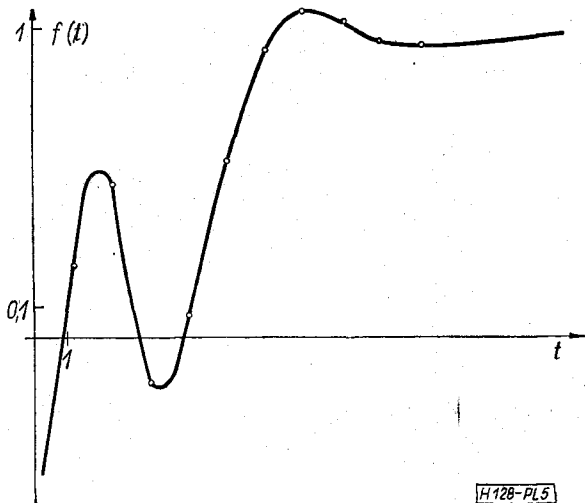
Felső határ ( $t_{max}$ ): 12,57

Lépésköz (dt): 1,257

Eredmény:

$t$	$f(t)$
1,26	$2,410906 \cdot 10^{-1}$
2,51	$5,130709 \cdot 10^{-2}$
3,77	$-1,512460 \cdot 10^{-1}$
5,03	$9,003257 \cdot 10^{-2}$
6,28	$5,578860 \cdot 10^{-1}$
7,54	$9,416939 \cdot 10^{-1}$
8,80	1,084051
$1,01 \cdot 10^1$	1,053953
$1,13 \cdot 10^1$	$9,855271 \cdot 10^{-1}$
$1,26 \cdot 10^1$	$9,585489 \cdot 10^{-1}$

Futási idő: 30 s. (Gier számítógépen)



5. ábra. A kimeneti függvény

Ezúton is megköszönöm dr. Csurgay Árpádnak a kézirat gondos átnézését és értékes tanácsait.

**Függelék**

**F1. A  $\Delta t$  és  $\Delta f$  felosztás-intervallumok választása**

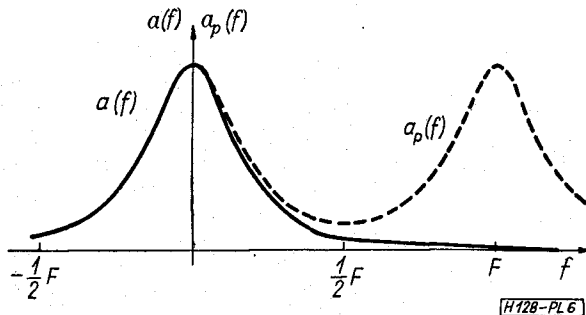
A kerekítési hibánál és az integrálnak összegzéssel való közelítéséből adódó hibánál általában jelentősebbek az

- $a(f)$  és  $a_p(f)$  különbségéből és
- $x(t)$  és  $x_p(t)$  különbségéből eredő

közelítési hibák. Kivétel ez alól az az eset, amikor a függvény sávkorlátolt, és megfelelően nagy  $F$  választással  $a(f) = a_p(f)$  elérhető vagy amikor  $x(t) \equiv 0$  egy véges intervallumon kívül.

A  $\Delta t$ -t és  $\Delta f$ -et igyekszünk úgy megválasztani, hogy a közelítési hibák minél kisebbek legyenek.

Tekintsük az  $a_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(f+kF)$  összefüggést. Tegyük fel, hogy  $\Delta t$  úgy van megválasztva ( $F = 1/\Delta t$  összefüggéssel  $\Delta t$  az  $F$ -et is meghatározza), hogy  $a(f) \approx 0$ , ha  $|f| > \frac{1}{2}F$ , ekkor  $0 \leq f \leq \frac{1}{2}F$  esetén  $a(f) \approx a_p(f)$ .



6. ábra. Az  $a(f)$  és  $a_p(f)$  függvények

$$a(f) \approx a_p(f), \text{ ha } 0 \leq f \leq \frac{1}{2}F \text{ és}$$

$$a(f-F) \approx a_p(f), \text{ ha } \frac{1}{2}F \leq f \leq F$$

Az  $a(f)$ -nek  $a_p(f)$ -iel való közelítésében a hiba az  $a(f+kF)$ -ek összege  $k \neq 0$ -ra.

$$e_a(f) = a_p(f) - a(f) = \sum_{k \neq 0}^{\infty} a(f+kF) \quad (24)$$

Ez a hiba akkor lesz kicsi, ha  $F$  elég nagy ( $1/2F$  lefedti azt a részt, ahol  $a(f)$  lényegesen különbözik 0-tól). Tehát célszerű  $\Delta t$ -t ennek megfelelően kicsire választani. A  $\Delta f$  választása  $\Delta t$ -től függetlenül történik. Mivel  $\Delta f = 1/T$ , ezért a bemenő  $x(t)$  függvény alakjának megfelelően választjuk figyelembe véve, hogy az eredményt  $\Delta f$ -enként kapjuk.

**F2. A  $T$  és  $c$  paraméterek választása**

A (14) sor konvergenciájának ( $L_2$  normában, ahol  $L_2$  a négyzetesen integrálható függvények tere) elvileg minden pozitív  $T$ , valamint  $c > c_0$  és  $c \geq 0$  esetén fenn kell állnia.

Nem egyformán konvergál azonban a sor különböző  $T$  és  $c$  értékek esetén. Ezen paramétereknek a következőkben ismertető megválasztását az irodalom egyrészt intuitív megfontolások, másrészt gyakorlati tapasztalatok alapján tartja célszerűnek.

$T$  megválasztásakor vegyük figyelembe a Laguerre-polinomok alábbi sajátosságait. Az  $L_n(x)$   $n$ -edfokú Laguerre-polinomnak  $n$  valós, pozitív 0 helye van, s ezek közül a legnagyobb kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$x_n < 2n + 1 + \sqrt{(2n + 1)^2 + \frac{1}{4}} \approx 4n.$$

Ezért az  $e^{-\frac{x}{2}} \cdot L_n(x)$  függvény, amely szerint az  $f(t)$  függvény sorba van fejtve, oszcillál a  $0 < x < 4n$  intervallumban, ezenkívül monoton 0-hoz tart  $x > 4n$ -re. Ebből adódik, hogy a (14) által definiált sor a  $0 < t < t_{\max}$  intervallumban akkor ad jó approxi-

mációt, ha  $T$ -t úgy választjuk meg, hogy  $\frac{t_{\max}}{T} < 4N$  teljesüljön.

Tapasztalat szerint megfelelő  $T$  olyan választása, amelyre teljesül:

$$T = \frac{t_{\max}}{N}.$$

Az  $f(t)$  jó közelítéséhez szükséges ezenkívül, hogy  $N$  elég nagy legyen ( $N=64$  elegendőnek bizonyult) és a  $c$  parameter is megfelelő legyen.

$c$ -t válasszuk a következő módon:

$$c = \begin{cases} c_0 + \frac{1}{t_{\max}}, & \text{ha } c_0 + \frac{1}{t_{\max}} \cong 0, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol  $c_0$  a (3) Laplace-integrál konvergencia-abszciszszája.

### F3. Az FFT-eljárás egy lépése

$N$ -mintás DFT-számítása két  $\frac{N}{2}$ -mintás DFT-ből.

$$\begin{aligned} X_k &\xrightarrow{\text{DFT}} \binom{N}{2} A_r, & Y_k &\xrightarrow{\text{DFT}} \binom{N}{2} B_r, \\ Z_k &\xrightarrow{\text{DFT}} \binom{N}{2} C_r, \end{aligned}$$

$$\text{ahol } \begin{cases} Y_k = X_{2k} \\ Z_k = X_{2k+1} \end{cases}$$

$X_k$  DFT-jére a páros és páratlan pontok alapján összegezve írható:

$$\begin{aligned} A_r &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \{ Y_k \cdot W^{-2rk} + Z_k \cdot W^{-r[2k+1]} \} = \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} Y_k \cdot W^{-2rk} + W^{-r} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} Z_k \cdot W^{-2rk}. \end{aligned}$$

A (20) és (21) összefüggést alkalmazva kapjuk:

$$A_r = B_r + W^{-r} \cdot C_r \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1.$$

$B_r$  és  $C_r$   $r \cong \frac{N}{2}$ -re periodikusan ismétli az  $r < \frac{N}{2}$ -re felvett értékeket, ezért:

$$\begin{aligned} A_{r+\frac{N}{2}} &= B_r + W^{-\left[r+\frac{N}{2}\right]} \cdot C_r = B_r - W^{-r} \cdot C_r; \\ 0 &\leq r \leq \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

### F4. Az FFT-program tömbvázlata

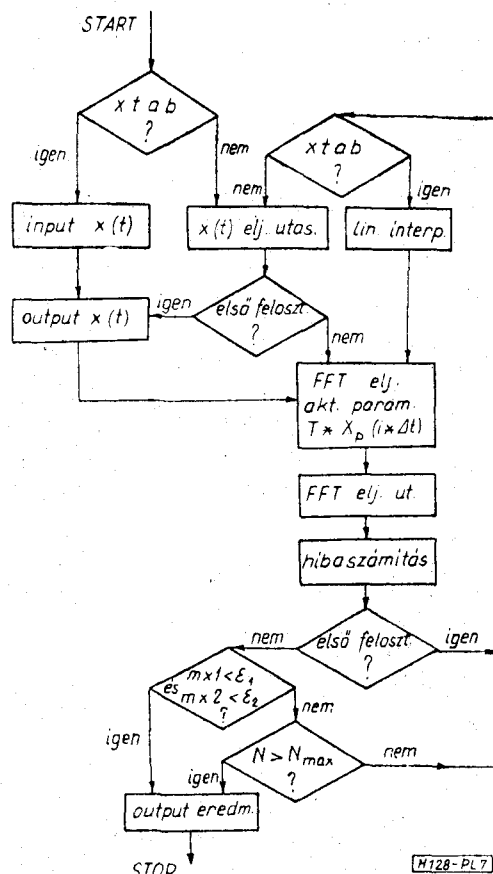
A tömbvázlat a 7. ábrán látható.

1.  $x_{tab}$  logikai változó értéke true, ha táblázattal adott a bemenő függvény; false, ha analitikusan adott a bemenő függvény.
2. A „hibaszámítás”-blokkban kiszámítjuk az utolsó két iterációnál kapott függvény maximális eltérését és az eltérések abszolút értékeinek összegét, ezeket jelöltük  $m \times 1$ -gyel és  $m \times 2$ -vel. A számolás befejeződik, ha ezek már kisebbek lettek, mint az általunk megadott  $\epsilon_1$  és  $\epsilon_2$  hiba határok.

### F5. A Laplace-programban a Laguerre-polinom értékeit számító eljárás

```

procedure Laguerre (n, x, L);
value n, x;
real x;
integer n;
array L;
begin
  integer j;
  for j:=0 step 1 until n do
begin
  if j=0 then
begin
  L[0]:=1;
goto E;
end;
if j=1 then
begin
  L[1]:=1-x;
goto E;
end
  L[j]:=
  = ((2*(j-1)+1-x)*L[j-1]-(j-1)*L[j-2])/j;
  E:
end; ciki;
end elj;
    
```



7. ábra. Az FFT program tömbvázlata

### I R O D A L O M

[1] Cochran, W. T.—Cooley, J. W.—Favin, D. L. et al.: What Is the Fast Fourier Transform? Proceedings of the IEEE, 1967. oct. p. 1664.  
 [2] Boothrood, J.: Complex Fourier Series, Algorithm 31. The Computer Journal, Vol. 10, No 4, 1968. febr. p. 414.

- [3] Cooley, J. W.—W. Lewis, P. A.—Welch, P. D.: Application of the Fast Fourier Transform to Computation of Fourier Integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-15, No. 2, 1967. jun. p. 79.
- [4] Wing, O.: Numerical inversion of Laplace transform. Symposium on Computer Aided Circuit Design, New York University, 1967.
- [5] Weeks, W.: Numerical Inversion of Laplace Transform. JACM, Vol. 13, No 3. 1966, p. 419—426.
- [6] Simonyi K.: Elméleti Villamosságtan. Tankönyvkiadó, 1952.

## SZEMLE

Összeállította: BALOGH PÁL

Az átviteltechnikai berendezésekkel kapcsolatos külföldi prognózisok századunk végére jóslják az egységes digitális hálózat (integrált hálózat) megvalósulását. A jelenlegi műszaki fejlettségi szintnek megfelelően kb. 15 km-es összeköttetésre gazdaságos a fizikai csatornák helyett PCM multiplex összeköttetést létrehozni. A prognózisok is utalnak arra, hogy ez az adat erősen függ az alkalmazott technológiától. Míg Angliában a 24 csatornás PCM berendezés 19 km, az Amerikai Egyesült Államokban 16 km esetén, addig Japánban 14 km-nél nagyobb távolságokon mutatkozott gazdaságosnak. E három ország volt egyébként a PCM-gyártmányok kibocsátásának úttörője.

Az európai országok a 30/32 csatornás rendszereket szabványosították. Az Amerikai Egyesült Államokban most készül az integrált áramkörre épülő második generáció, amely minden bizonnyal a méret- és árcsökkenés következtében rövidebb szakaszokon is gazdaságos lesz.

Európai viszonylatban olyan primer multiplex rendszerek előállítására törekcsenek, amelyek a nagyvárosi és a körzet-hálózatban viszonylag rövidebb szakaszokon is gazdaságosak. A fejlődés ütemére jellemző, hogy a 30/32 csatornás PCM primer multiplex rendszer technikáját csak 1968-ban dolgozták ki, de már egyedül az NSZK-ban több mint 100 kísérleti berendezés üzemel.

A szocialista országok közül az NDK, Csehszlovákia és Magyarország fejlesztette saját, kiscsatornaszámú PCM rendszerét. A szocialista országokban végzett felmérések arra is utalnak, hogy amennyiben a PCM szélesebb körű elterjedését döntően az adatátviteli csatornák számának növekedésétől tesszük függővé, akkor a rendszerrel legfeljebb csak a 80-as évek második felében számolhatunk.

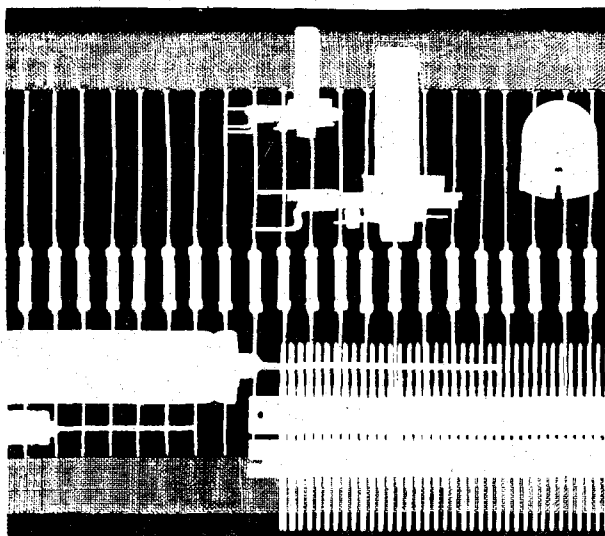
A PCM nagy előnye, ami fejlesztését és mielőbbi elterjesztését sürgeti, hogy szinte teljesen integrált áramkörös kivitelben gyártható. A felmérések szerint az elkövetkező 10—15 évben szocialista relációban is várhatjuk a 100-as csatornaszámú szekunder multiplex rendszerek kidolgozását és sorozatgyártását. Ez a PCM rendszereket 30—100 km hosszú összeköttetések létesítésénél is gazdaságossá teszi. Ez utóbbi adattal számolnak egyébként a különböző felmérések is.

A PCM rendszerek fejlesztését sürgeti a kapcsolás (telefonközpontok) digitális formában (PCM jelre) időosztással vagy vegyes idő- és térosztással történő megvalósíthatósága is. További sürgető tényező az egyre növekvő csatornaszámú adatátvitel digitális jellege is. (KGM—MTTI információ, 1972. jan.)

\*\*\*

A telefonhálózat fejlődését elemző felmérések szerint 1969-ben 17,3 millió állomás, 1970-ben pedig 7,3%-kal több telefonállomás működött a világon. Az utóbbi években átlagosan 7—8%-os növekedéssel lehetett számolni. Hangsúlyoznunk kell a növekedés most megadott ütemének átlagos jellegét, hiszen az egyes országok között lényeges eltérések voltak (Görögországban pl. 1970-ben az 1969-es értékhez képest 15,7%-os növekedést mutattak ki). A nagy telefon-sűrűséggel rendelkező országokban viszont — például az Amerikai Egyesült Államokban — a növekedés üteme alig éri el az 5%-ot. Svédországban 1970-ben, 1969-hez viszonyítva az állomások száma 4,8%-kal nőtt. Pillanatnyilag az Amerikai Egyesült Államokban 100 lakosra 57, Svédországban pedig 100 lakosra 54 telefonkészülék jut. (KGM—MTT információ, 1971. dec.)

(Folytatás a 148. oldalon)



## Nagy teljesítményű és megbízható elektronikus alkatrészek

Az RFT-rétegellenállások — állandó ellenállásként, beállító potenciométerként, egyes-, kettős-, és sztereo potenciométerként alkalmazva — a szórakoztató elektronikában és a komerciális kapcsolástechnikában egyaránt beváltak.

Az RFT-kondenzátorok kitűnnek kis méreteikkel, nagy szigetelési ellenállással és azzal, hogy szigetelésük jósága extrém alkalmazási körülmények között is állandó.

Az RFT-csatlakozók nagy biztonsággal és megbízhatóan működnek elektronikus készülékekben és berendezésben.

Szívesen tájékoztatjuk Önt széles terjedelmű passzív alkatrész választékunkról, részletes műszaki adatokról és különleges szállítási lehetőségekről. Nagy tapasztalattal rendelkező szakmérnökök adnak tanácsot minden alkalmazási kérdésben.

Exportálja:

**Elektrotechnik**

**EXPORT-IMPORT**

VOLKSEIGENER AUSSENHANDELSBETRIEB DER  
DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK  
DDR 102 BERLIN-ALEXANDERPLATZ  
HAUS DER ELEKTROINDUSTRIE

Felvilágosítást nyújt:

Az NDK Nagykövetsége,  
27-es Kereskedelempolitikai Osztály  
Budapest XIV.,  
Népstadion út 101—103.

**RFT**  
electronic