

DR. PÁVÓ IMRE

MTA Matematikai Logikai és Automataelméleti Tanszéki
Kutató Csoportja, Szeged

Hálózatérzékenység meghatározása topológiai formulával

ETO 537.311.33:621.374.4:621.382.2.011.4

Ismeretes, hogy áramkörök tolerancia számításánál igen fontos szerepet tölt be a hálózatfüggvény érzékenysége [2, 3]. Legyen a vizsgált hálózatjellemező (hálózatfüggvény) $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, ahol x_i szimbolizálja az i -edik áramköri elem valamilyen paraméterét (ez lehet impedancia, admittancia, áttétel, erősítés stb.), ahol $i=1, 2, \dots, N$. Akkor definíció szerint a hálózatjellemező x_i paraméter szerinti (abszolút) érzékenysége:

$$S_{x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i}, \quad (1)$$

ahol N az áramköri paraméterek száma a vizsgált hálózatban.

Az (1) formulával definiált érzékenység meghatározására több módszer ismeretes. Érzékenység meghatározás történhetik a definíció alapján történő közvetlen számolással; hálózatelméleti tételek felhasználásával közvetve is számítható; illetve méréssel is meghatározható. A többféle eljárás kialakulása is bizonyítja, hogy az érzékenység meghatározása mind elméleti, mind gyakorlati szempontból a hálózat-számítás egyik fontos feladata [2].

Hálózatszámításokra az utóbbi évtizedekben elterjedt a gráfelmélet eszközeinek, módszereinek felhasználása [9]. Ilyen felhasználás a topológiai formulák felfedezése során vált lehetségessé. Topológiai formula az érzékenység számításához is felírható [3], így elvileg a gráfelmélet az érzékenység meghatározására is felhasználható. Mégpedig, ha pl. a hálózatjellemező egy kétkapú hálózat transzfer feszültség függvénye, úgy valamelyik, a kapcsolásban szereplő áramköri elem impedanciája szerinti érzékenység előállítható két transzfer feszültség függvény szorzataként [10]. Márpedig transzfer feszültség függvény felírására szerkeszthető topológiai formula [9]. E topológiai formulában szereplő hálózatgráf részgráfok előállíthatók [4, 6], előállításukhoz digitális számológép jól felhasználható [7, 8].

Az érzékenységnek ezen az úton való előállítása azonban körülményes. Ennek oka többek között abban rejlik, hogy a hálózatához rendelt gráf a kétféle

feszültségátviteli függvény esetében kissé eltérő. Ugyanis az egyik feszültségátviteli függvény képzésénél a szóban forgó hálózat topológiáját kissé „át kell alakítani”, mégpedig a bemeneti pontokat rövidre zárni, a kiszemelt áramköri elemnél pedig a hálózatot „felszakítani”. Nyilván a rövidre zárás és a felszakítás az eredeti kapcsolástól eltérő topológiájú módosított kapcsolást eredményez. Számolás során az egyik hálózatgráfról át kell térni a másikra. Ez az áttérés pedig megnehezíti a szükséges részgráfok képzését.

E cikkben az érzékenység gráfelméleti úton történő meghatározásának egy másik lehetőségét mutatjuk be. Mégpedig az érzékenység meghatározásához először levezetünk egy új topológiai formulát. E levezetéshez felhasználjuk Bode bilineáris tételét [1], és Kirchhoff 4. tételét [9]. A levezetett topológiai formula alkalmazása megkívánja (az egyetlen) hálózatgráf fájnak, és bizonyos típusú 2-fájnak, 3-fájnak generálását. Megmutatjuk, hogy a szóban forgó részgráfok Ore egy tételén [5] alapuló k -fa generálási módszerrel [6] egyöntetűen előállíthatók. Külön figyelmet szentelünk a topológiai formulában szereplő 3-fa részgráfok generálásának, és egy digitális számológépre is használható algoritmust állítunk össze. Végül egyszerű példán bemutatjuk az érzékenysége cikkben ismertetett előállítását.

Topológiai formula az érzékenységhez

A következőkben mind a vizsgált áramkörök elemeire, mind a tekintett hálózatfüggvényekre megszorításokat teszünk. Mégpedig a kétkapú hálózatban csak ellenállás, induktivitás és kapacitás forduljon elő, a hálózatfüggvény paraméterei admittanciák legyenek, a hálózatjellemező pedig a $Z_T = Z_T(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ transzfer impedancia függvény, ahol Y_1, Y_2, \dots, Y_N az áramköri elemek admittancia paraméterei. Feladatul tűzzük ki az

$$S_{Y_*} = \frac{\partial Z_T}{\partial Y_*} \quad (x=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

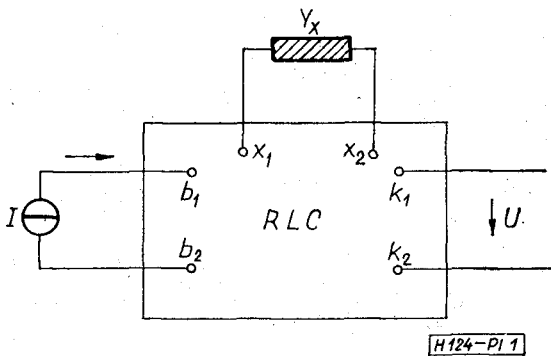
érzékenység meghatározását.

A meghatározáshoz számozzuk meg a kapcsolás csomópontjait az 1, 2, . . . , n természetes számokkal. Jussanak az áramkör bemeneti pontjaira a b_1 és b_2 , a kimeneti pontokra a k_1 és k_2 , végül a tekintett x -edik áramköri elem kapcsaira pedig az x_1 és x_2 természetes számok. A kétkapú hálózat rajzát az x áramköri elem kiemelésével és a gerjesztési feltétel feltüntetésével együtt az 1. ábrán láthatjuk.

Kirchhoff 4. tétele szerint a transzfer impedancia függvényre felírható a következő topológiai formula [8]:

$$Z_T = \frac{U_{kl}}{I_{be}} = \frac{\sum (\pm \prod Y_{ij})}{\sum \prod Y_{ij}}, \quad (3)$$

ahol 1F a hálózatgráf egy tetszőleges fája, ${}^2F'$ pedig olyan 2-fája, amely mind a bemeneti, mind a kimeneti pontokat szétválasztja (azaz külön-külön komponenseiben tartalmazza), (i, j) a gráf i -edik és j -edik pontja közötti él, Y_{ij} pedig az (i, j) élnek megfelelő áramköri elem admittanciája (éladmittancia) a kapcsolásban. A produktum képzés a kiválasztott



1. ábra

részgráf élei, az összegképzés pedig a megfelelő típusú részgráfok szerint történik (\forall az univerzális kvantor jele). A 2-fa éladmittancia szorzat előjele akkor pozitív, ha a kiválasztott ${}^2F'$ 2-fa a b_1 és a k_1 pontokat tartalmazza közös komponensében; ellenkező esetben a szorzat előjele negatív.

A későbbi áttekinthetőség kedvéért megállapodunk a következő egyszerűsítő jelölésben: a (3) számlálójában szereplő szorzatösszeget ${}^2T'$ -vel, míg a nevezőjét 1T -vel jelöljük. Általában az ilyen típusú szorzatösszegeket e cikkben T betűvel jelöljük, míg a T betű „díszítése” utalni fog a szorzatösszeg számításához felhasznált részgráf-típusra, és a megfelelő részgráfokat ugyanolyan díszítésű „ F ” betűvel szimbolizáljuk.

E megállapodás értelmében (3) így írható:

$$Z_T = \frac{{}^2T'}{{}^1T}. \quad (4)$$

Bode bilineáris tétele szerint (4) jobb oldala az Y_x admittancia bilineáris kifejezése [3]. Rendezzük át (4) számlálóját és nevezőjét úgy, hogy gyűjtsük külön azokat az admittancia szorzatokat, amelyek-

ben Y_x előfordul, majd e szorzatokból emeljük ki e közös tényezőt.

$$Z_T = \frac{{}^2\bar{T}' + {}^3T' \cdot Y_x}{{}^1\bar{T} + {}^2T_{x_1, x_2} \cdot Y_x}, \quad (5)$$

ahol ${}^2\bar{T}'$, ${}^3T'$, 1T és ${}^2T_{x_1, x_2}$ szimbólumok az Y_x admittanciától nem függő szorzatösszegeket jelentik (általában a többi áramköri admittanciákból felépülő kifejezések).

Az (5) jobb oldalát a (3) jobb oldalával összevetve, könnyen megadhatók az (5)-ben szereplő szorzatösszeg tagjainak gráf-megfelelői, illetve olyan részgráf halmazok, amelyek elemei, ill. élei szerint is képezhetők a megfelelő szorzatösszegek úgy, ahogyan (3) alkalmazásánál azt már említettük. Mivel (4)-ben minden egyes tag fa, ill. 2-fa éladmittancia szorzat, továbbá megfigyelve, hogy 1T tagjai $n-1$, ${}^2\bar{T}'$ és ${}^2T_{x_1, x_2}$ tagjai $n-2$, valamint ${}^3T'$ tagjai pedig olyan $n-3$ tényezős szorzatok, amelyek megfelelő (4) kifejezésbeli tagokból éppen az Y_x tényező törlésével állottak elő, látjuk, hogy a megfelelő részgráfok rendre fák, 2-fák és 3-fák. Felhasználva a szorzatösszegek és a hozzájuk tartozó részgráfok jelölésére alkalmazott konvenciót, a szorzatösszegeknek megfelelő részgráf-halmazok a következő formulákkal írhatók le:

$${}^1\bar{T} : \{ {}^1\bar{F} \} = \{ {}^1F \mid (x_1, x_2) \notin {}^1F \}, \quad (6a)$$

$${}^2T_{x_1, x_2} : \{ {}^2F_{x_1, x_2} \}, \quad (6b)$$

$${}^2\bar{T}' : \{ {}^2\bar{F}' \} = \{ {}^2F' \mid (x_1, x_2) \notin {}^2F' \}, \quad (6c)$$

$${}^3\bar{T}' : \{ {}^3F' \} = \{ {}^3F \mid {}^3F \oplus (x_1, x_2) = {}^2F' \}. \quad (6d)$$

A definíciós formuláknál a \oplus jel az elemidegen unió jele. Megjegyezzük, hogy az (5)-ben előforduló szorzatösszegek (együttható kifejezések) jelölésénél már eleve olyan szimbólumokat választottunk, amelyek a definíciós formulákban lehetővé teszik a jelöléskonvenció betartását. Példaképpen bemutatjuk, hogy a (6c) formula miként értelmezhető: a ${}^2\bar{T}'$ szorzatösszegnek megfelelő $\{ {}^2\bar{F}' \}$ 2-fa halmaz elemei pontosan azok a ${}^2F'$ 2-fák, amelyekben nem szerepel az (x_1, x_2) gráféi.

Ezután az (5) mindkét oldalának Y_x szerinti parciális differenciálásával nyerjük:

$$S_{Y_x} = \frac{\partial Z_T}{\partial Y_x} = \frac{{}^3T' \cdot ({}^1\bar{T} + {}^2T_{x_1, x_2} \cdot Y_x) - {}^2T_{x_1, x_2} ({}^2\bar{T}' + {}^3T' \cdot Y_x)}{({}^1\bar{T} + {}^2T_{x_1, x_2} \cdot Y_x)^2},$$

majd némi átalakítás után innen nyerjük az érzékenységre a következő topológiai formulát:

$$S_{Y_x} = \frac{1}{{}^1T} \left({}^3T' - \frac{{}^2T'}{{}^1T} \cdot {}^2T_{x_1, x_2} \right). \quad (7)$$

A (7) topológiai formulában szereplő szorzatösszegeknek megfelelő részgráfok a hálózat fái, 2-fái és 3-fái. Vegyük észre, hogy (7) előállításában szereplő $\{ {}^1F \}$ (a hálózatgráf összes fái) és $\{ {}^2F' \}$ (a hálózat-

gráf olyan összes 2-fái, amelyek a bemeneti és a kimeneti pontokat egyidőben szétválasztják) részgráf halmazok már (4)-ben is szerepet játszottak, és e részgráfok módszeres generálása megoldottnak tekinthető [8]. Továbbá a (7)-ben előforduló ${}^2T_{x_1, x_2}$ szorzatösszegnek megfelelő $\{{}^2F_{x_1, x_2}\}$ 2-fa halmaz elemei pontosan azok a 2-fák, amelyek az x_1 és az x_2 pontokat külön komponenseikben tartalmazzák, így előállításuk szintén megoldott [6], sőt általában egyszerűbb probléma, mint a ${}^2F'$ típusú 2-fák generálása. Új problémát vet fel a ${}^3F'$ típusú 3-fák generálása. A következő részben meg fogjuk mutatni, hogy e 3-fák generálása az eddig használt ciklusvizsgálatos módszerrel [6] elegánsan megoldható.

Végül megjegyezzük, hogy a (7) topológiai formulában szereplő szorzatok előjele következik a (3) formulánál már ismertetett előjel-konvencióból. Nevezetesen a ${}^3T'$ szorzatösszeg egy tagjának előjele megegyezik a ${}^3F' \oplus (x_1, x_2) = {}^2F'$ 2-fának megfelelő éladmittancia-szorzat (3) formulabeli előjelével [7].

Az érzékenység formulájában szereplő 3-fák generálása

Az előállítandó 3-fák halmazát a (6d) formula definiálja. Részletesen ${}^3F'$ olyan 3-fa, amely egyrészt nem tartalmazza az (x_1, x_2) gráfélet, másrészt e gráfélet is hozzászámolva olyan 2-fát nyerünk, amely mind a bemeneti, mind a kimeneti pontokat külön komponensében tartalmazza. Továbbá az is egyszerűen belátható, hogy a $\{{}^3F'\}$ halmaz minden eleme egyértelműen előállítható alkalmas ${}^2F'$ 2-fából az (x_1, x_2) gráfélet törlésével.

A továbbiakban felhasználjuk a k -ia generálás ciklusvizsgálat alkalmazásával történő módszerét. (E módszer leírása megtalálható vázlatosan a [8], részletesen a [6] irodalomban.) A ${}^3F'$ 3-fa előállítását e módszerrel úgy fogjuk tenni, hogy először a $\{{}^3F'\}$ halmaznál egy bővebb halmazt állítunk elő, s ennek elemei közül válogatjuk ki a ${}^3F'$ típusú 3-fákat.

Tekintsünk egy ${}^3F' \in \{{}^3F'\}$ típusú 3-fát. Akkor mindig létezik pontosan egy olyan ${}^2F'$ 2-fa, amelyből az (x_1, x_2) élet törölve előáll a tekintett 3-fa. A kiszemelt él törlésével ${}^2F'$ valamelyik komponense „szétesik” két fa komponensre. Következésképpen vagy x_1 , vagy x_2 a tekintett 3-fa olyan komponensében van, amelyben sem b_1 , sem b_2 nem fordul elő. Így a ${}^3F' \in \{{}^3F_{b_1, b_2, x_1}\}$ és a ${}^3F' \in \{{}^3F_{b_1, b_2, x_2}\}$ relációk közül pontosan az egyik teljesül. Mindenesetre érvényes:

$$\{{}^3F'\} \subseteq \{{}^3F_{b_1, b_2, x_1}\} \cup \{{}^3F_{b_1, b_2, x_2}\}. \quad (8)$$

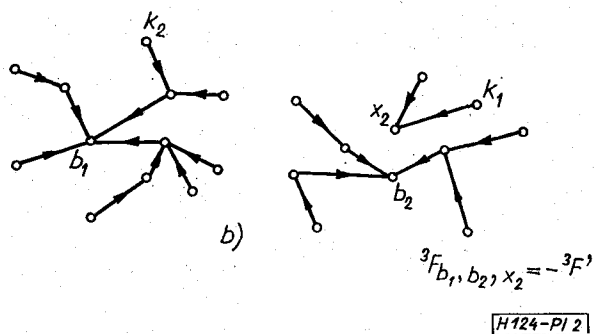
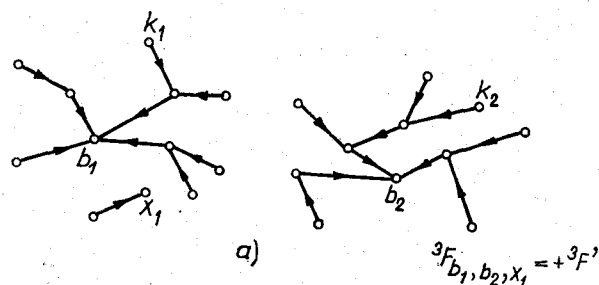
A (8) jobb oldalának elemeit a szokásos módon rendre előállíthatjuk. Mégpedig a G hálózatgráf $\mu(G)$ adjacencia mátrixából [6] képezni kell az összes olyan M_{b_1, b_2, x_1} és M_{b_1, b_2, x_2} egyszerűsítettet, amelyek $\nu(\mu^{-1}(M_{b_1, b_2, x_1})) = {}^3F_{b_1, b_2, x_1}$ illetve $\nu(\mu^{-1}(M_{b_1, b_2, x_2})) = {}^3F_{b_1, b_2, x_2}$. A megfelelő (r operátor nélküli) irányított 3-fákban az élek irányítása a b_1, b_2 és x_1 , illetve a b_1, b_2 és x_2 pontok felé történik. A viszonyokat a 2a és a 2b ábrákon illusztráljuk, mégpedig olyan 3-fákban, amelyek egyben ${}^3F'$ típusúak is. Az ábrákon feltüntettük a kimeneti pontok egy-egy lehetséges elrendezését is. Ezek megfigyelésével lát-

ható a tekintett 3-fának megfelelő éladmittancia szorzat „öröklött előjele”.

Általában azonban (8) jobb oldala tartalmaz nem ${}^3F'$ típusú 3-fát is. Ez az eset pontosan 2 alkalommal fordulhat elő:

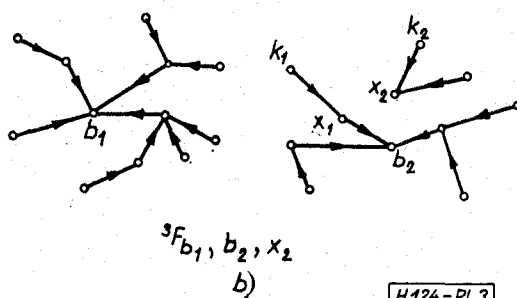
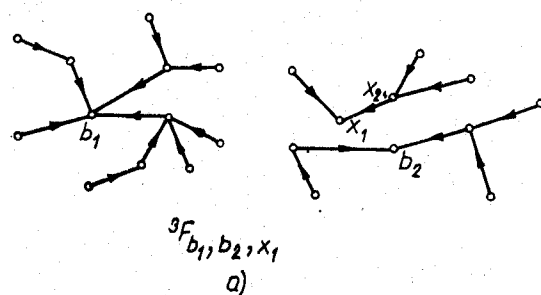
1. a nyert 3-fa nem választja szét az x_1 és az x_2 pontokat, vagy

2. e pontokat szétválasztja ugyan, de az (x_1, x_2) él hozzászámításával nyert 2-fa nem választja szét a k_1 és k_2 (kimeneti) pontokat. Ilyen feltételeknek megfelelő 3-fákat találunk a 3a és a 3b ábrákon. Ezek az ábrák is a 3-fákát a megfelelő irányítással mutatják. Ez utóbbi ábrákat megfigyelve egyszerű eljárás adódik arra, hogy (8) elemei közül az összes ${}^3F'$ típusú 3-fákat kiválogassuk. Ez az eljárás felhasználja a ciklusvizsgálatot.



2. ábra

H124-PI 2



3. ábra

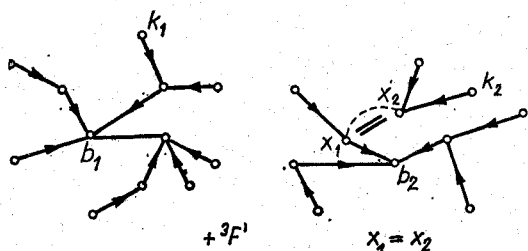
H124-PI 3

Mint ismeretes, egy k -fán végrehajtott ciklusvizsgálat a megfelelő irányított k -fa egy részének bejárásával ekvivalens, mégpedig a definiált irányítás szerint. Ebből következik, hogy a (8) jobb oldalán szereplő 3-fák esetén bármely pontból indított ciklusvizsgálat vagy valamelyik bemeneti pontnál, vagy x_1 -nél (III. x_2 -nél) szakad meg. Annak a feltételnek ellenőrzése tehát, hogy a tekintett 3-fa az x_1 és x_2 pontokat szétválasztja-e, úgy történhet, hogy pl. a 2a ábrán látható esetben ciklusvizsgálatot indítunk az x_2 pontból. Ha e vizsgálat az x_1 ponton szakad meg, úgy a tekintett 3-fa nem választja szét az x_1 és x_2 pontokat, ellenkező esetben igen. Hasonlóképpen járhatunk el a 2b ábrán látható esetben is.

De ciklusvizsgálattal az is eldönthető, hogy az (x_1, x_2) gráfai hozzászámításával előállott 2-fa a kimeneti pontokat szétválasztja-e. Evégből az él hozzászámítását „pótoljuk” az $x_1 = x_2$ feltétellel (azaz az x_1 és x_2 szimbólumokat azonosnak tekintjük, vagy másképpen az x_1 és x_2 pontokat a kapcsolásban „rövidre zárjuk”). Ilyen megállapodás után indítsunk ciklusvizsgálatot mindkét kimeneti pontból. Ha e ciklusvizsgálatoknál a szakadás ugyanannál a bemeneti pontnál következett be, úgy a tekintett 3-fa nem ${}^3F'$ típusú, ellenkező esetben igen. Ilyen feltétel melletti ciklusvizsgálat lefolytatásához tekintsük a 4. ábrát, ahol feltüntettük az $x_1 = x_2$ megállapodást is. Jól látható, hogy most a k_2 -ből indított ciklusvizsgálat az $x_2 \rightarrow x_1$ irányban a b_2 -nél szakad meg (míg a k_1 -ből indított ciklusvizsgálat szakadási helye a b_1). A k_2 -ből indított ciklusvizsgálat kimenetele a talált ${}^3F'$ fa „öröklött” pozitív előjelét is mutatja.

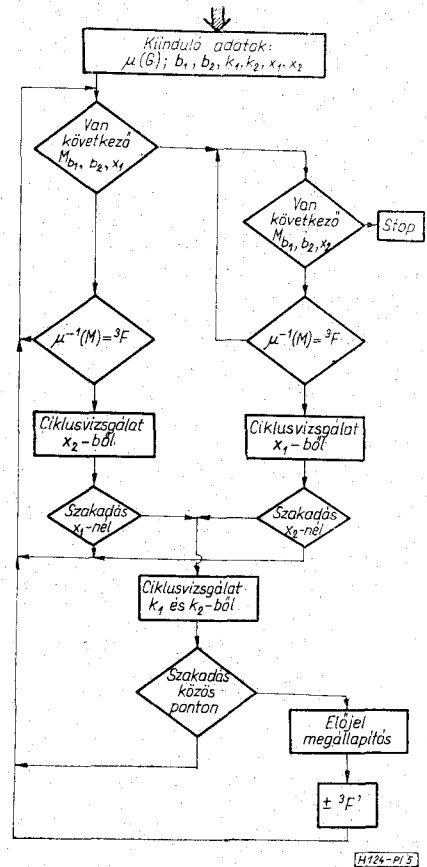
Végeredményben néhány alkalmasan indított ciklusvizsgálat segítségével (8) jobb oldalából rendre kiválogatható az összes ${}^3F'$ típusú 3-fa, s közben a megfelelő éladmittancia szorzat előjele is megállapítást nyer.

Az 5. ábrán látható a ${}^3F'$ típusú 3-fák előállítására szolgáló algoritmus összefoglalása, egy programkészítés alapjául is szolgálható logikai vázlat formájában. Ezen a logikai vázlaton téglalappal szemléltetjük az aritmetikai funkciók elvégzésének megfelelő részleteket, míg az egyéb paralelogrammák a logikai döntések helyét szimbolizálják, a nyílfolyam pedig az algoritmus végrehajtásának irányát. „Igen” logikai döntés esetén a nyílfolyam a paralelogramma legalsó csúcsából folytatódik, „nem” logikai döntés esetén pedig valamelyik szélső csúcsból. Gépi program készítésére számítva megjelöltük az algoritmus kezdő részét vastag nyíllal, majd az algoritmus végét jelző stop jelet is beírtuk. Különben a logikai séma legfelső téglalapja szemlélteti a kiinduló adatokat, amelyek



4. ábra

H 124-PI 4



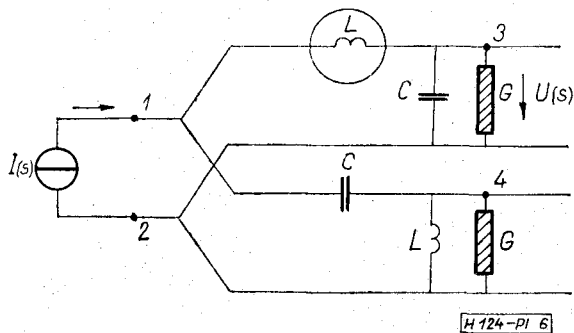
5. ábra

az egyszerűsítettek képzéséhez, és a 3-fa generáláshoz szükségesek.

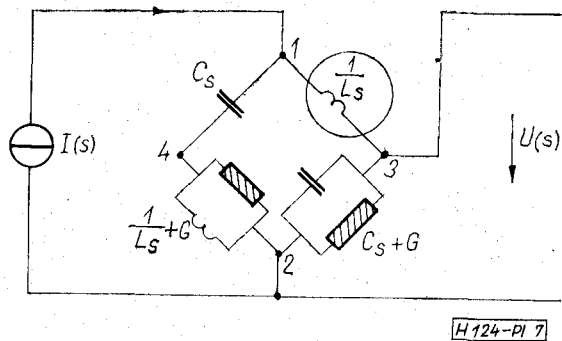
Megjegyezzük, hogy hasonló eljárást lehetne szerkeszteni a ${}^3F_{k_1, k_2, x_i}$ ($i=1, 2$) 3-fákból kiindulva is. Most minden korábbi eljárás értelem szerűen módosítandó.

A vázolt algoritmus alapján készített számológépi program rendelkezik azzal a kedvező tulajdonsággal, hogy a feladat megoldásához szükséges memóriakapacitás bizonyos értelemben minimális. Ugyanis az eljárás során kapott ${}^3F'$ 3-fákat kell csak tárolni a további számításokhoz, egyéb típusú 3-fák az éladmittancia-helyettesítés szempontjából nem jönnek számításba.

Végül vegyük észre azt a jelentős körülményt is, hogy a vázolt algoritmus tárgyalt széttagolása csupán didaktikai szempontból volt szükséges. Ugyanis a ciklusvizsgálatos 3-fa generálás módszere már a „3-fa” döntés meghozásához is teljes ciklusvizsgálatot igényel. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus 4. ábrán látható logikai séma második logikai döntéséhez a kiválasztott részgráf minden egyes pontjából kellett ciklusvizsgálatot indítani. Ha gondoskodunk arról, hogy a teljes ciklusvizsgálat során az algoritmus által fontos ciklusvizsgálat-kimeneteket is megfigyeljük, úgy az algoritmus-vázlat többi része elhagyható. Ez azt jelenti, hogy a gépi program nagymértékben összevonható, azaz a ${}^3F'$ típusú 3-fák előállítása tulajdonképpen nem kíván új módszert. E megfigyelés is mutatja, hogy a teljes ciklusvizsgálat a megfelelő típusú részgráfok kiválasztásának milyen „erős módszere”.



6. ábra



7. ábra

Példa

Az ismertett eljárás most felhasználjuk egy konkrét kétkapú-hálózat Z_T transzfer impedancia függvény egyik érzékenységének meghatározására.

Tekintsük a 6. ábrán látható kapcsolást. E kapcsolás az irodalomból ismert másodfokú, konstans bemeneti ellenállású váltósűrő [2]. Meghatározzuk az „aluláteresztő rész” transzfer impedancia hálózat jellemző (1. és 3. pontok között elhelyezkedő) induktivitás szerinti érzékenységét.

A 7. ábrán a kapcsolás átrajzolását találjuk. Ez utóbbi ábrából könnyen leolvasható a hálózatgráf. Az ábrán látható a gerjesztési feltétel is, valamint az éladmittanciákat is felírtuk mindjárt operátoros alakban (s a komplex frekvencia).

A hálózatgráf [6] szerinti generáló mátrixa:

$$\mu(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

A (9)-ből az első sor kiszemelésével előállíthatók a hálózatgráf fái. Számolással nyerjük:

$${}^1F: (0311), (0312), (0411) \text{ és } (0412). \quad (10)$$

A kiszámított fákat a 8. ábrán külön is feltüntetjük.

A generáló mátrixból a ${}^2F'$ típusú 2-fák is előállíthatók. Most a (9) első és második sorát kell „nullázni”. Az eredmény:

$${}^2F': (0011) \text{ és } (0012), \quad (11)$$

a 9. ábrán szemléltetve. Mindkét fa „előjele” pozitív.

Hasonlóképpen (9) első és harmadik sorát nullázva előállíthatók a ${}^2F_{1,3}$ 2-fák is:

$${}^2F_{1,3}: (0301), (0302) \text{ és } (0401), \quad (12)$$

az eredmény a 10. ábrán.

Végül a ${}^3F'$ 3-fák generálásához elegendő az adjacencia mátrixnak pusztán az $M_{1,2,3}$ (1, 2, 3)-egyszerűsítettjeit tekinteni (ugyanis az $M_{1,2,1}$ egyszerűsítetteknek nincs értelmük, illetve 2-fához vezetnének), így most (9)-nek első 3 sorát kell „nullázni”. Számolás útján adódik:

$${}^3F': (0001) \text{ és } (0002), \quad (13)$$

és a talált 3-fák képét a 11. ábra mutatja. E 3-fák előjele ugyancsak pozitív.

A 9. és a 11. ábrák összevetéséből is könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a ${}^3F'$ 3-fák valóban a megfelelő ${}^2F'$ 2-fákból állottak elő az (1, 3) él törlésével. Ezért a 11. ábra a 9. ábra alapján közvetlenül is megrajzolható lett volna.

A 7. ábra figyelembevételével kiszámítjuk a (7) topológiai formulában szereplő szorzatösszegeket. Mégpedig (10) felhasználásával:

$${}^1T = (1/L_s + C_s + G) \cdot (2C/L + G/L_s + GC_s), \quad (14)$$

(11)-ből:

$${}^2T' = 1/L_s \cdot (C_s + 1/L_s + G), \quad (15)$$

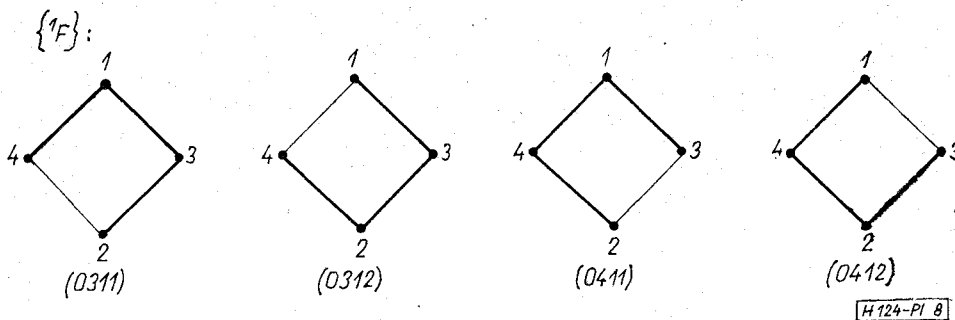
(12)-ből

$${}^2T_{1,3} = (1/L_s + G) \cdot (2C_s + G) + C_s(C_s + G), \quad (16)$$

végül (13)-ből

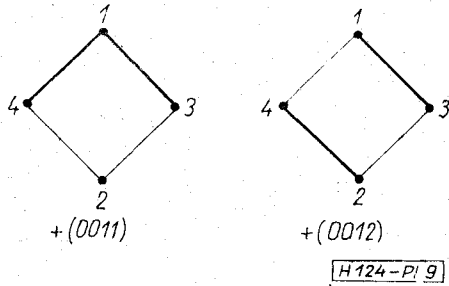
$${}^3T' = C_s + 1/L_s + G \quad (17)$$

adódik.



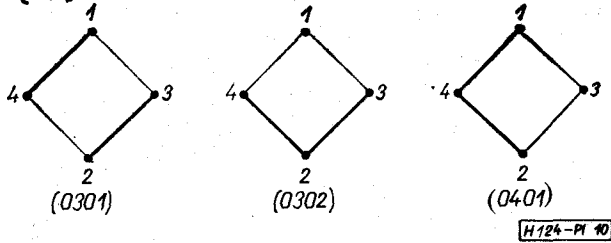
8. ábra

$\{2F\}$:



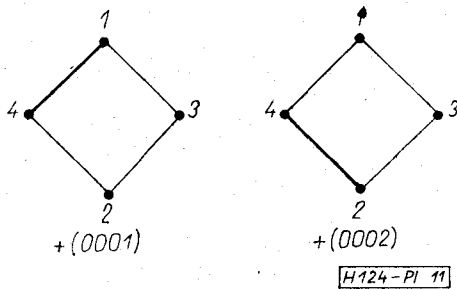
9. ábra

$\{2F_{1,3}\}$:



10. ábra

$\{3F\}$:



11. ábra

(14), (15), (16) és (17) figyelembevételével, felhasználva (7)-et, némi algebrai átalakítás után az érzékenységre a következő képletet nyerjük:

$$S_{1,3} = \frac{1}{2C/L + G/L_s + GC_s} \cdot \frac{1/L_s \cdot ((1/L_s + G)(2C_s + G) + C_s \cdot (C_s + G))}{(1/L_s + C_s + G) \cdot (2C/L + G/L_s + GC_s)^2} \quad (18)$$

A (18) képlet felhasználásakor pl. tolerancia számításánál G , C és L helyére névleges értékek irandók. Jól látható, hogy $S_{1,3}$ a komplex frekvencia racionális törtfüggvénye. $s=j\omega$ helyettesítés után képezhető (18) abszolút értéke és fázisa, azaz az érzékenység amplitúdó és fáziskarakterisztikája meghatározható. Adott frekvencia tartományban pedig vizsgálható az érzékenység abszolút értékének maximuma, amely pl. a legrosszabb esetre való tervezésnél [2] szükséges.

Végül meghatározzuk az érzékenységet egy konkrét numerikus esetben is. Megadjuk a váltószűrő paramétereit relatív egységekben. Legyen egységnek

választott határfrekvencia esetén $L=2C$ és $G=1$. Mint az irodalomból ismert [2], most a váltószűrő konstans bemeneti ellenállása éppen egységnyi. Továbbá a frekvencia egység választása folytán $L=\sqrt{2}$ és $C=1/\sqrt{2}$. A paraméter értékeket (14)-be helyettesítve némi átalakítás után adódik:

$${}^1T = \frac{1}{2s^2} (s^2 + \sqrt{2}s + 1). \quad (19)$$

(15)-ből:

$${}^2T' = \frac{1}{2s^2} (s^2 + \sqrt{2}s + 1), \quad (20)$$

továbbá (16)-ből:

$${}^2T_{1,3} = \frac{1}{2s} (s^3 + 3\sqrt{2}s + 4s + \sqrt{2}), \quad (21)$$

végül (17)-ből:

$${}^3T' = \frac{1}{\sqrt{2}s} (s^2 + \sqrt{2}s + 1). \quad (22)$$

(19), (20), (21) és (22) felhasználásával, figyelembe véve a (7) formulát, összeállíthatjuk a konkrét kapcsolat hálózatjellemező érzékenységét. Ismét némi algebrai átalakítás után nyerjük:

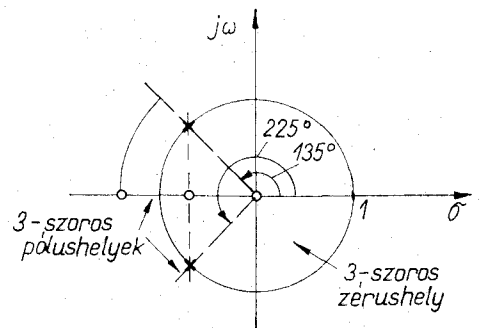
$$S_{1,3} = \frac{s^3(\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2})}{(s^2 + \sqrt{2}s + 1)^3}. \quad (23)$$

A (23) számlálóját és nevezőjét szorzattá alakítva tüstént látszik, hogy $S_{1,3}$ -nak három különböző valós zérushelye van, amelyek rendre 0 (háromszoros zérushely), $-1/\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$; továbbá egy (háromszoros) konjugált komplex pólusa a $-1/\sqrt{2} \pm 1/\sqrt{2}j$. Az érzékenység függvény pólus-zérus elrendezését a 12. ábrán tüntettük fel.

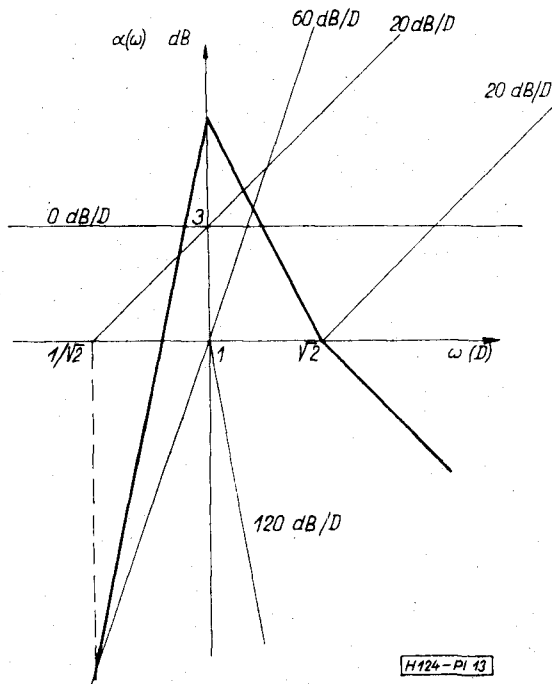
A pólusok és zérusok ismeretében Bode diagramok felhasználásával megszerkeszthetők $S_{1,3}$ ω -tartománybeli karakterisztikái. Például az $\alpha(\omega) = 201n |S_{1,3}|$ amplitúdó-karakterisztika megrajzolásához hozzuk (23)-at Bode alakra:

$$S_{1,3} = \sqrt{2} \cdot \frac{s^3 \left(1 + \frac{s}{1/\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{1} \cdot 2 \cdot 1/\sqrt{2} + \left(\frac{s}{1}\right)^2\right)^3}. \quad (24)$$

A (24)-hez tartozó elemi karakterisztikák megrajzolása után a 13. ábrán feltüntettük az érzékenység



12. ábra



13. ábra

amplitúdó-karakterisztika törtvonalas közelítését. Innen látható, hogy $\alpha(\omega)$ maximumát az egységnek választott határfrekvencián veszi fel. Tolerancia-számításnál a legrosszabb esetre való tervezésnél tehát $S_{1,3}$ abszolút értéke a határfrekvencián számítandó.

Néhány megjegyzés

E dolgozatban az érzékenység meghatározásának egy topológiai formulával való számítási lehetőségét láttuk. A (7) topológiai formulából azonban mást is kiolvashatunk. Ha e formulát megfigyeljük, látjuk, hogy adott kapcsolat esetén az admittanciák szerinti érzékenység számításánál felhasznált k -fa típusok közül csupán a ${}^3F'$ és a ${}^2F_{x_1, x_2}$ változhatik, miközben másik elemparaméter utáni érzékenység iránt érdeklődünk. A hálózatjellemző toleranciájára tehát írhatjuk:

$$\Delta^2 T = \sum_{x=1}^N \frac{1}{1T} \left({}^3T'_x - \frac{{}^2T'_x}{1T} \cdot {}^2T_x \right) \cdot \Delta Y_x \quad (25)$$

ahol ΔY_x az x -edik áramköri elem admittancia toleranciája, 2T_x a ${}^2T_{x_1, x_2}$ szorzatösszeg rövid jele, valamint az előbbinél és a ${}^3T'_x$ szorzatösszegnél az x index figyelmeztet arra, hogy ezek a kifejezések az x -edik hálózattelemtől függenek (ill. azzal változnak), a kapcsolatban szereplő áramköri elemek száma pedig N .

A (25) formulát más alakban is felírhatjuk. Az összegzést felbontva, és az állandó tényezőket kiemelve nyerjük a

$$\Delta^2 T = \frac{1}{1T} \sum_{x=1}^N {}^3T'_x \cdot \Delta Y_x - Z_T \sum_{x=1}^N {}^2T_x \cdot \Delta Y_x \quad (26)$$

formulát, amelynek levezetéséhez felhasználtuk (4)-et is.

Vegyük észre, hogy (26) a toleranciának egy topológiai formulája. Készíthető olyan számológépi program is, amellyel a hálózatjellemző tolerancia függvényét (26) felhasználásával nyerjük. Maga a hálózatgráf, mint ahogyan arra már az érzékenység meghatározásánál is utaltunk, a számítás során nem változik meg, így biztosított az eljárás során szereplő k -ia halmazok elemeinek egyöntetű generálása.

Az érzékenység (7) topológiai formulájából is látható, de fizikailag is nyilvánvaló, hogy S_{Y_x} értéke nem függ a kiszemelt x -edik áramköri elem kapcsolatának számozásától (azaz indexcserével szemben a formulában szereplő k -fák invariánsak).

Mint ahogyan a dolgozatban bemutatott példánál is látszik, az egyes elemérzékenységek külön-külön frekvenciafüggőek. Ugyanakkor ismeretes [11]-ből, hogy a relatív érzékenységek összege invariáns. E körülmény lehetőséget nyújt további elemérzékenységek ez invariáns összegből történő meghatározására. Továbbá az egyes elemérzékenységek (abszolút) maximumukat általában különböző frekvenciákon veszik fel. A korábban vázolt számológépi program kiegészíthető olyan részlettel, amely lehetővé teszi, hogy a program lefuttatása közben e frekvenciaértékek is kiadódjanak.

A (7) topológiai formula speciális esetben kétpólus impedancia érzékenységét is megadja a kapcsolási elemek admittanciája szerint. Most az 1. ábra jelöléseivel $b_1 = k_1$ és $b_2 = k_2$. E tény következménye, hogy a topológiai formulában szereplő ${}^2T'$ szorzatösszeg minden tagja most pozitív. Jelen esetben a ${}^2F'$ 2-fák képzése is egyszerűsödik; nevezetesen ezek helyett képezhetők pl. a ${}^2F_{b_1, b_2}$ 2-fák. E lehetőség feleslegessé teszi minden 2-fánál azokat a ciklusvizsgálatokat, amelyek a kimeneti pontok elválasztottságát ellenőrzik. Hasonlóképpen egyszerűsödik a ${}^3F'$ 3-fák előállítása is; itt sincs szükség a kimeneti pontokból indított ciklusvizsgálatokra, valamint az előjel megállapítására. Az említett körülmények egyszerűbb program készítését teszik lehetővé.

Gráfelmélet felhasználásával természetesen nemcsak (transzfer) impedancia érzékenységét lehet vizsgálni, hanem egyéb hálózatjellemzők érzékenységét is. Ilyen vizsgálatokhoz (7)-ből is további topológiai formulák vezethetők le, ha a hálózat meghajtási feltételeit alkalmasan átalakítjuk (Thevenin–Norton átalakítás). Topológiai formula levezetésének másik lehetősége lenne pl. Kirchhoff 3. tételének felhasználása [9]. Ez utóbbi esetben k -fák helyett más részgráfok generálása válhat szükségesé (pl. komplementer k -iák). Azonban a szükséges részgráfok generálása végső soron visszavezethető lenne k -iák generálására.

I R O D A L O M

- [1] Bode: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, 1945.
- [2] Géher: Lineáris hálózatok, Műszaki Kiadó, Budapest, 1968.
- [3] Géher: Lineáris hálózatok toleranciájáról és érzékenységéről, Híradástechnika, XVI. évf. (1965), 10. szám.

- [4] *Maxwell—Cline*: Topological Network Analysis by Algebraic Methods, *Electronics Record, Proc. IEEE*, vol. 113 (1966) pp 1344—1347.
- [5] *Ore*: Theory of Graphs, American Math. Society, 1962.
- [6] *Pávó*: Egy gráf k-fáinak előállításáról, *Matematikai Lapok*, 19. évf. (1968), 3—4. szám.
- [7] *Pávó*: Hálózatiüggvény meghatározása topológiai formulával digitális számológépen, *Híradástechnika*, XIX. évf. (1968), 11. szám.
- [8] *Pávó*: RLC hálózatok transzfer impedancia függvényének felírása digitális számológépen, *Mérés és Automatika*, XVII. évf. (1969), 4. szám.
- [9] *Seshu—Reed*: Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley, London, 1961.
- [10] *Tomovic*: Sensitivity Analysis of Dinamic Systems, McGraw-Hill, 1964.
- [11] *Géher—Roska*: Sensitivity Invariants in the Theory of Network Tolerances and Optimization, *Periodica Polytechnika*, vol. 16 (1971), No 2.