

# Megjegyzések a mesterséges holdak háromfrekvenciás Doppler-mérésének hibaelemzéséhez

ETO 621.396.962.33.018.46 : 629.783 : 881.3.06

Mint az már előző cikkünkben [1] is ismert, a kutatásban és a mesterséges holdak gyakorlati alkalmazásainál igen fontos szerepet játszó Doppler-frekvenciacsúszás a következő alakban írható fel [2]:

$$\Delta f = \Delta f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{f^i} \quad (1)$$

ahol  $\Delta f_0$  az  $f$  frekvenciával arányos tagokat tartalmazza, míg az  $A_i/f^i$  tagok alapvetően az ionoszférában való terjedés következtében jelentkeznek. A legpontosabb vizsgálatokban is elegendő, ha az  $i=1$  és  $i=3$  tagokat vesszük csak figyelembe [3]. Ekkor  $\Delta f$  a következő alakban írható fel:

$$\Delta f = \Delta f_0 + \frac{A_1}{f} + \frac{A_3}{f^3} = \Delta f_0 + a_1 + a_3. \quad (2)$$

A három ismeretlen meghatározásához három koherens, nem modulált jelet sugároz a mesterséges hold,  $f_1 < f_2 < f_3$  frekvenciákon. A mért  $\Delta f_1$ ,  $\Delta f_2$  és  $\Delta f_3$  frekvenciacsúszások alapján  $\Delta f_0$ ,  $a_1$  és  $a_3$  meghatározható. A meghatározásokra szolgáló egyenletrendszer, amelynek megoldásakor az idő csak kijelöli és sorba rendezi az összetartozó adatcsoportokat, a következő:

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \Delta f_0 + a_1 + a_3 \\ \Delta f_2 &= \frac{f_2}{f_1} \Delta f_0 + \frac{f_1}{f_2} a_1 + \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^3 a_3 \\ \Delta f_3 &= \frac{f_3}{f_1} \Delta f_0 + \frac{f_1}{f_3} a_1 + \left(\frac{f_1}{f_3}\right)^3 a_3 \end{aligned} \quad (3)$$

ahol a továbbiakban legyen  $f_2/f_1 = k_{21}$  és  $f_3/f_1 = k_{31}$ .

A továbbiakban a következő feladatot oldjuk meg: a) írjuk fel a  $\Delta f_0$ ,  $a_1$  és  $a_3$  meghatározására szolgáló programot. b) Vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett lesz minimális az egyes meghatározott mennyiségek hibája. A vizsgálati paraméterek: a frekvenciák aránya, az egyes  $\Delta f$ -ek hibáinak amplitúdója és amplitúdóaránya, az egyes  $\Delta f$ -ek hibáinak korrelációja.

A feladat a) része az adatfeldolgozásnál, b) a mérőrendszerek tervezésénél hasznosítható.

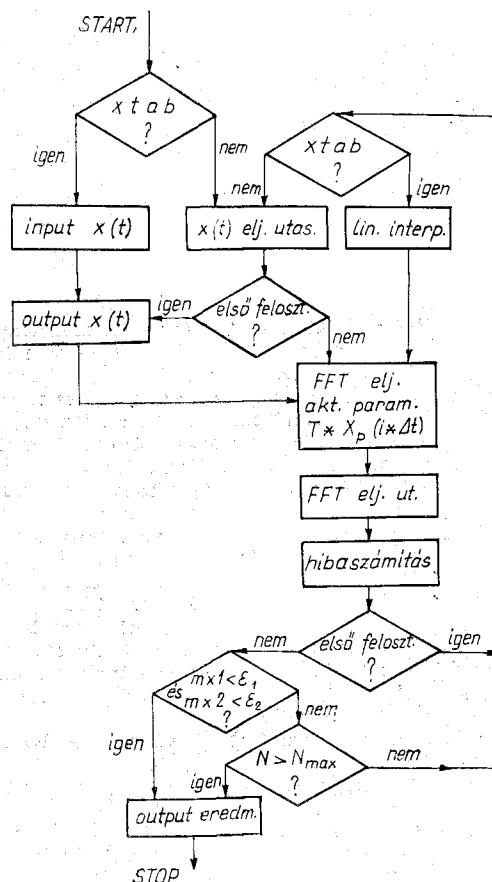
## A számítógépes programok ismertetése

A vizsgálat során a Budapesti Műszaki Egyetem Folyamatszabályozási Tanszékének ODRA 1013 és ODRA 1204 típusú számítógépeit használtuk [1].

## A Doppler korrekciós program blokkvázlata

A program  $\Delta f_0$ -t,  $a_1$ -et és  $a_3$ -at határozza meg, minden mérési időpillanatban, az ahhoz az időponthoz rendelt, mért  $\Delta f_1(t_i) = \Delta f_{1i}$ ,  $\Delta f_2(t_i) = \Delta f_{2i}$  és  $\Delta f_3(t_i) = \Delta f_{3i}$  felhasználásával a (3) egyenletrendszer alapján.

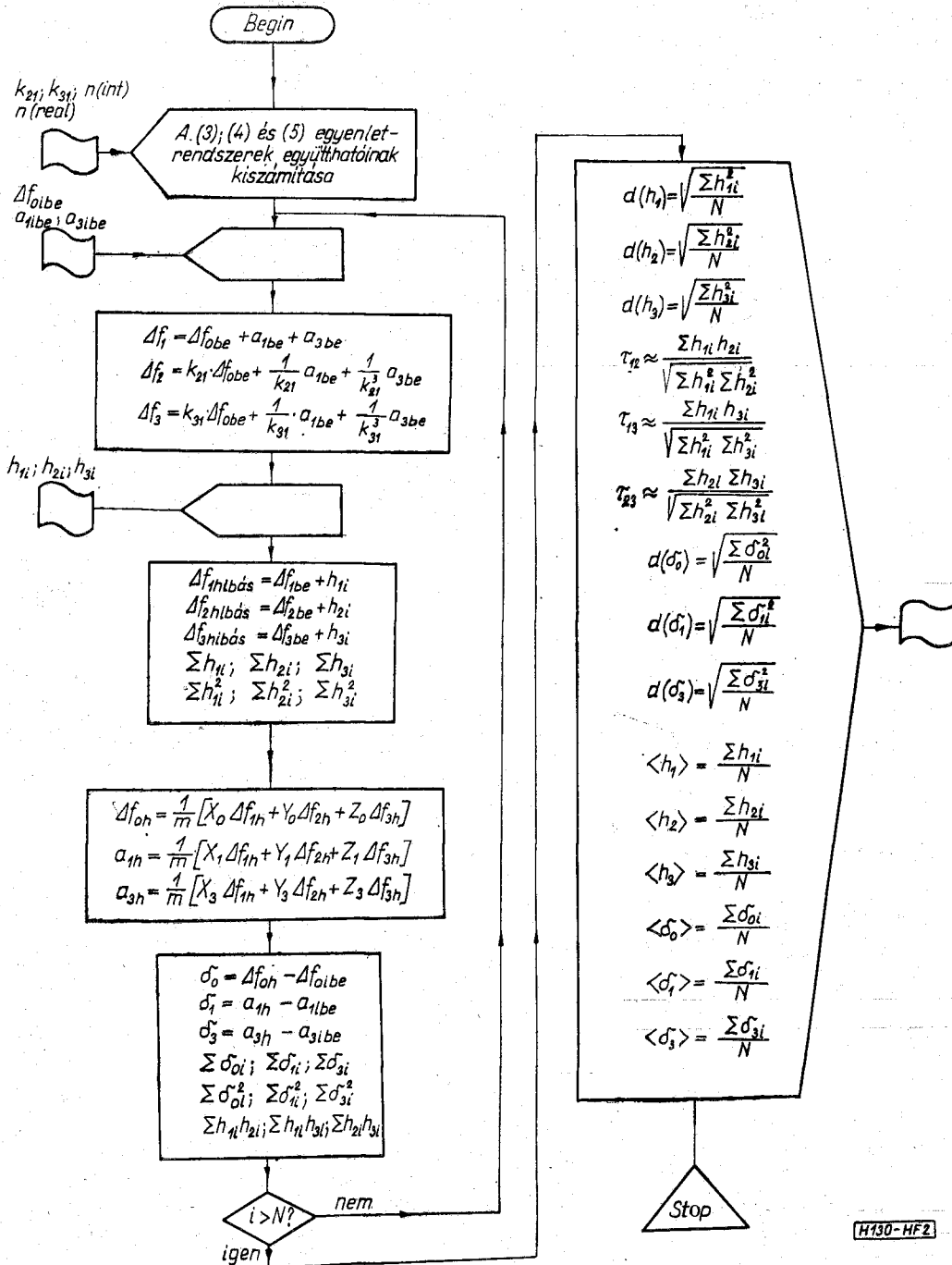
A program (1. ábra) futtatása, bemenő adatainak felvétele a kétfrekvenciás korrekciós programnál [1] használt módszerrel történt. A futtatások alapján azt mondhatjuk, hogy a program kifogástalanul, mindig hiba nélkül futott.



1. ábra. Korrekciós program

## A hibavizsgáló (szimulációs) program

A 2. ábrán látható program feladata, hogy valóságos mérési és  $\Delta f_0$ ,  $a_1$ ,  $a_3$  meghatározási folyamatokat utánozzon (szimuláljon), miközben a „mérés” jellemzőit változtatjuk. Ily módon vizsgálható, hogy milyen feltételek mellett lehet optimális eredményhibát kapni.



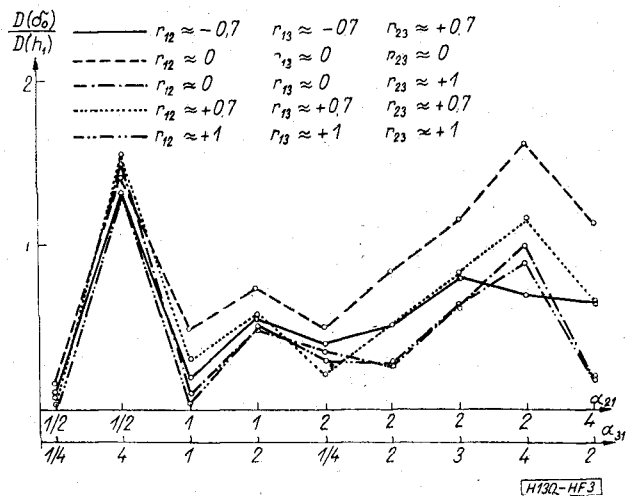
2. ábra. Szimulációs program

A program a bemenő adatként rendelkezésre álló  $\Delta f_0$ ,  $a_1$  és  $a_3$  sorozatból  $\Delta f_1(t)$ ,  $\Delta f_2(t)$  és  $\Delta f_3(t)$  görbékét számol a (3) egyenletrendszer együttműködésének meghatározása után. Ezután a kapott „Doppler-görbékhez” hozzákeveri a mérési hibát. Az így nyert „mérési eredményekből” a korrekciós program alapján számolja  $\Delta f_0$ -t,  $a_1$ -et és  $a_3$ -at, majd kiszámítja ezen eredmény hibáját.

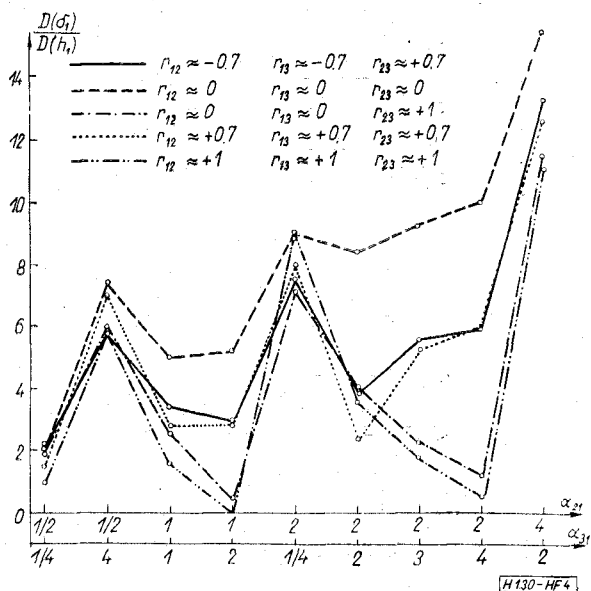
A hibasorozatokat, bemenő adatok előállítását a két-frekvenciás mérés vizsgálatánál [1] használt módon történik. A hibasorozatokat a páronkénti korrelációs tényezővel és a páronkénti amplitúdóarányal jel-

lemezük. Azt, hogy valamely korrelációs tényező és hiba-amplitúdóarány trió együttesen létezik-e, a szórás-négyzet mátrix segítségével döntjük el.

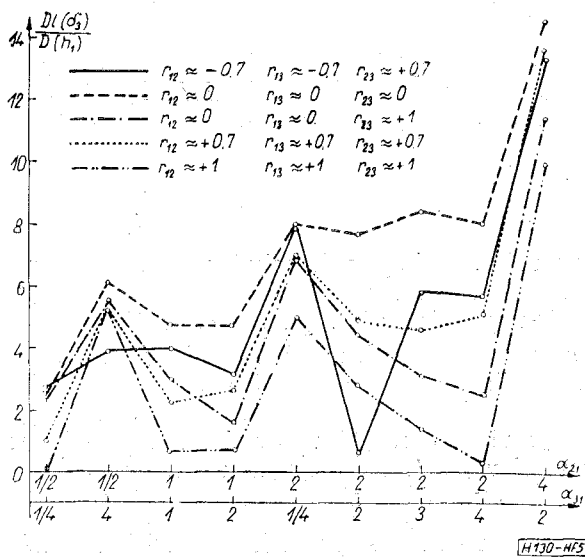
A program futtatása során különféle hibajellemzők mellett kapott eredményeket a 3., 4. és 5. ábrán láthatjuk. Ezen görbék segítségével a kívánatos, vagy jónak nevezhető mérési hiba jellemzők meghatározhatók. Tekintettel a mérési paraméterek lehetséges variációinak igen nagy számára, a bemutatott görbék csak jellegzetes mintaként kezelhetők, s konkrét alkalmazás esetén esetleg célszerű további számításokat is végezni.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

A vizsgált esetekben

$r_{12}$	$r_{13}$	$r_{23}$
-0,7	-0,7	+0,7
0	0	0
0	0	+1
+0,7	+0,7	+0,7
+1	+1	+1

A hibafüggvények analitikus vizsgálata

Az eredményhibák és keresett optimumaik meghatározása analitikus úton is megoldható. A feladat bonyolult, így legfeljebb ellenőrzésként vagy tájékozódó számításként érdemes alkalmazni.

A hibafüggvények felírása

Írjuk fel a (3) egyenlet alapján a hibákra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
 h_{1i} &= \delta_{0i} + \delta_{1i} + \delta_{3i} \\
 h_{2i} &= k_{21}\delta_{0i} + \frac{1}{k_{21}}\delta_{1i} + \frac{1}{k_{21}^3}\delta_{3i} \\
 h_{3i} &= k_{31}\delta_{0i} + \frac{1}{k_{31}}\delta_{1i} + \frac{1}{k_{31}^3}\delta_{3i}
 \end{aligned} \tag{4}$$

A (4) egyenletből kifejtethetjük a minimalizálni kívánt eredményhibákat, amelyek

$$\delta_{0i} = \frac{X_0 h_{1i} + Y_0 h_{2i} + Z_0 h_{3i}}{m} \tag{5a}$$

$$\delta_{1i} = \frac{X_1 h_{1i} + Y_1 h_{2i} + Z_1 h_{3i}}{m} \tag{5b}$$

$$\delta_{3i} = \frac{X_3 h_{1i} + Y_3 h_{2i} + Z_3 h_{3i}}{m} \tag{5c}$$

és végül, mivel sok esetben az  $(a_1 + a_3)$  teljes ionszfératag eredő hibáját kívánjuk vizsgálni  $(\delta_{1i} + \delta_{3i})$ -t, így

$$\delta_{1i} + \delta_{3i} = \frac{X_2 h_{1i} + Y_2 h_{2i} + Z_2 h_{3i}}{m} \tag{5d}$$

Az (5) összefüggésekben  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  és  $m$  kizárólag a vizsgálat szempontjából állandó paramétert jelentő  $f_1$ ,  $f_2$  és  $f_3$  mérési frekvenciák arányának a függvénye. Nevezetesen

$$\begin{aligned}
 X_0 &= \frac{1}{k_{31}^2} - \frac{1}{k_{21}^2}; & Y_0 &= k_{21} \left(1 - \frac{1}{k_{31}^2}\right); & Z_0 &= k_{31} \left(\frac{1}{k_{21}^2} - 1\right) \\
 X_1 &= \frac{k_{31}^2}{k_{21}^2} - \frac{k_{21}^2}{k_{31}^2}; & Y_1 &= k_{21} \left(\frac{1}{k_{31}^2} - k_{31}^2\right); & Z_1 &= k_{31} \left(k_{21}^2 - \frac{1}{k_{21}^2}\right) \\
 X_3 &= k_{21}^2 - k_{31}^2; & Y_3 &= k_{21}(k_{31}^2 - 1); & Z_3 &= k_{31}(1 - k_{21}^2) \\
 X_2 &= \frac{k_{31}^2}{k_{21}^2} - \frac{k_{21}^2}{k_{31}^2} + k_{21}^2 - k_{31}^2; & Y_2 &= k_{21} \left(\frac{1}{k_{31}^2} - 1\right); \\
 Z_2 &= k_{31} \left(1 - \frac{1}{k_{21}^2}\right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$m = \left(\frac{1}{k_{31}^2} - \frac{1}{k_{21}^2}\right) + k_{21}^2 \left(1 - \frac{1}{k_{31}^2}\right) + k_{31}^2 \left(\frac{1}{k_{21}^2} - 1\right)$$

Amint azt az előzőekben is mondtuk, feltételeztük, hogy  $f_1 < f_2 < f_3$ , azaz  $k_{31} > k_{21} > 1$ . Ilyen módon az együttthatók előjelmegoszlása, ami a későbbiekben, az optimalizálásnál használható,

$$\begin{array}{ccc} X_0 - & Y_0 + & Z_0 - \\ X_1 + & Y_1 - & Z_1 + \\ X_3 - & Y_3 + & Z_3 - \\ X_2 + & Y_2 - & Z_2 + \end{array}$$

*A hibafüggvények jellemzése*

A továbbiakban ennek alapján kezdjük el az eredményhibák vizsgálatát. Ehhez tekintsük át az egyes frekvenciákon végzett mérések hibái közti kapcsolatot. Az előző vizsgálatokhoz [1] hasonlóan itt is jogos a feltevés, hogy az átlagos hiba

$$\langle h_{1i} \rangle = \langle h_{2i} \rangle = \langle h_{3i} \rangle = 0 \quad (7)$$

Az  $\langle \rangle$  jel az átlag-képzést jelzi.

A hiba függvények leírására a szórás-négyzet mátrix alkalmas, amely (7)-et figyelembe véve:

$$\bar{D}^2(\bar{h}) = \begin{bmatrix} D^2(h_1) & M(h_1h_2) & M(h_1h_3) \\ M(h_1h_3) & D^2(h_2) & M(h_2h_3) \\ M(h_1h_3) & M(h_1h_3) & D^2(h_3) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ahol  $D^2(h_i) = h_i$  szórásnégyzete,  $M(h_ih_j)$  a hibapárok „vegyes” szorzatának várható értéke.

$\bar{D}^2(\bar{h})$  egyes tagjai, figyelembe véve a korrelációs tényező definícióját (9) és bevezetve a hibák amplitúdóarányát (10) jellemzőként, meghatározhatók.

$$r_{kl} = \frac{M(h_kh_l)}{\sqrt{M(h_k^2)M(h_l^2)}} = \frac{\sum_i h_{ki}h_{li}}{\sqrt{\sum_i h_{ki}^2 \cdot \sum_i h_{li}^2}} \quad (9)$$

$$d(\delta_n) = \frac{1}{|m|\sqrt{N}} \sqrt{\sum_i (X_n h_{1i} + Y_n h_{2i} + Z_n h_{3i})^2} = \frac{\sqrt{\sum_i h_{1i}^2}}{|m|\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2 \alpha_{21}^2 + Z_n^2 \alpha_{31}^2 + 2X_n Y_n r_{12} \alpha_{21} + 2X_n Z_n r_{13} \alpha_{31} + 2Y_n Z_n r_{23} \alpha_{21} \alpha_{31}}} \quad (14)$$

Keressük  $d(\delta_n)_{\min}$ -ot  $\alpha_{21}$  és  $\alpha_{31}$  mérési-hiba jellemzők függvényében. Ekkor meg kell oldani a

$$\frac{\partial [d(\delta_n)]}{\partial \alpha_{21}} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial [d(\delta_n)]}{\partial \alpha_{31}} = 0 \quad (15)$$

egyenleteket. Innen

$$\alpha_{21 \text{ opt}} = \frac{X_n}{Y_n} \frac{r_{13} r_{23} - r_{12}}{1 - r_{23}^2} \quad (16)$$

és

$$\alpha_{31 \text{ opt}} = \frac{X_n}{Z_n} \frac{r_{12} r_{23} - r_{13}}{1 - r_{23}^2}$$

Ugyanezt a számítást más hibaamplitúdó arányokra is elvégezhetjük, például

$$\alpha_{32 \text{ opt}} = \frac{Y_n}{Z_n} \frac{r_{13} r_{12} - r_{23}}{1 - r_{13}^2}$$

és

$$\alpha_{kl} = \sqrt{\frac{\sum_i h_{ki}^2}{\sum_i h_{li}^2}}; \quad (10)$$

Innen

$$\begin{aligned} M(h_1h_2) &= r_{12} \alpha_{21} M(h_1^2) \\ M(h_1h_3) &= r_{13} \alpha_{31} M(h_1^2) \\ M(h_2h_3) &= r_{23} \alpha_{21} \alpha_{31} M(h_1^2) \end{aligned} \quad (11)$$

és

$$M(h_1^2) = \frac{\sum_i h_{1i}^2}{N}$$

ahol  $N$  az egy-egy frekvencián végzett összes mérések, azaz az összes mérési pontok száma. Ennek alapján

$$\bar{D}^2(\bar{h}) = \frac{\sum_i h_{1i}^2}{N} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \alpha_{21} & r_{13} \alpha_{31} \\ r_{12} \alpha_{21} & \alpha_{21}^2 & r_{23} \alpha_{21} \alpha_{31} \\ r_{13} \alpha_{31} & r_{23} \alpha_{21} \alpha_{31} & \alpha_{31}^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Létező, lehetséges függvények esetén pedig  $D = |\bar{D}^2(\bar{h})| \geq 0$ , azaz

$$D = 1 - (r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2) + 2r_{12}r_{13}r_{23} \geq 0 \quad (13)$$

A (13) feltételnek teljesülnie kell minden valóságos esetben, tehát csak olyan optimum-pont valósítható meg, amelyre ez a független feltétel teljesül.

*A hibafüggvények optimumának keresése*

Az eredményhibák négyzetes átlagát  $d(\delta_n)$ -nel jelölve, ahol  $n=0, 1, 3$  és  $(1+3) \div 2$  lehet, általában azt írhatjuk, hogy

$$\alpha_{12 \text{ opt}} = \frac{Y_n}{X_n} \frac{r_{13} r_{23} - r_{12}}{1 - r_{13}^2} \quad (17)$$

és

Innen, figyelembe véve, hogy (13) alapján minden esetben teljesülnie kell a  $D \geq 0$  összefüggésnek, (16) esetén:

$$\left[ \frac{d(\delta_n)}{d(h_1)} \right]_{\text{opt}}^2 \cdot m^2 = \frac{X_n^2}{1 - r_{23}^2} \cdot D. \quad (18)$$

A (16) és (17) eredményeket (13)-mal összevetve azt mondhatjuk, hogy az optimális mérési feltétel létezik, ha teljesülnek az alábbi összefüggések. (16)-ból

$$\alpha_{32 \text{ opt}} = \frac{Y_n}{Z_n} \frac{r_{12} r_{23} - r_{13}}{r_{13} r_{23} - r_{12}} \quad (19)$$

és

$$\alpha_{12 \text{ opt}} = \frac{Y_n}{X_n} \frac{1 - r_{23}^2}{r_{13} r_{23} - r_{12}}$$

Összevetve (17)-tel

$$r_{23}D = r_{12}^2 \cdot r_{13}^2 \quad (20)$$

adódik. Figyelembe véve a (13) feltételt és azt, hogy

$$r_{12}^2 \geq 0 \quad \text{és} \quad r_{13}^2 \geq 0,$$

az optimális megoldás létezik, ha

$$D = \frac{r_{12}^2 r_{13}^2}{r_{23}} \geq 0$$

azaz

$$r_{23} \geq 0. \quad (21)$$

A vizsgálat során, mint tudjuk,  $h_1$ -re normalizáltunk. Más  $h_i$ -re való normalizálással másik  $r_{kl}$ -re lesz érvényes a (21) megkötés. Az optimalizálás céljától függően esetleg az összes

$$r_{kl} \geq 0 \quad (21a)$$

feltételt érvényesíteni kell.

### Speciális esetek

Mindenkor külön vizsgálatot igényei a nyert optimális megoldás, ha (16), illetve (17) nevezői nullával egyenlőek. Ezen vizsgálatra nézzünk egy példát,  $h_1$ -re normalizált optimum keresésnél.

A (15) optimalitási feltételt megadó egyenletek, ha  $r_{23} = +1$ , az alábbiak

$$Y_n \alpha_{21} + X_n r_{12} + Z_n \alpha_{31} = 0 \quad (22)$$

$$Y_n \alpha_{21} + X_n r_{13} + Z_n \alpha_{31} = 0$$

Innen az optimális megoldás

$$r_{12} = r_{13} \quad \text{és} \quad (23)$$

$$Y_n \alpha_{21 \text{ opt}} + Z_n \alpha_{31 \text{ opt}} = -X_n r_{12}.$$

Megvizsgálva a (13) feltételt, látható, hogy  $D=0$ , azaz az optimális mérési feltételek elvileg létezhetnek.

Ha  $r_{23} = -1$ , akkor hasonló módon kapjuk a szintén létező megoldást, ami

$$r_{12} = -r_{13} \quad \text{és} \quad (24)$$

$$Z_n \alpha_{31} - Y_n \alpha_{21} = X_n r_{12}.$$

Megvizsgálva e két esetben a tényleges hibát, azaz a (14) összefüggést, azt találjuk, hogy a (23) és (24) optimumok a legkisebb eredményhibát akkor biztosítják, ha

$$r_{12} = r_{13} = \pm 1, \quad \text{ha} \quad r_{23} = +1 \quad (25)$$

illetve

$$r_{12} = -r_{13} = \pm 1, \quad \text{ha} \quad r_{23} = -1. \quad (26)$$

A műszerbeállítások meghatározásánál figyelembe kell venni még azt, hogy  $\alpha_{jk} > 0$ , minden esetben.

Hasonló módon részletesen elemezni lehet a különféle  $r_{23} \neq \pm 1$  eseteket, s hogy ezek közül melyek realizálhatók.

### Összefoglalás

A nagy pontosságú mérőrendszerek optimális beállítása tehát a tényleges mérési és a szervesen kapcsolódó adatkezelési (adatfeldolgozási) folyamat együttes vizsgálatával határozható meg, s ilyen módon az eredményhiba az egyes mennyiségek fizikai mérési hibájánál kisebb lehet.

### I R O D A L O M

- [1] Dr. Ferencz Cs.—Heller M.: Megjegyzések a mesterséges holdak kétfrekvenciás Doppler-mérésének hibaelemzéséhez. Híradástechnika, XXII. évf. 7. sz. (194—200), 1971.
- [2] Mesterséges holdak Doppler-görbéinek geodéziai alkalmazása II. Összeállította a BME űrkutató csoport, MÉM—OFTH Könyvtár, Budapest, 1968.
- [3] D. Drahos, Cs. Ferencz, I. Ferencz, F. Horváth and Gy. Tarsai: Some Theoretical Contributions Concerning Doppler Geodetical Measurements. Space Research X., (43—53), North Holland Publ. Co., 1970.