DR. VÁGÓ ISTVÁN
egyetemi docens, a műszaki tudományok doktora
BME Elméleti Villamosságtan Tanszék

Tápvonalakból álló hálózat jellemző mátrixainak meghatározása

ETO 512.831:621.372.2.001.24

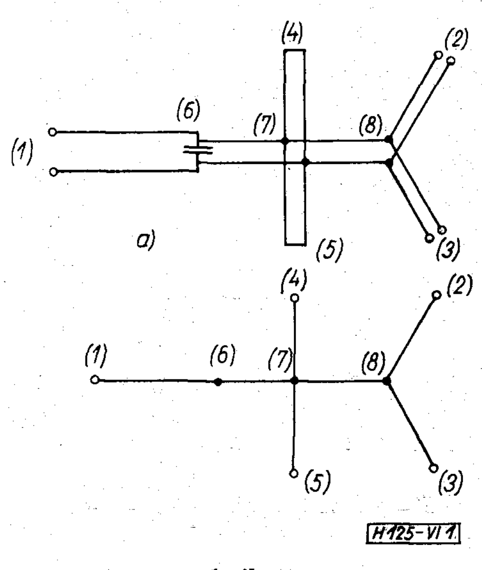
Az ultrarövidhullámú és a mikrohullámú technikában igen gyakran — pl. szűrők, elosztók, hibridek, illesztőelemek kivitelezésénél — alkalmaznak tápvonalakból felépített hálózatot. Távvezeték-hálózatok gráfelméleti úton történő számítására [1] mutat be módszert, ez elsősorban energiaelosztó hálózatokat tárgyal. Jelen cikkben az említett eljárás továbbfejlesztése, így a távvezeték hálózat **Y** admittancia-, **Z** impedancia- és **S** reflexió-mátrixának számítási módszere található. Ezen eredmények elsősorban híradástechnikai számításokban használhatók fel.

A távvezeték-hálózat gráfja

A vizsgált hálózat passzív távvezeték-szakaszokból áll. Az egyes szakaszok végei képezik a hálózat csatlakozási helyeit. Ezeken a helyeken csatlakozik a vizsgált hálózat más hálózatokhoz. Jelöljük számukat n-nel. Ennek megfelelően a vizsgált hálózat $n\times 2$-pólus (vagy n-kapu). A távvezeték-szakaszok végeit csúcsoknak nevezzük. Az egyes szakaszok tehát csúcsaikkal csatlakoznak egymáshoz, egy csúcshoz két csomópont tartozik. A számítást arra az esetre végezzük el, amelyben a csúcsokban a távvezeték szakaszokhoz impedanciák — pl. kapacitás, rövidzár, szakadás — kapcsolódhatnak. A csúcsok számát c-vel, a szakaszok számát k-val jelöljük.

A hálózathoz egy gráfot rendelünk. Egy távvezeték-szakasznak a gráf egy ága, a hálózat egy csúcsának a gráf egy csúcsa felel meg. Az 1*a* ábrán vázolt hálózathoz rendelt gráfot az 1*b* ábrán tüntettük fel.

Beérkezett: 1971. IX. 8.



1. ábra

A gráf ágait lássuk el tetszőleges irányítással és sorszámmal. A csúcsokat is sorszámmal jelöljük. Ehhez a csúcsokat három csoportba osztjuk. Az első csoportba tartoznak azok a csúcsok, amelyek egyben a hálózat csatlakozási helyei, ezek száma n. A második csoportba azok a csúcsok kerülnek, amelyek nem tartoznak az első csoportba és a lezárásuk nem rövidzár, vagyis a hozzájuk csatlakozó impedancia nem nulla. A harmadik csoportba kerülnek azok a csúcsok, amelyek lezárása rövidzár. A csúcsok sorszámozását a csoportbasorolás figyelembevételével végezzük: az 1, 2, ..., n sorszámot kapják az első csoportba tartozó csúcsok, az n+1, ... sorszámot a második csoportba tartozók, végül az ezt követő sorszámokat a harmadik csoport csúcsainak kell adni. Pl. az 1*a* ábrán feltüntetett hálózat 1*b* ábra szerinti gráfjának csúcsai közül az 1, 2, 3 sorszámúak az első, a 6, 7, 8 sorszámúak a második, végül a 4 és 5 a harmadik csoportba tartoznak.

A vizsgált hálózat gráfja végelemeket is tartalmaz. Az ilyen, végelemeket is tartalmazó gráf jellemzésére az A csúcsmátrix a legalkalmasabb. Ebben az egyes soroknak a csúcsok számozási sorrendjében egy-egy csúcs, az oszlopoknak pedig az ágak számozási sorrendjében egy-egy ág felel meg. A csúcsmátrix i-edik sorának j-edik eleme a_{ij}. Ha az i-edik csúcs a j-edik ághoz illeszkedik, akkor $a_{ij}=1$, ha nem illeszkedik, akkor $a_{ij}=0$. Az egyes oszlopokban két elem értéke 1, a többi 0 annak megfelelően, hogy minden egyes ág két csúcshoz illeszkedik.

A hálózat egyenleteinek felírásához az egyes ágakat irányítással láttuk el. Az irányított gráf jellemzésére alkalmazható az A_i irányított csúcsmátrix. Ennek elemei: 1, -1, ill. 0. Mégpedig $a_{ij}=1$, ha az i-edik csúcs a j-edik ághoz illeszkedik és a j-edik ág irányítása az i-edik csúcstól elmutat, $a_{ij}=-1$, ha az i-edik csúcs és a j-edik ág illeszkedik és a j-edik ág irányítása az i-edik csúcs felé mutat, $a_{ij}=0$, ha az i-edik csúcshoz a j-edik ág nem illeszkedik. Az egyes oszlopokban egy elem 1, egy -1, a többi pedig 0.

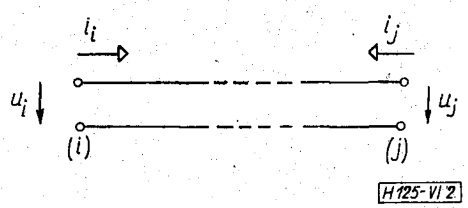
A továbbiakban szükség lesz az $\frac{1}{2}(A+A_i)$, valamint az $\frac{1}{2}(A-A_i)$ mátrixra is. Az $\frac{1}{2}(A+A_i)$ mátrixban $a_{ij}=1$, ha a j-edik ág az i-edik csúcshoz illeszkedik és attól elmutat, egyébként 0. Az $\frac{1}{2}(A-A_i)$ mátrixban $a_{ij}=1$, ha a j-edik ág az i-edik csúcshoz illeszkedik és az i-edik csúcs felé mutat, egyébként 0. Ez utóbbi két mátrix minden oszlopában egy elem 1, a többi 0.

A hálózat elemeinek jellemzése

Feladatunkban a gráf ágai kétpóluspároknak felelnek meg eltérően a hálózatok ismert gráfelméleti számítási módszerétől [3]. Az ilyen ág jellemzésére két feszültség (u_i,-u_j) és két áram (i_i, i_j) kapcsolatát kell megadni (2. ábra). Figyelembe véve, hogy az m-edik ág irányítása az i-edik csúcstól a j-edik felé mutat:

$$\begin{bmatrix} i_i \\ i_j \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_m \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_m & q_m \\ r_m & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Nem reciprok távvezeték-szakasz $\mathbf{Y}_m$ mátrixát a nem reciprocitás figyelembevételével kell meghatározni. Amennyiben az m-edik távvezeték-szakasz



2. ábra

szimmetrikus reciprok kétpóluspár, úgy a távvezeték-szakasz $\mathbf{Y}_{0m}$ hullámadmittanciájának, γ_m terjedési együtthatójának és l_m hosszának ismeretében $\mathbf{Y}_m$ a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{Y}_m = \mathbf{Y}_{0m} \begin{bmatrix} \operatorname{cth} \gamma_m l_m & -\dfrac{1}{\operatorname{sh} \gamma_m l_m} \\ -\dfrac{1}{\operatorname{sh} \gamma_m l_m} & \operatorname{cth} \gamma_m l_m \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Ekkor tehát:

$$\begin{aligned} p_m = t_m &= \mathbf{Y}_{0m} \operatorname{cth} \gamma_m l_m \\ q_m = r_m &= -\mathbf{Y}_{0m}/\operatorname{sh} \gamma_m l_m . \end{aligned} \qquad (3)$$

Alkossunk az egyes ágakat jellemző p_m, q_m, r_m, t_m értékekből egy-egy diagonál mátrixot:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= < p_1 \;\; p_2 \; \dots \; p_k > \\ \mathbf{Q} &= < q_1 \;\; q_2 \; \dots \; q_k > \\ \mathbf{R} &= < r_1 \;\; r_2 \; \dots \; r_k > \\ \mathbf{T} &= < t_1 \;\; t_2 \; \dots \; t_k >. \end{aligned} \qquad (4)$$

A továbbiakban a hálózat távvezeték-szakaszainak jellemzésére a **P, Q, R, T** mátrixot használjuk fel. Szimmetrikus reciprok hálózat esetén $\mathbf{P}=\mathbf{T}$ és $\mathbf{Q}=\mathbf{R}$.

A csúcsokhoz csatlakozó Z_{bi} impedanciák értékeiből a csúcsok számozási sorrendjében alkossunk egy diagonál mátrixot:

$$\mathbf{Z}_b = < Z_{b1} \; Z_{b2} \dots Z_{bc} >. \qquad (5)$$

Particionáljuk $\mathbf{Z}_b$-t úgy, hogy az egy csoportba tartozó csúcsoknak megfelelő $\mathbf{Z}_{bi}$ értékek képezzenek egy blokkot:

$$\mathbf{Z}_b = < \mathbf{Z}_{b1} \; \mathbf{Z}_{b2} \; \mathbf{Z}_{b3} >. \qquad (6)$$

$\mathbf{Z}_{b1}$-ben a főátló valamennyi eleme ∞, $\mathbf{Z}_{b2}$ főátlójának elemei ∞ vagy zérustól különböző véges értékűek, $\mathbf{Z}_{b3}$ valamennyi eleme 0.

Szükségünk lesz a $\mathbf{Z}_b$ mátrix reriprokára is ennek particionált alakja:

$$\mathbf{Y}_b = \mathbf{Z}_b^{-1} = < \mathbf{Y}_{b1} \; \mathbf{Y}_{b2} \; \mathbf{Y}_{b3} >. \qquad (7)$$

Itt $\mathbf{Y}_{b1}$ valamennyi eleme zérus, $\mathbf{Y}_{b2}$ főátlóban levő elemei véges értékűek, $\mathbf{Y}_{b3}$ főátlójának valamennyi eleme ∞.

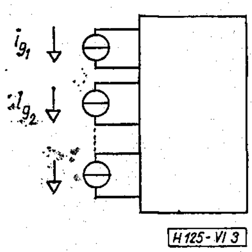
Áramköri egyenletek

A következőkben a vizsgált hálózat minden egyes csatlakozási helyére ismert forrásáramú áramgenerátorokat kapcsolunk (3. ábra), és felírjuk a hálózatra vonatkozó Kirchhoff-egyenleteket.

Az áramköri egyenleteket a következőkben úgy írjuk fel, hogy a feszültségegyenletek automatikusan teljesüljenek és így csak a c számú független csomóponti egyenlet felírása szükséges. Az egyenletekben a csúcsok feszültsége az ismeretlen. Ezek száma is c, tehát a csomóponti egyenletekből a csúcsok feszültsége meghatározható.

A csúcsok feszültségéből meghatározhatók a távvezeték-szakaszok végén folyó áramok, továbbá a csúcsokban levő impedanciák árama is.

Valamelyik csúcs egyik csomópontjából kifolyó vagy a csomópontba befolyó áramokat három csoport összegeként írjuk fel. Az első csoportba tartoznak azok az áramok, amelyek vonatkozási iránya a megfelelő ág irányításával megegyezik. A másodikba



3. ábra

tartoznak azok, amelyeknek vonatkozási iránya a megfelelő ág irányával ellentétes. Végül a harmadik csoportban szerepelnek a csúcs két csomópontja közötti generátoron, ill. impedancián átfolyó áramok.

A három csoport áramainak ismeretében a csomóponti egyenletet a hálózat valamennyi csúcsának egyik csomópontjára felírjuk.

Ha az m-edik ág az i-edik és a j-edik csúcshoz illeszkedik és irányítása az i-ediktől a j-edik felé mutat, akkor az ág első csoportba tartozó árama:

$$i_{mi} = p_m u_i + q_m u_j . \qquad (8)$$

Hasonló egyenletet írhatunk fel valamennyi ágra. Az így nyert egyenletrendszer a következő mátrixegyenletben foglalható össze:

$$\boldsymbol{I}' = \frac{1}{2}\,\mathbf{P}(\mathrm{A}+\mathrm{A}_i)^* \boldsymbol{U} + \frac{1}{2}\,\mathbf{Q}(\mathrm{A}-\mathrm{A}_i)^* \boldsymbol{U} \qquad (9)$$

(*-gal a mátrix transzponáltját jelöljük).

Az m-edik ágra a második csoportba tartozó áram:

$$i_{mj} = r_m u_i + t_m u_j. \quad (10)$$

Ilyen egyenletet valamennyi ágra felírhatunk. Ez az egyenletrendszer a következő:

$$\boldsymbol{I}'' = \frac{1}{2}\,\mathbf{R}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)^*\boldsymbol{U} + \frac{1}{2}\,\mathbf{T}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)^*\boldsymbol{U}. \quad (11)$$

A csúcsokban folyó áramot két áram összegeként írjuk fel. Az egyik az áramgenerátorok árama, a másik a passzív elemeken folyó áram. Így az i-edik csúcs árama:

$$i_{ci} = i_{gi} - Y_{bi} u_i, \quad (12)$$

ahol i_{gi} az i-edik csúcs áramgenerátorának forrásárama, u_i pedig az i-edik csúcs csomópontjai közötti feszültség. Ha a csúcsokhoz generátor nem csatlakozik, akkor $i_{gi}=0$ és $i_{ci} = -Y_{bi}u_i$. A csatlakozási helyeken $Y_{bi}=0$ és így $i_{ci}=i_{gi}$. Valamennyi csúcsra felírva a (12) egyenletet ezek az

$$\boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{I}_g - \mathbf{Y}_b \boldsymbol{U} \quad (13)$$

mátrixegyenletben foglalhatók össze, ahol $\boldsymbol{I}_g$ a csúcsokban levő áramgenerátorok forrásáramából, $\boldsymbol{U}$ pedig a csúcsok feszültségéből alkotott oszlopvektor. $\boldsymbol{I}_g$ particionálható a csúcsok három csoportjának megfelelően:

$$\boldsymbol{I}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{g1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Az áramoknak ki kell elégíteniök a csomóponti egyenletet. A csúcsok egyik csomópontjából elfolynak az $\boldsymbol{I}'$-ben felírt áramok. Képezzük ezekből az egyes csúcsokhoz tartozók összegét és jelöljük az ezekből alkotott oszlopmátrixot $\boldsymbol{I}_c'$-vel:

$$\boldsymbol{I}_c' = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)\boldsymbol{I}'. \quad (15)$$

Az $\boldsymbol{I}''$-t alkotó ágáramok a csúcsok egyik csomópontjából kifolynak. Az egy csúcsból elfolyó áramok összegéből képezzük az $\boldsymbol{I}_c''$ oszlopmátrixot:

$$\boldsymbol{I}_c'' = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)\boldsymbol{I}''. \quad (16)$$

Az $\boldsymbol{I}_c$-ben szereplő áramok a csúcs azon csomópontja felé folynak, amelyből $\boldsymbol{I}_c'$ és $\boldsymbol{I}_c''$ megfelelő árama kifolyik. Így a csomóponti törvény mátrixos alakja (13), (15), (16), továbbá (9) és (11) felhasználásával:

$$\boldsymbol{I}_c' + \boldsymbol{I}_c'' - \boldsymbol{I}_c = \frac{1}{4}\{(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)[\mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)^* + \mathbf{Q}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)^*] +$$

$$+ (\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)[\mathbf{R}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)^* + \mathbf{T}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)^*]\}\boldsymbol{U} + \mathbf{Y}_b\boldsymbol{U} - \boldsymbol{I}_g = \boldsymbol{0}. \quad (17)$$

Vezessük be az

$$\mathbf{Y}_c = \frac{1}{4}\{(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)[\mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)^* + \mathbf{Q}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)^*] +$$

$$+ (\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)[\mathbf{R}(\mathbf{A}+\mathbf{A}_i)^* + \mathbf{T}(\mathbf{A}-\mathbf{A}_i)^*]\} \quad (18)$$

jelölést. Ezzel (17)-ből:

$$(\mathbf{Y}_c + \mathbf{Y}_b)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_g. \quad (19)$$

Megjegyezzük, hogy ha a hálózat valamennyi távvezeték-szakasza reciprok és szimmetrikus, akkor $\mathbf{P}=\mathbf{T}$, $\mathbf{Q}=\mathbf{R}$ és így:

$$\mathbf{Y}_c = \frac{1}{2}\,\mathbf{A}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\mathbf{A}^* + \frac{1}{2}\,\mathbf{A}_i(\mathbf{P}-\mathbf{Q})\mathbf{A}_i^*. \quad (20)$$

Particionáljuk a (19) egyenletet a csúcsok csoportosítása szerint:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} \\ \mathbf{Y}_{31} & \mathbf{Y}_{32} & \mathbf{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{U}_2 \\ \boldsymbol{U}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}\boldsymbol{U}_1 \\ \mathbf{Y}_{b2}\boldsymbol{U}_2 \\ \mathbf{Y}_{b3}\boldsymbol{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{g1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

ahol

$$\boldsymbol{U}_3 = \boldsymbol{0} \quad (22)$$

a rövidzárak miatt. Így (21)-ből:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22}+\mathbf{Y}_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_t \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{g1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad (23)$$

A hálózatot jellemző mátrixok meghatározása

A (23) egyenletből:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_t^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{g1} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Particionáljuk $\mathbf{Y}_t^{-1}$-et:

$$\mathbf{Y}_t^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Így

$$\boldsymbol{U}_1 = \mathbf{Z}_{11}\boldsymbol{I}_{g1}, \quad (26)$$

ahol $\mathbf{Z}_{11}$ a hálózat impedancia-mátrixa:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{11}. \quad (27)$$

Ennek reciproka az admittancia-mátrix:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}_{11}^{-1}. \quad (28)$$

A hálózat reflexiós mátrixának meghatározásához definiáljuk a csatlakozási helyekhez illeszkedő ágak hullámadmittanciájából képezhető diagonál-mátrixot:

$$\mathbf{Y}_0 = \langle Y_{01}\ Y_{02}\ \dots\ Y_{0n} \rangle. \quad (29)$$

A hullámadmittanciák sorszáma azon csúcs sorszámával egyezik meg, amelyhez az ág illeszkedik. Amennyiben egy csúcshoz kettő vagy több ág csatlakozik, az ágak hullámadmittanciájának összege kerül a fenti mátrixban a csúcsnak megfelelő helyre.

Bontsuk fel az $\boldsymbol{U}_1$ és $\boldsymbol{I}_1 = \mathbf{Y}\boldsymbol{U}_1$ oszlopvektort egy beeső és egy visszavert hullámot leíró oszlopvektor összegére:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_1 &= \boldsymbol{U}^{(+)} + \boldsymbol{U}^{(-)} \\ \boldsymbol{I}_1 &= \boldsymbol{I}^{(+)} + \boldsymbol{I}^{(-)}, \end{aligned} \quad (30)$$

ahol

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}^{(+)} &= \mathbf{Y}_0\boldsymbol{U}^{(+)} \\ \boldsymbol{I}^{(-)} &= -\mathbf{Y}_0\boldsymbol{U}^{(-)}, \end{aligned} \quad (31)$$

vagyis

$$\boldsymbol{I}_1 = \mathbf{Y}_0(\boldsymbol{U}^{(+)} - \boldsymbol{U}^{(-)}) = \mathbf{Y}(\boldsymbol{U}^{(+)} + \boldsymbol{U}^{(-)}), \tag{32}$$

amiből

$$(\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y})\boldsymbol{U}^{(+)} = (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y})\boldsymbol{U}^{(-)} \tag{33}$$

és így

$$\boldsymbol{U}^{(-)} = (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y})\boldsymbol{U}^{(+)}. \tag{34}$$

Az **S** reflexiós mátrix definícióját az

$$\boldsymbol{U}^{(-)} = \mathbf{S}\boldsymbol{U}^{(+)} \tag{35}$$

egyenlet adja, vagyis (34)-gyel összevetve:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}) = (\mathbf{Z}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{E})^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{Y}_0 - \mathbf{E}) \tag{36}$$

a reflexió-mátrix.

IRODALOM

[1] *Vágó I.:* A gráfelmélet alkalmazása távvezeték-hálózatok számítására. Elektrotechnika, 62. 1969. No. 6. pp. 197—203.
[2] *Carlin, H. J.:* The scattering matrix in network theory. IRE Transaction on Circuit Theory, 1956. pp. 88—96.
[3] *Seshu S., Reed M.:* Linear graphs and elektrical networks, Addison-Wersley 1961.