SZEPESI TAMÁS
BME Műszer- és Méréstechnika Tanszék
GUTTERMUTH MIKLÓS
Telefongyár Műszerfejlesztés

Lineáris aktív hálózatok topológiai analízise

ETO: 513.83:621.372.57

A lineáris hálózatokat leíró csomóponti, illetve hurok egyenletek mátrixai és a hálózat topológiája között kölcsönös és egyértelmű kapcsolat áll fenn. A hálózat különböző paramétereinek számítása e mátrix-egyenletekben szereplő mátrixok megfelelő aldeterminánsainak kifejtésével történik. Bonyolult hálózatok esetén a nagyméretű determinánsok miatt ez a számítás igen hosszadalmas. A topológiai formulák segítségével lehetővé válik e determinánsok kiszámítása felírásuk, illetve kifejtésük nélkül. A passzív hálózatokra vonatkozó topológiai formulák a múlt század végéről, Kirchofftól és Maxwelltől származnak. Ezeket az összefüggéseket azonban aktív hálózatokra csak az elmúlt 15 évben kezdték általánosítani. Az aktív hálózatokra vonatkozó topológiai formulák akkor a legszemléletesebbek, ha a bennük levő aktív elemeket nulloros helyettesítőképpel modellezzük. Ilyen hálózatokra vonatkozó topológiai módszert 5 éve publikálták először [3].

1. A felhasznált jelölések a következők

$\boldsymbol{A}_I$:	indefinit incidencia mátrix
$\boldsymbol{A}$:	redukált incidencia mátrix
$\boldsymbol{B}$:	hurok mátrix
T:	gráf fája
$T_{k/i,j-l,m}$:	gráf k-fája melyben az i, j csomópontok valamint az l, m csomópontok külön részben vannak.
U:	ágfeszültségek oszlop vektora
U_n:	csomóponti feszültségek oszlopvektora
E_g:	az egyes ágakban levő feszültség generátorok oszlopvektora
I:	ágáramok oszlopvektora
I_g:	az egyes csomópontok és a referencia csomópont közti áramgenerátorok oszlopvektora
I_h	hurokáramok oszlopvektora
$\boldsymbol{Y}$:	ágadmittancia mátrix (diagonál)
$\boldsymbol{Y}^+$:	csomóponti admittancia mátrix
$\boldsymbol{Z}$:	ágimpedancia mátrix (diagonál)
D:	hálózatdetermináns
$\mathrm{D}_{i,j}$:	az i és j csomópont közötti csatolásdetermináns
$\boldsymbol{M}'$:	$\boldsymbol{M}$ mátrix transzponáltja
n:	a hálózat csomópontjainak száma
N:	a hálózatban levő nullorok száma
a:	a hálózat ágainak száma
r:	referencia csomópont

2. A passzív hálózatokra vonatkozó topológiai tételek összefoglalása

Az alapvető topológiai, illetve gráfelméleti ismereteket feltételezzük, ezek bármely a témával foglalkozó könyv bevezető részében megtalálhatók [12, 2]. Mindössze $\boldsymbol{A}$ két, számunkra legfontosabb tulajdonságára emlékeztetünk.

a) $\boldsymbol{A}$ bármely nemszinguláris $(n-1)$-ed rendű aldeterminánsa mindig megfelel a gráf egy fájának, a kapcsolat kölcsönös és egyértelmű. A gráf egy fájához tartozó szubgráf determinánsának értéke csak ± 1 lehet.

b) det $\boldsymbol{AA}'$ = a gráf fáinak számával.

A két tétel bizonyítása közismert. Ugyancsak közismert a csomóponti, illetve a hurok egyenletek származtatása, de a teljesség kedvéért végigvezetjük a gondolatmenetet a csomóponti egyenletekre. Kiindulva Kirchoff I. törvényéből, a csomóponti transzformációból, és az Ohm-törvényből:

$$\boldsymbol{A}\mathrm{I}=\mathrm{I}_g \qquad \mathrm{U}=\boldsymbol{A}'\mathrm{U}_n \qquad \mathrm{U}=\boldsymbol{Z}\mathrm{I}+\mathrm{E}_g.$$

Kifejezve I-t, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}^{-1}$ felhasználásával $\mathrm{I}=\boldsymbol{Y}\mathrm{U}-\boldsymbol{Y}\mathrm{E}_g$, ezt behelyettesítve, és átrendezve kapjuk a csomóponti mátrixegyenletet:

$$(\boldsymbol{AYA}')\mathrm{U}_n=\mathrm{I}_g+\boldsymbol{AY}\mathrm{E}_g. \qquad (1)$$

Hasonló gondolatmenettel felírható a hurokmátrix egyenlet:

$$(\boldsymbol{BZB}')\mathrm{I}_h=-\boldsymbol{B}\mathrm{E}_g+\boldsymbol{BZ}\mathrm{I}_g.$$

Mind a két egyenletrendszer egyértelműen jellemzi a hálózatot, de a hurokegyenlet-rendszer alkalmazása nem planár gráfokra problematikus, ezért a továbbiakban a csomóponti mátrixegyenletet fogjuk használni. Az egyszerűbb tárgyalásmód kedvéért tegyük fel, hogy a hálózat nem tartalmaz feszültséggenerátort, ekkor (1) a következő alakú:

$$(\boldsymbol{AYA}')\mathrm{U}_n=\mathrm{I}_g. \qquad (2)$$

Tételezzük fel továbbá, hogy a hálózat 3-pólus, tehát rendelkezik referencia csomóponttal — mint látni fogjuk az 5. részben ez nem jelent megszorítást, mert a nullorok bevezetésével a különbség 3 és 4-pólusok között automatikusan megszűnik —, vala-

Beérkezett: 1971. XI. 15.

mint korlátozzuk a tárgyalást első közelítésben a hálózat z-paramétereinek számítására (az 5. részben az univerzális paraméterek bevezetésével ez a megszorítás is megszűnik).

Feladatunk tehát z_{ij} paraméter kiszámítása, $z_{ij}= =U_i/I_{gj}, I_{gl/l\neq i}=0$. Mind a feszültség, mind az áram a referencia csomóponthoz értendő. Z_{ij}(2)-ből Cramer-szabállyal számítható: $z_{ij}=D_{ij}/D$. D_{ij} det $(\boldsymbol{AYA'})$-ből az i. oszlop és j. sor törlésével állítható elő, jelölése det $(\boldsymbol{AYA'})^{-i}_{-j}$. $D=$ det $(\boldsymbol{AYA'})$ ahol a bemenet és kimenet szakadással van lezárva. Látható tehát, hogy a feladat $(\boldsymbol{AYA'})$ és $(\boldsymbol{AYA'})^{-i}_{-j}$ mátrix szorzatok determinánsának kiszámítása, anélkül, hogy kifejtenénk őket. $(\boldsymbol{AYA'})$-t továbbiakban $\boldsymbol{Y}^+$-al jelöljük. Belátható, hogy reciprok hálózatokra $\boldsymbol{Y}^+$ a három mátrix összeszorzása nélkül azonnal felírható: diagonál elemei az egyes csomópontokba befutó admittanciák összegei pozitív előjellel, míg a nem diagonális elemek a sor és oszlop indexeknek megfelelő két csomópont között elhelyezkedő admittanciák összegei, negatív előjellel. A lineáris hálózatokra vonatkozó összes topológiai tétel a Binet—Cauchy-tételen alapszik, mely a következőt mondja ki: egy $k\times l$ méretű és egy $l\times k$ méretű mátrix szorzatának $k\times k$ méretű determinánsa egyenlő a két mátrix megfelelő helyen levő $k\times k$ méretű aldeterminánsai szorzatának összegével ($k\leq l$). A tétel bizonyítása sok helyen pl. [13]-ban is megtalálható.

A tételben szereplő feltételt $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A'}$ definíciószerűen teljesíti, de $\boldsymbol{AY}$ és $\boldsymbol{A'}$ is, hiszen $\boldsymbol{A}$ az $\boldsymbol{AY}$-tól csak szorzótényezőkben különbözik, struktúrában nem. Képezve $\boldsymbol{AY}$ minden (n−1)-ed rendű szubmátrixát, ezek determinánsai közül csak azok nem zérus értékűek, amelyek megfelelnek egy fának. Nyilván a szubmátrix minden egyes oszlopa meg van szorozva a neki megfelelő ág admittanciájával — hiszen $\boldsymbol{Y}$ diagonál mátrix, — azaz a fáknak megfelelő szubdeterminánsok értéke (az összes y_i-t kiemelve) ± 1. y_i, ahol y_i a fában szereplő i. ág admittanciája. Mivel $\boldsymbol{A'A}$ transzponáltja, nyilván azonos aldeterminánsok lesznek zérus, $+1$, ill. -1 értékűek. Tehát $(\boldsymbol{AYA'})$-ban csak pozitív előjelű tagok szerepelnek. Ez minden szimmetrikus $\boldsymbol{Y}^+$ mátrix-szal rendelkező, azaz minden reciprok három pólusra érvényes. Ahálózat determináns tehát $D=\sum_{f=1}^{F}\prod_{i=1}^{n-1} y_{fi}$, vagy más jelöléssel $D=\sum_{f=1}^{F} yT_f$, ahol a hálózatnak megfelelő gráf összes fáinak száma. A D_{ij} csatolás-determináns számítása bonyolultabb, mert a neki megfelelő $(\boldsymbol{AYA'})^{-i}_{-j}= =(\boldsymbol{A}_{-i}\boldsymbol{YA'}^{-j})$ mátrix nem szimmetrikus. Megvizsgálva először $(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y})$-t ez $(n-2)\times a$ méretű mátrix. Az i. oszlop törlésének $U_i=0$ felel meg, azaz az i. csomópontot az r-el összekötöttük. $\boldsymbol{A}_{-i}\boldsymbol{Y}$ nem szinguláris $(n-2)$-ed rendű aldeterminánsainak ennek a módosított gráfnak az $n-2$ elemű fái felelnek meg. Ugyanakkor $\boldsymbol{A}^{-j}$ nem szinguláris aldeterminánsainak természetesen olyan módosított gráf fái felelnek meg, amely az eredeti gráfból az i. és az r csomópontok rövidrezárásával jön létre. Az $(\boldsymbol{AYA'})^{-i}_{-j}$-ben természetesen csak azok a fák (ill. a nekik megfelelő determinánsok) fognak szerepelni, amelyek közösek mind a két módosított gráfban. A módszer tehát: először az i, majd a j. csomópontot az r-el összekötve, az így módosult gráfok összes $n-2$ elemű fáit kikeressük. Amely fák mind a két gráfban szerepelnek, azok ág-admittancia szorzatainak összege adja D_{ij}-t. A közös fák előjelei reciprok hárompólusok esetén csak pozitívak lehetnek. Két-póluspárok esetén negatív előjelű szorzat is szerepelhet, az előjel megállapítását a 4. részben tárgyaljuk.

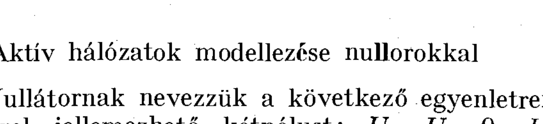
Az egységes tárgyalásmód, és az eredmény egyszerűbb megfogalmazása érdekében definiáljuk a k-fák fogalmát: egy gráf $T_{k/\acute{a},b,c-d,e,f}$ k-fáján olyan fát értünk amely n csomópont esetén $n-k$ ágat tartalmaz, (ebből következik, hogy a fa k db nem összefüggő szubgráfból áll) és a vesszővel elválasztott csomópontok külön részben helyezkednek el.

Definiáljuk az m-ed rendű k-fát ($m\leq k$) a következőképpen: $T^m_{k/a,b-c,d\ldots}$ m-ed rendű k-fán olyan k-fán olyan k-fát értünk, melyben az indexben kiemelt, külön részben levő csomópontok közül tetszőleges m számút összekötve $(k-m)$-fát kapunk. Visszatérve D_{ij}-ben szereplő közös fákra, ezek az eredeti gráfnak olyan fái, melyek $n-2$ ágat tartalmaznak, és akkor is fák maradnak, ha az i, vagy j. csomópontot az r-el rövidre zárjuk. Az r-ed rendű k-fa definícióját figyelembe véve az előzőkben definiált közös fák az eredeti gráf olyan első rendű 2-fái, melyekben az i és j csomópontok és az r csomópont külön részben szerepelnek. Azaz $D_{ij}= =\sum_{f=1}^{F} yT^1_{j2/ij,r}$. A passzív hálózatokról most áttérünk az aktív hálózatok analízisére.

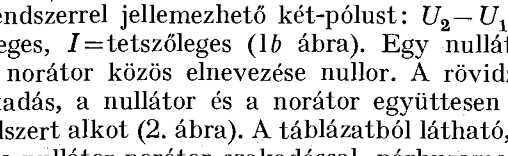
3. Aktív hálózatok modellezése nullorokkal

Nullátornak nevezzük a következő egyenletrendszerrel jellemezhető kétpólust: $U_2-U_1=0$, $I=0$ (1a ábra). Norátornak nevezzük a következő egyenletrendszerrel jellemezhető két-pólust: $U_2-U_1=$tetszőleges, $I=$tetszőleges (1b ábra). Egy nullátor és egy norátor közös elnevezése nullor. A rövidzár, a szakadás, a nullátor és a norátor együttesen teljes rendszert alkot (2. ábra). A táblázatból látható, hogy soros nullátor-norátor szakadással, párhuzamos nullátor-norátor rövidzárral ekvivalens. A nullátor és a norátor önduális elemek. Minden aktív elem modellezhető nullorok és passzív elemek segítségével [5, 8].

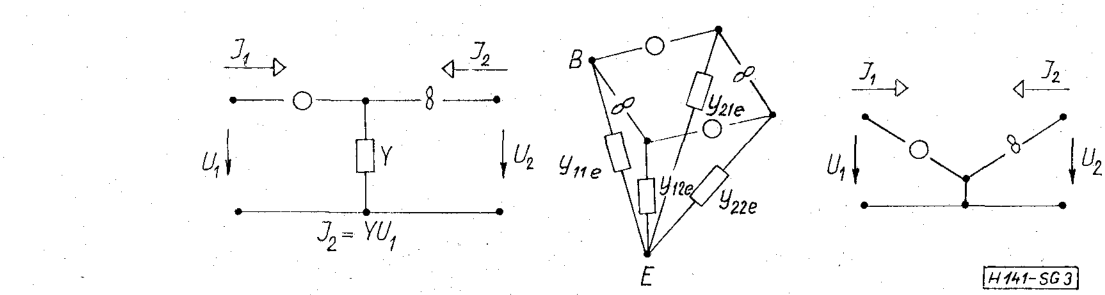
Ha a lineáris hálózatba egy nullátort helyezünk, a hálózat elveszti egy szabadságfokát, nem teljesülnek rá a Kirchoff-egyenletek. Ha egy norátort helyezünk a hálózatba, plusz egy szabadság fokot biztosí-



1. ábra



2. ábra



3. ábra

tunk, tehát egy egyensúlyi egyenlet redundáns lesz. Ha azonban párosával helyezzük a nullátorokat és norátorokat egy lineáris hálózatba, az egyensúlyi egyenletek teljesülnek, felírhatók például a csomóponti egyenletek. Ideális nullátor és norátor csak végtelen érzékenységgel (tehát gyakorlatilag nem) realizálható [7].

Példaképpen a 3*a* ábrán egy invertáló ideális feszültség vezérelt áramgenerátor, a 3*b* ábrán egy bipoláris tranzisztor y-paraméteres helyettesítő képe, és a 3*c* ábrán egy ideális aszimmetrikus üzemmódban használt műveleti erősítő helyettesítő képe látható.

Összefoglalva, a nullorok olyan fiktív áramköri elemek, melyekkel (passzív elemekkel együtt) minden aktív hálózat modellezhető. Előnyük, hogy a topológiai szemlélettel igen jó összhangban vannak, és a topológiai formulák nullorok alkalmazása esetén szemléletes tartalmat nyernek. Mivel a nullorok sokkal általánosabb, absztraktabb elemek a vezérelt generátoroknál, egy adott követelmény teljesítő áramkör legegyszerűbb és legáltalánosabb helyettesítő képe a nulloros. Ebből az elvi helyettesítő képből a konkrét realizálások redundáns nullorok (pl. a soros nullátor-norátor) behelyezésével adódnak [8]. Az összes publikált NIC realizálás pl. a NIC nulloros helyettesítő képéből származtatható változat.

4. Nullorokat tartalmazó aktív hálózatokra vonatkozó topológiai összefüggések

Vizsgáljuk meg, hogy mi a következménye egy passzív hálózat $\boldsymbol{Y}^+$ mátrixára nézve, ha a hálózat két csomópontja közé nullátort helyezünk. A két csomópont potenciálját a nullátor azonossá teszi, tehát visszagondolva a (2) egyenletre $\boldsymbol{Y}^+$ a két csomópontnak megfelelő oszlopát össze kell adni. Ha az egyik a referencia csomópont, akkor a másik csomópontnak megfelelő oszlopot törölni kell. Egy norátor két csomópont közé való helyezésével, a két csomópontra külön-külön nem mond semmit a csomóponti egyenlet, mert a norátor árama határozatlan. Ha azonban a két csomópontnak megfelelő sort $\boldsymbol{Y}^+$-ban összeadjuk, a norátor határozatlan árama kiesik, és az egyenletrendszer megoldható. Ha az egyik csomópont a referencia csomópont, a másiknak megfelelő sort törölni kell. Tehát ha passzív hálózatba N nullort helyezünk, ez $\boldsymbol{Y}^+$ megfelelő N számú sorának és N számú oszlopának összevonását eredményezi. Ez nyilvánvalóan a mátrix rangját N-el csökkenti. Hasonlóan a 2. ponthoz meg kell vizsgálni, hogy a fenti műveletek hogyan vihetők át a topológiára, illetve a topológiára jellemző $\boldsymbol{A}$ (és $\boldsymbol{A}'$) mátrixra. Ha $\boldsymbol{Y}^+$ mátrix két sorát összeadjuk (norátor), az megfelel az $\boldsymbol{Y}^+$ előtt álló $\boldsymbol{A}$ mátrix két sora összeadásának. Ez a módosított incidenciamátrix pedig a hálózat gráfjából a norátorok rövidre-zárásával és a nullátorok megszakításával létrejövő gráfnak felel meg. Jelölése $\boldsymbol{A}_\infty$. Hasonlóan $\boldsymbol{Y}^+$ két oszlopának összeadása, az $\boldsymbol{Y}^+$ után álló $\boldsymbol{A}'$ megfelelő két oszlopának összeadását jelenti, az ennek megfelelő gráf az eredetiből a nullátorok rövidrezárásával és a norátorok megszakításával nyerhető. Jelölése $\boldsymbol{A}_0'$. Ezekkel a jelölésekkel a csomóponti mátrix-egyenlet

$$(\boldsymbol{A}_\infty \boldsymbol{Y} \boldsymbol{A}_0')\mathbf{U}_n = \mathbf{I}_g. \tag{3}$$

Hasonló gondolatmenettel nyerhető a hurok-egyenletrendszer mátrix-egyenlete is.

$$(\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{Z} \boldsymbol{B}_\infty')\mathbf{I}_h = -\mathbf{E}_g. \tag{4}$$

A továbbiakban det $(\boldsymbol{Y}^+)$ topológiai úton történő előállításával foglalkozunk. Az előző fejezet alapján nyilvánvaló, hogy $\boldsymbol{A}_\infty$ nem szinguláris $(\mathrm{n}-N-1)$-ed rendű szubmátrixainak megfelelnek az eredeti gráf olyan N-ed rendű $N+1$-fái, amelyekben minden norátor két végpontja külön részgráfban van. Az N norátor rövidezárásával ezek az $N+1$-fák pontosan az $\mathrm{n}-N$ csomópontú egyszerűsített gráf fái lesznek. Hasonló gondolatmenettel $\boldsymbol{A}_0'$ nemszinguláris szubmárixainak megfelelnek a passzív gráf olyan N-ed rendű $N+1$-íái, melyekben a nullátorok végpontjai külön részgráfokban vannak. A Binet—Cauchy-tétel értelmében det $(\boldsymbol{A}_\infty \boldsymbol{Y} \boldsymbol{A}_0')$-ban az $\boldsymbol{A}_\infty$ és $\boldsymbol{A}_0'$ közös $N+1$-fái szerepelnek csak. Tehát

$$D = \sum_{f=1}^{F_1} y T^N_{fN+1/A_1, A_2 - B_1, B_2 \cdots} \cap \sum_{f=1}^{F_2} y T^N_{fN+1/a_1, a_2 - b_1, b_2 \cdots} \tag{5}$$

A, B stb.-vel a nullátorok végpontjait, a, b stb.-vel a norátorok végpontjait jelöltük. D_{ij} számításánál $a(\boldsymbol{A}_\infty \boldsymbol{Y} \boldsymbol{A}_0')$ mátrix i. oszlopát, és j. sorát még el kell hagyni. Ez ekvivalens azzal, ha az i csomópont és a referencia csomópont közé egy plusz nullátort és a j. és a referencia csomópont közé egy plusz norátort helyezünk. A hálózat így $N+1$ nullort fog tartalmazni, a determináns kiszámításában tehát $(N+1)$-ed rendű $N+2$-fák szerepelnek.

$$D_{ij} = \sum_{f=1}^{F_1} y T^{N+1}_{fN+2/i, r, -A_1, A_2 \cdots} \cap \sum_{f=1}^{F_2} y T^{N+1}_{fN+2/j, r - a_1, a_2 \cdots} \tag{6}$$

Hátra van még az egyes $N+1$, ill. $N+2$-fák előjelének kérdése. Mint a 2. pontban említettük, az egyes fák előjele passzív esetben mindig pozitív (3-pólus esetén), mert $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}'$ azonos felépítésű és így a megfelelő helyen levő aldeterminánsainak előjele azonos. Nonreciprok esetben azonban $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}'$ nem azonos felépítésű (Y^+ nem szimmetrikus), ezért az azonos k-fákhoz (azonos ágakat tartalmazó fák) nem azonos szubmátrix tartozik. Így a két aldetermináns ellentétes előjelű is lehet és ekkor a nekik megfelelő közös k-fa ág-admittancia szorzatának előjele negatív. Az előjelek megállapítása a Davies által javasolt fatranszformációs módszerrel történhet [3]. A módszer a következő:

Az irányított gráf k-fáiban zárjuk rövidre először a norátorokat ($\boldsymbol{A}_\infty$-nak megfelelő gráf), majd a nullátorokat ($\boldsymbol{A}_0'$-nak megfelelő gráf). A két gráfon (amennyiben nem azonos felépítésűek) addig hajtjuk végre az alább felsorolt elemi transzformációkat, még a két gráf teljesen azonos nem lesz. Ekkor a megfelelő két aldetermináns is azonos lesz, tehát az előjel a transzformációból kiadódó előjel lesz. A három transzformáció a következő:

1. Szimbólum csere, ez nyilván $\boldsymbol{A}_\infty$ illetve $\boldsymbol{A}_0'$ determinánsban oszlop, ill. sorcserével jár, tehát negatív előjelet eredményez.
2. Ág irányítás csere, ez az előbbi determinánsokban egy oszlop -1-gyel való szorzását jelenti, negatív előjelet eredményez.
3. Ág elmozdítása hurok mentén (az ág eredeti és módosított pozíciója a fa többi ágával együtt hurkot alkot). Mivel ha egy nyílfolytonos hurok ágainak megfelelő oszlopokat összeadjuk zérust kapunk, nyilván a hurkot lezáró új pozíció oszlopa a hurok többi ágainak megfelelő oszlopok alkalmas, lineáris kombinációjából előállítható. Ha az új pozíciójú ág irányítása beleillik a hurokba, az előjel negatív, ha nem pozitív, mivel egy determináns sorainak összeadása nem változtatja meg a determináns értékét.

Végeredményben

$$D=\sum_{f=1}^{F}(-1)^{u_f+v_f+z_f}\cdot yT_{fN+1}^{N}, \tag{7}$$

ahol a $\sum$-ban a közös $N+1$-fák szerepelnek, u, v, z jelentik az 1., 2. ill. 3. transzformációból eredő negatív előjelek számát.

$$D_{ij}=\sum_{f=1}^{F}(-1)^{u_f+v_f+z_f}\cdot yT_{fN+2}^{N+1}. \tag{8}$$

A jelölések a (7) egyenlet jelöléseivel azonosak.

5. Az eredmények általánosítása

Az eddigi eredményeket két szempontból kell általánosítani.

1. Az eddig nyert 3-pólusra érvényes összefüggések általánosítása 4-pólusra. A hálózatdetermináns szempontjából nyilván mindegy, hogy 3- vagy 4-pólusról van-e szó. A csatolásdetermináns 4-pólus esetén (ha i. és j. a két bemeneti csomópont és k. és l. a két kimeneti csomópont)

$$D_{ki,ij}=D_{ki}-D_{li}.$$

Passzív esetben a $D_{ki}-D_{li}$ a következő két fák összege:

$$D_{ki}-D_{li}=\sum_{f=1}^{F^{\prime\prime}}yT^1_{f2/ki,j}-\sum_{f=1}^{F_2}yT^1_{f2/li,j}=\sum_{f=1}^{F_1+F_2}yT^1_{f2/i,j-k,l}. \tag{9}$$

Tehát $D_{kl,ij}$-ben olyan elsőrendű 2-fák szerepelnek, melyekben a bemeneti csomópontpár két csomópontjának és a kimeneti kapocspár két csomópontjának külön részben kell lenni. Ez megfelel a bemenetre és a kimenetre helyezett plusz norátor-nullátor párnak. A fatranszformációból automatikusan adódnak a negatív előjelű tagok. Passzív hálózatoknál tehát a csatolásdetermináns egy nullor behelyezésével a 4. részben leírt módszerrel számítható, és ebben az esetben teljesen közömbös, hogy 3-, vagy 4-pólusról van-e szó. A fentiekből az is következik, hogy az aktív hálózatokra a 4. pontban leírt számítási módszer általános, tehát 4-pólusokra is érvényes, mivel ott nem használtuk ki, hogy a bemenetre helyezett norátoroknak és a kimenetre helyezett nullátoroknak közös pontja van.

2. Bár a Z-paraméterek ismeretében bármely egyéb pl. y-paraméter számítható, de egy y-paraméterhez az összes Z-paraméter számítása szükséges (az y-paraméterekben Δz szerepel). Bármely 4-pólus paraméter közvetlen (két determináns hányadosaként való) számítása legegyszerűbben az univerzális 4-pólus paraméterek bevezetésével válik lehetővé [1]. Mind a hat univerzális paraméternek megfelel a hálózat egy adott lezárása mellett számítható hálózat-determináns. Bármely 4-pólus paraméter két univerzális paraméter hányadosaként adódik, azaz két megfelelő lezárás mellett számított hálózat-determináns hányadosaként. A hat univerzális paraméter és a nekik megfelelő lezárások a következők:

$$G_U=\det\left[\times\, Y^+ \times\right] \qquad P_U=\det\left[\, Y^+ \times\right] \qquad B_U=\det\left[\infty\, Y^+ \circ\right]$$

$$F_U=\det\left[\circ\, Y^+ \infty\right] \qquad S_U=\det\left[\times\, Y^+ \,\right] \qquad R_U=\det\left[\, Y^+ \,\right].$$

A jelölések szakadással, rövidzárral, nullátorral, vagy norrátorral lezárt be-, illetve kimeneteket szimbolizálnak. Ha a hat univerzális paraméter számítására megadjuk a topológiai formulát, akkor az összes 4-pólus paramétert meghatároztuk. Pl. a már számított $z_{ij}=B_U/G_U$, összhangban a 4. pontban leírtakkal.

A 4. és az 5. pontban leírtak alapján az egyes univerzális paraméterekre adódó topológiai összefüggések (n csomópont és N nullor esetén)

$$G_U=\sum_{f=1}^{F_1}yT^N_{fN+1/\infty}\cap\sum_{f=1}^{F_2}yT^N_{fN+1/0}$$

$$P_U=\sum_{f=1}^{F_3}yT^{N+1}_{fN+2/\infty}\cap\sum_{f=1}^{F_4}yT^{N+1}_{fN+2/0}$$

$$B_U=\sum_{f=1}^{F_5}yT^{N+1}_{fN+2/\infty}\cap\sum_{f=1}^{F_6}yT^{N+1}_{fN+2/0}$$

$$F_U=\sum_{f=1}^{F_7}yT^{N+1}_{fN+2/\infty}\cap\sum_{f=1}^{F_8}yT^{N+1}_{fN+2/0}$$

$$S_U=\sum_{f=1}^{F_9}yT^{N+1}_{fN+2/\infty}\cap\sum_{f=1}^{F_{10}}yT^{N+1}_{fN+2/0}$$

$$R_U=\sum_{f=1}^{F_{11}}yT^{N+2}_{fN+3/\infty}\cap\sum_{f=1}^{F_{12}}yT^{N+2}_{fN+3/0}$$

A képletekben $/\infty$ ill. $/0$ jelöli, hogy az összes norátor, ill. nullátor végpontjainak külön részben kell elhelyezkednie.

Könnyen belátható, hogy

$$P_U=\sum_{f=1}^{F_5} yT^{N+1}_{B_U fN+2/\infty}\cap\sum_{f=1}^{F_6} yT^{N+1}_{F_U fN+2/0}$$

mivel a két tag bemeneti rövidzár és kimeneti szakadás mellett B_U és F_U $N+2$-fáinak metszetét adja, ezek pedig pontosan P_U $N+2$-fái.

Hasonló gondolatmenettel:

$$S_U=\sum_{f=1}^{F_6} yT^{N+1}_{B_U fN+2/0}\cap\sum_{f=1}^{F_7} yT^{N+1}_{F_U fN+2/\infty}.$$

Tehát az összes univerzális paraméter meghatározásához összesen négyféle $(N+1)$-ed rendű $N+2$-fát, (B_U, F_U, S_U, P_U), kétféle N-ed rendű $N+1$-fát (G_U), és kétféle $(N+2)$-ed rendű $N+3$-fát (S_U) kell keresni az n csomópontú, passzív ágakat tartalmazó gráfban.

6. Érzékenységek

Az egyes átviteli függvények (ill. négypólus paraméterek) passzív elemekre vonatkozó — a vezérelt generátorok átviteli tényezői is passzív admittanciák nulloros helyettesítő kép esetén — érzékenysége a Bode-féle bilineáris tétel alapján ugyanúgy vizsgálható, mint nemtopológiai módszerek esetén. Nyilvánvaló, hogy az adott átviteli függvény nevezőjében, és számlálójában szereplő fák ismeretében bármely elemre vonatkozó érzékenységfüggvény a megfelelő fák kiválogatásával előállítható.

7. Példa

Példaképpen meghatározzuk a 4. ábrán látható aktív RC szűrő feszültségátviteli függvényét (U_2/U_1 ha $I_2=\emptyset$).

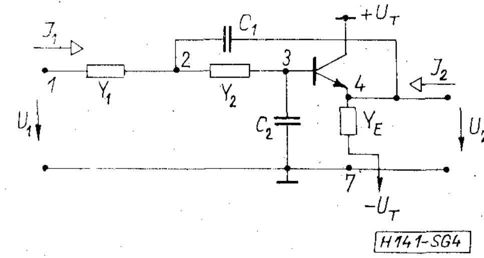
A tranzisztort a 3b ábrán látható teljes y-paraméteres helyettesítőképpel vesszük figyelembe. A hálózat gráfja az 5. ábrán látható

$$a-Y_1=1/R_1$$
$$b-Y_2=i/R_2$$
$$c-sC_2$$
$$d-sC_1$$
$$e-y_{11e}$$
$$f-y_{21e}$$
$$g-y_{12e}$$
$$h-y_{22e}$$
$$j-Y_E=1/R_E$$

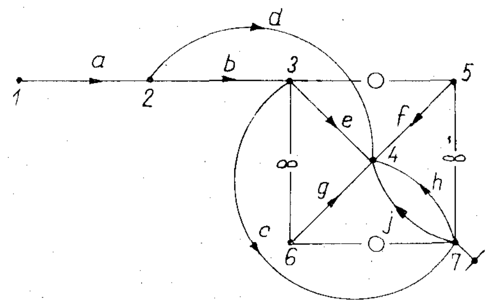
$$A_U=U_2/U_1=B_U/P_U=\det\left[Y+{}^{\infty}_{0}\right]/\det\left[Y+{}^{1}_{\times}\right].$$

A $\det\left[Y+{}^{1}_{\times}\right]$ számításánál adódó közös harmadrendű 4-fák:

abd, acd, ade, agc, agb, —agf, ahc, ahb, ahe, ajc, ajb, ale, dgc, dgf, dhc, dhb, dhe, djc, djb, dje, cdb, cde, cdf, aec, afc, aeb, afb, bgc, —bgf, bhe, bhc, bjc, bje, bcf, bee.



4. ábra



5. ábra

A $\det\left[Y+{}^{\infty}_{0}\right]$ számításánál adódó közös harmadrendű 4-fák:

abd, acd, abe, ade, abf.

$$A_U=M(S)/N(s),\quad M(s)=R_E(y_{11e}+y_{21e})+$$
$$+sC_1R_E(R_2y_{11e}+1)+s^2C_1C_2R_2R_E$$
$$N(s)=R_E(y_{11e}-y_{12e}+y_{21e}+y_{22e})+1+$$
$$+(R_1+R_2)(y_{22e}y_{11e}+y_{21e}y_{12e})R_E+$$
$$+(R_1+R_2)y_{11e}+sC_1[-R_1R_2R_Ey_{12e}y_{21e}+$$
$$+(R_1+R_E+R_1R_Ey_{22e})\,(1+R_2y_{11e})]+$$
$$+sC_2[R_E(R_1+R_2)(y_{11e}-y_{12e}+y_{21e}+y_{22e})+$$
$$+R_1+R_2]+s^2C_1C_2[R_1R_2+R_1R_E+R_2R_E+$$
$$+R_1R_2R_E(y_{11e}-y_{12e}y_{21e}y_{22e})]$$

Mint az 5. részben kimutattuk a topológiai analízis során adott feltételeknek eleget tevő, $(k-1)$-ed rendű k-fákat kell keresni. A módszer számítógépes kivitelezéséhez tehát elsősorban k-ía kereső algoritmus szükséges. Az irodalomban több ilyen algoritmus található, pl. Mayeda és Seshu [9] vágatmátrixokat alkalmazó, Chen és Mark [10] független hurkokat alkalmazó, vagy Pávó [11] általánosított fákból k-fákat kereső algoritmusa említhető. A k-ía kereső algoritmust ki kell egészíteni egy a k-fák rendűségét vizsgáló résszel, erre a célra megfelel pl. a [11]-ben alkalmazott teljes ciklusvizsgálat kissé módosított formája.

IRODALOM

[1] *Hennyey Z.:* Lineáris áramkörök elmélete. Akadémiai Kiadó, 1958.

[2] *Seshu, B.—Reed, M.:* Linear graphs and electrical networks. Addison-Wesley, 1961.

[3] *Davies, A. C.:* Matrix analysis of networks containing nullors. Electronics Letters 1966. 2. N. 2 48. o. 1966. 2. N. 3 91. o.

[4] *Davies, A. C.:* Significance of nullators, norators and nullors in activ network theory. The Radio and Electronic Engineer 1967. nov. 259—264.

[5] *Davies, A. C.:* Nullator-norator equivalent networks for controlled sources. Proc IEEE 55. 1967. 722. o.

[6] *Martinelli, G.:* On the nullor. Proc. IEEE 53. 1965. 332. o.

[7] *Tellegen, B. D. H.:* On nullators and norators. IEEE Trans. on CT.-13. 1966. 466. o.

[8] *Myers, B. R.:* Nullor modell of the transistor. Proc. IEEE 53. 1965. 756. o.

[9] *Mayeda, W.—Seshu, S.:* Generation of trees Without duplication. IEEE Trans. on CT.-12. 1965. 181—186. o.

[10] *Chen, W. K.—Mark, S. K.:* On the algebraic relationship of trees, co-trees, circuits and cutset of a graph. IEEE Trans. on CT-16. 1969. 176—184. o.

[11] *Pávó Imre:* Egy gráf k-fáinak előállítása. Matematikai Lapok, 1968. 3—4. 353—363. o.

[12] Dr. *Andrásfai B.:* Gráfelmélet. Mérnöktovábbképző jegyzet, 1968.

[13] Dr. *Szendy K.:* Modern hálózatszámítási módszerek. Akadémiai Kiadó.

[14] *Brayshaw, G. S.:* Topological analysis of networks containing nullators and norators. IEEE Trans. on CT.-16. 1969. május.