BALOGH ALBERT
Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet

DR. DUKÁTI FERENC
Magyar Szabványügyi Hivatal

Élettartam- és megbízhatósági vizsgálatok exponenciális eloszláson alapuló szekvenciális mintavételi eljárásai és tervei

ETO 620.113:620.169.1

A megbízhatósági vizsgálatok tervezésénél igen fontos követelmény, hogy adott megbízhatósági szint ellenőrzésére folytatott vizsgálatok minél gazdaságosabbak legyenek mind a vizsgálatok időtartamát, mind a mintaelemek számát tekintve. Ezeket a célkitűzéseket a mintavételi tervek helyes megválasztása biztosítja.

A mintavételi tervek és az ezekkel kapcsolatos matematikai-statisztikai meggondolások függnek a vizsgálat végrehajtásának és a döntések meghozatalának módszerétől. Jelen cikk szerzői ismertették az exponenciális eloszláson alapuló mintavételi terveket és eljárásokat abban az esetben, ha a vizsgálatot előre megadott számú meghibásodás bekövetkezéséig, ill. előre megadott időtartamig folytatják [1]. Ebben az esetben a vizsgálat során kétféle döntés hozható: vagy elfogadják a tételt, vagy pedig visszautasítják.

A jelen dolgozatban ismertetésre kerülő szekvenciális eljárásnál mindenegyes meghibásodás bekövetkezése után a döntés háromféle lehet: vagy elfogadjuk, vagy visszautasítjuk a tételt, vagy pedig tovább folytatjuk a vizsgálatot. Mivel a vizsgálat továbbfolytatása is a lehetséges döntések egyike, ezért a meghibásodási szám ennél a vizsgálatnál nem előre rögzített érték, hanem valószínűségi változó. Ez azt jelenti, hogy az a meghibásodási szám, amelynél a vizsgálatot befejezzük (a tételt elutasítjuk vagy elfogadjuk), véletlenszerűen változó mennyiség. A vizsgálati eljárás annál gazdaságosabb, minél kisebb a meghibásodási szám várható értéke.

A dolgozat a szekvenciális valószínűségi hányados vizsgálatával foglalkozik az esetben, ha az alkatrészek élettartam-eloszlása exponenciális Θ paraméterrel, azaz az élettartameloszlás sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(x;\ \Theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Theta}e^{-\frac{x}{\Theta}}; & \text{ha}\quad x\geqq 0\\ 0; & \text{ha}\quad x<0\end{cases}$$

A vizsgálatok helyettesítéses és helyettesítés nélküli vizsgálatok lehetnek. Mivel a helyettesítéses és helyettesítés nélküli vizsgálatok tárgyalása teljesen hasonló, csak a helyettesítéses vizsgálattal foglalkozunk általában, a helyettesítés nélküli vizsgálatra csak egyes esetekben térünk ki.

Beérkezett: 1971. VI. 10.

1. Jelölések és terminológia

A jelen cikkben használt terminológia az [1] dolgozatban és az MSZ 248–57-ben [2], az MSZ 17100 [3], valamint a H 108 M1L STD [4] szabványokban közölt fogalmakat használja fel. Ezek közül a legfontosabbakat és azok jelölését az alábbiakban foglaljuk össze:

1.1. Várható élettartam

Az élettartam várható értéke. Jelölése: Θ.

1.2. Átvételi élettartam

A várható élettartam még elfogadható értéke. Jelölése: Θ_0.

1.3. Visszautasítási élettartam

Az a Θ érték, amelynél kisebb várható élettartamú tétel már nem elfogadható. Jelölése: Θ_1.

1.4. Jelleggörbe (OC görbe)

A jelleggörbe minden Θ értékre megadja azt a $P(\Theta)$ valószínűséget, hogy a Θ várható élettartamú tételt elfogadják. Jelölése: $P(\Theta)$.

1.5. A gyártó kockázata

Θ_0 várható élettartamú tétel visszautasításának valószínűsége. Jelölése: α. Képletben: $P(\Theta_0)=1-\alpha$.

1.6. A fogyasztó kockázata

Θ_1 várható élettartamú tétel átvételének valószínűsége. Jelölése: β. Képletben: $P(\Theta_1)=\beta$.

2. Az OC jelleggörbe meghatározása szekvenciális vizsgálatnál

Legyen a vizsgált termékek száma n, legyenek a meghibásodási időpontok a következők: $0\leqq x_1\leqq \leqq x_2\leqq\ldots\leqq x_r$. Ekkor az r-edik meghibásodás után a termékeken megfigyelt összes működési idő helyettesítéses vizsgálat esetében a következő:

$$V(x_r)=\mathrm{n}x_r,$$

helyettesítés nélküli vizsgálat esetében pedig

$$V(x_r)=\sum_{i=1}^{r}x_i+(\mathrm{n}-\mathrm{r})x_r.$$

A szekvenciális valószínűségi hányados vizsgálatnál a következő hányadost vizsgáljuk:

$$\frac{P_{r,1}}{P_{r,0}}=\frac{\prod_{i=1}^{r} f(x_i;\ \Theta_1)[1-F(x_r;\ \Theta_1)]^{n-r}}{\prod_{i=1}^{r} f(x_i;\ \Theta_0)[1-F(x_r;\ \Theta_0)]^{n-r}}, \qquad (2.1)$$

ahol $f(x;\ \Theta)$ a sűrűségfüggvény, $F(x;\ \Theta)$ az eloszlásfüggvény és $P_{r,1}$, ill. $P_{r,0}$ jelenti a Θ_1 ill. Θ_0 átlagos élettartam sokaságából származó minta likelihood függvényét.

Exponenciális eloszlás esetében helyettesítés nélküli vizsgálatnál:

$$P_{r,1}=\frac{1}{\Theta_1^r}e^{-\frac{1}{\Theta_1}\left[\sum_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_r\right]}=\frac{1}{\Theta_1^r}e^{-\frac{1}{\Theta_1}V(x_r)}.$$

$$P_{r,0}=\frac{1}{\Theta_0^r}e^{-\frac{1}{\Theta_0}\left[\sum_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_r\right]}=\frac{1}{\Theta_1^r}e^{-\frac{1}{\Theta_0}V(x_r)}. \qquad (2.2)$$

Helyettesítéses vizsgálat esetében a képletek azonosak, azzal az eltéréssel, hogy $V(x_r)=nx_r$.

A vizsgálat során meghatározunk két számot, A-t és B-t úgy, hogy $0<B<1<A$ teljesüljön. A és B függ a gyártó és a felhasználó kockázatától (α-tól és β-tól). Ennek ismertetésére később kerül sor. Ezután mindenegyes meghibásodás előfordulása után kiszámítjuk a $\frac{P_{r,1}}{P_{r,0}}$ hányadost és a következő lehetséges döntéseket hozzuk:

a) Ha $\frac{P_{r,1}}{P_{r,0}}\geqq A$ akkor a tételt visszautasítjuk.

b) Ha $\frac{P_{r,1}}{P_{r,0}}\leqq B$, akkor a tételt elfogadjuk.

c) Ha $A<\frac{P_{r,1}}{P_{r,0}}<B$, akkor a vizsgálatot továbbfolytatjuk.

A (2.2)-ből következik, hogy exponenciális élettartameloszlás esetében az elfogadási tartomány a

$$\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^r e^{-\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)V(x_r)}\leqq B \qquad (2.3)$$

egyenlőtlenség által meghatározott.

Hasonlóképpen a visszautasítási tartomány a következő egyenlőtlenséggel adott:

$$\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^r e^{-\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)V(x_r)}\geqq A. \qquad (2.4)$$

Végül a vizsgálat továbbfolytatásának tartománya a következő:

$$B<\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^r e^{-\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)V(x_r)}<A. \qquad (2.5)$$

(2.3.) egyenlőtlenséget logaritmizálva és átrendezve adódik, hogy a tételt akkor fogadjuk el, ha a megfigyelt összes működési időre, $V(x_1)$-re, a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$V(x_r)\geqq\frac{r\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}-\frac{\ln B}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}. \qquad (2.6)$$

(2.6)-ból

$$\frac{\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}=s \qquad (2.6a)$$

és

$$-\frac{\ln B}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}=h_0 \qquad (2.6b)$$

jelölésekkel kapjuk, hogy

$$V(x_r)\geqq rs+h_0 \qquad (2.7)$$

Hasonló számításokat elvégezve, (2.4)-ből adódik, hogy a visszautasítási döntést akkor hozzuk meg, ha

$$V(x_r)\geqq\frac{r\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\frac{1}{\Theta_1}=\frac{1}{\Theta_0}}-\frac{\ln A}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}. \qquad (2.8)$$

(2.8)-ból

$$h_1=\frac{\ln A}{\frac{1}{\Theta_1}=\frac{1}{\Theta_0}} \qquad (2.8a)$$

jelöléssel kapjuk, hogy

$$V(x_r)\leqq rs-h_1 \qquad (2.9)$$

egyenlőtlenség definiálja a visszautasítási tartományt. A fentieknek megfelelően a vizsgálat továbbfolytatásának tartománya a következő:

$$rs-h_1<V(x_r)<rs+h_0 \qquad (2.10)$$

Példa. Helyettesítéses vizsgálat esetében legyen

$$\Theta_0=1500 \text{ óra},\ \Theta_1=300;\ \alpha=0{,}05 \text{ és } \beta=0{,}10$$

Mivel $\Theta_1/\Theta_0=300/1500=0{,}200$, akkor a [4] szerinti $2A-1$ (1. táblázat) táblázatából a $B-4$ vizsgálati tervet és a $2D-1$ táblázatból (2. táblázat) megfelelően a következő értékeket kapjuk: $h_0=$ $=\Theta_0(h_0/\Theta_0)=1500(0{,}5805)=870{,}75$; $h_1=\Theta_0(h_1/\Theta_0)=$ $=1500(0{,}7453)1117{,}95$ és $s=\Theta_0(s/\Theta_0)=1500$ $(0{,}4086)=612{,}9$ óra/hiba.

$V_E(x_r)$ elfogadási egyenes egyenlete a következő:

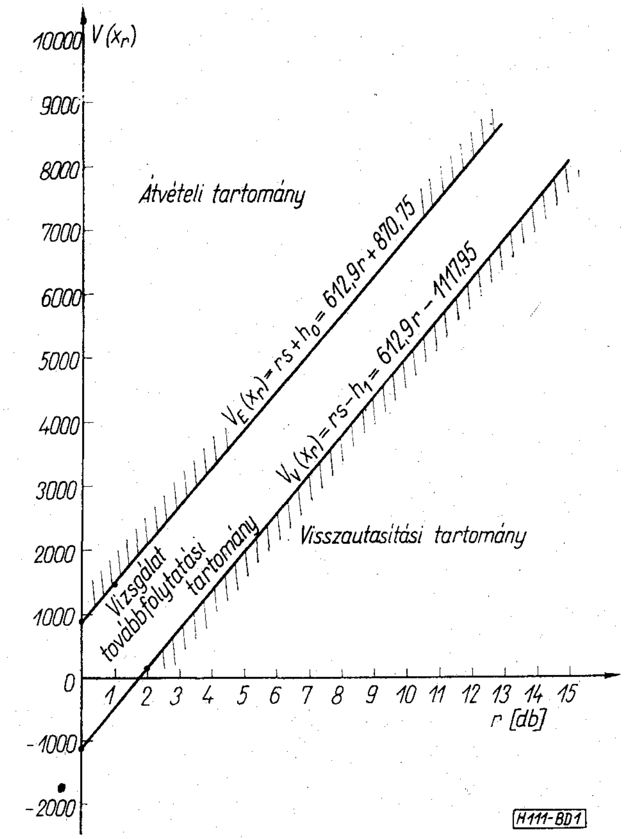
$$V_E(x_r)=rs+h_0=612{,}9r+870{,}75,$$

a visszautasítási egyenes egyenlete:

$$V_V(x_r)=rs-h_1=612{,}9r-1117{,}95$$

Ezt az esetet illusztrálja az 1. ábra.

Az így végrehajtott vizsgálat véges sok számú meghibásodás bekövetkezése után 1 valószínűséggel döntéshez vezet. Az OC jelleggörbét az ún. Wald-féle alapazonosságból közelítéssel lehet meghatározni (ld. Vincze [5]).



1. ábra. A szekvenciális eljárás lehetséges döntéseinek tartománya

Ha a jelleggörbét meghatározó $P(\Theta)$ függvény a következő alakú:

$$P(\Theta)=\frac{A^{h(\Theta)}-1}{A^{h(\Theta)}-B^{h(\Theta)}} \tag{2.11}$$

és a $h(\Theta)$ függvény eleget tesz az

$$\int_0^\infty \left[\frac{f(x;\ \Theta_1)}{f(x;\ \Theta_0)}\right]^{h(\Theta)} f(x;\ \Theta)\,\mathrm{d}x=1 \tag{2.12}$$

azonosságnak, akkor exponenciális eloszlás esetében (2.12) a következő alakú:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Theta}\, e^{-\frac{x}{\Theta}}\left[\frac{\Theta_0}{\Theta_1} e^{-x\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)}\right]^{h(\Theta)} \mathrm{d}x=1. \tag{2.13}$$

(2.13)-t integrálva kapjuk, hogy

$$\Theta=\frac{\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^h-1}{h\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)}. \tag{2.14}$$

Ha $h\to 0$, akkor

$$\lim_{h\to 0}\Theta=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^h-1}{h\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)}$$

határozatlan $\frac{0}{0}$ alak, ezért a L'Hospital szabályt kell alkalmazni, így

$$\lim_{h\to 0}\Theta=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^h-1}{h\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta^0}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^h\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}=$$

$$=\frac{\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}=s$$

adódik.

Hasonlóképpen, ha $h\to 0$, akkor $\lim\limits_{h\to 0} P(\Theta)$ is határozatlan alak, ekkor ismét alkalmazva L'Hospital szabályt, kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} P(\Theta)=\lim_{h\to 0}\frac{A^h-1}{A^h-B^h}=\lim_{h\to 0}\frac{A^h\ln A}{A^h\ln A-B^h\ln B}=$$

$$=\frac{\ln A}{\ln A-\ln B}. \tag{2.15}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$h_0=-\frac{\ln B}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}},\qquad h_1=\frac{\ln A}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}},$$

akkor (2.15) a következő alakban írható fel:

$$\lim_{h\to 0} P(\Theta)=\frac{h_1}{h_0+h_1}. \tag{2.16}$$

A következőkben térjünk át az A és B számok meghatározására. Tegyük fel, hogy $\frac{\Theta_0}{\Theta_1}=g$. Ekkor

$$s=\frac{\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}=\frac{\Theta_0\ln g}{g-1}. \tag{2.17}$$

Például, ha $\Theta_0=1500$; $\Theta_1=300$, akkor $s=1500\,\frac{\ln 5}{4}=612{,}9$, a már korábban kapott érték.

B meghatározása

A $h_0=-\frac{\ln B}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}$ azonosságból kapjuk, hogy

$$-\ln B=h_0\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)=\frac{h_0}{\Theta_0}(g-1). \tag{2.18}$$

Ezért az előbbi számpélda adatait behelyettesítve (2.18)-ba, kapjuk, hogy $h_0=870{,}75$ esetén

$$-\ln B=\frac{h_0}{\Theta_0}(g-1)=\frac{870{,}75\cdot 4}{1500}=2{,}32,$$

azaz

$$B=0{,}098$$

A meghatározása

Mivel

$$\ln A = \frac{h_1(g-1)}{\Theta_0},$$

ezért

$h_1 = 1117{,}95$ esetén és $g=5$, $\Theta_0 = 1500$ óra mellett $\ln A = 2{,}96$, azaz $A = 14{,}3$.

A következőkben meghatározzuk, hogyan függ A és B az α és β értékétől. Ismeretes, hogy az OC görbére teljesül, hogy

$$P(\Theta_0) = 1-\alpha \tag{2.19}$$

és

$$P(\Theta_1) = \beta \tag{2.20}$$

Másrészt azonban (2.14)-ből adódik $\Theta = \Theta_0$ esetén

$$\Theta_0 = \frac{\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^{h(\Theta_0)} - 1}{h(\Theta_0)\left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_0}\right)},$$

azaz

$$h(\Theta_0)\left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1} - 1\right) = \left(\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right)^{h(\Theta)} - 1.$$

Ez nyilván teljesül, ha $h(\Theta_0) = 1$, így az OC görbe értéke a $\Theta = \Theta_0$ pontban (2.11) és az előzőek szerint:

$$P(\Theta_0) = \frac{A-1}{A-B}. \tag{2.21}$$

Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy $h(\Theta_1) = -1$, így

$$P(\Theta_1) = \frac{\frac{1}{A} - 1}{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}} = \frac{A-1}{A-B} \cdot B. \tag{2.22}$$

(2.19)-ből és (2.21)-ből, illetve (2.20)-ból és (2.22)-ből kapjuk a következő egyenleteket:

$$1-\alpha = \frac{A-1}{A-B}, \tag{2.23}$$

$$\beta = \frac{A-1}{A-B} \cdot B, \tag{2.24}$$

azaz

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

(2.23)-ból

$$\alpha = \frac{1-B}{A-B}, \tag{2.25}$$

(2.24)-ből pedig

$$\beta = \frac{A-1}{A-B} \cdot B. \tag{2.26}$$

adódik.

Az előzőekben ismertetett példa számadatai szerint $A = 14{,}3$ és $B = 0{,}098$, ezért $\alpha \approx 0{,}07$, $\beta \approx 0{,}10$. A következőkben határozzuk meg az OC jelleggörbe egyes pontjait az előző számadatokkal.

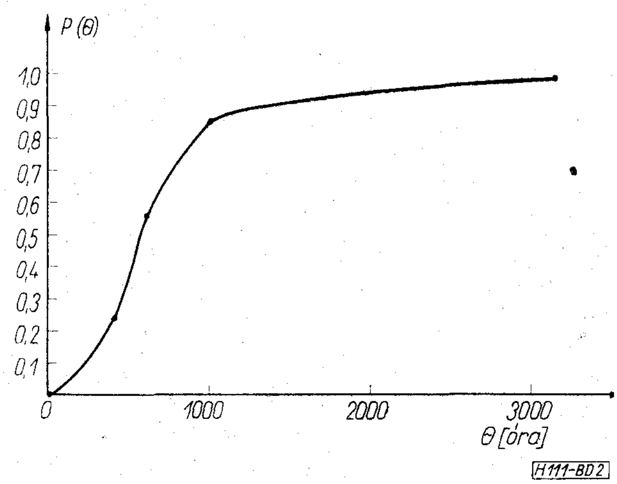
Ha $\Theta = s(h \to 0)$, akkor $P(\Theta) = \frac{h_1}{h_1 + h_0}$, ezért

$$s = 612{,}9 \text{ miatt } P(612{,}9) = \frac{1117{,}95}{870{,}75 + 1117{,}95} = 0{,}56$$

Ha $h \to -\infty$, akkor $\Theta \to 0$ és $P(\Theta) \to 0$.
Így az OC görbe pontjai:

$\Theta_0 = 1500$ óra	$P(1500) = 0{,}95$ (2.19 szerint)
$\Theta = 612{,}9$ óra	$P(612{,}9) = 0{,}56$
$\Theta_1 = 300$ óra	$P(300) = 0{,}10$ (2.20 szerint)
$\Theta = 0$ óra	$P(P) = 0$

A 2. ábra megadja az OC görbét $\Theta_0 = 1500$ óra, $\alpha = 0{,}05$ és $\beta = 0{,}10$ értékekre.



2. ábra. Az OC görbe szekvenciális vizsgálat esetén $\Theta = 1500$ óra, $\alpha = 0{,}05$ és $\beta = 0{,}10$ értékekre

3. A vizsgálati terv meghatározása

A helyettesítéses és helyettesítés nélküli vizsgálat tervének meghatározása teljesen azonos módon történik, egyedüli különbség a megfigyelt összes működési időben ($V(x_r)$) van, amely helyettesítéses esetben

$$V(x_r) = \mathrm{n} x_r.$$

helyettesítés nélküli esetben pedig

$$V(x_r) = \sum_{i=1}^{r} x_i + (\mathrm{n}-\mathrm{r})\, x_r.$$

Meghatározandó α, β, Θ_0 és Θ_1 ismeretében az elfogadási egyenes

$$V_E(x_r) = \mathrm{r}s + h_0$$

és a visszautasítási egyenes

$$V_V(x_r) = \mathrm{r}s - h_1$$

egyenlete.

Lehetséges döntések:

a) $V(x_r) \leqq rs - h_1$ a tételt visszautasítjuk,
b) $V(x_r) \leqq rs + h_0$ a tételt elfogadjuk,
c) $rs - h_1 < V(x_r) < rs + h_0$ a vizsgálatot továbbfolytatjuk.

Ha a vizsgálat során megfigyelt meghibásodások r száma kisebb, mint egy r_0 szám, amely az 1. táblázatból határozható meg és

$$V(x_r) \geqq \min. (rs + h_0,\ r_0),$$

akkor a tétel szintén elfogadást nyert.

1. táblázat

(2A-1) táblázat, vizsgálati tervek

$\alpha=0{,}05$ $\beta=0{,}10$		$\alpha=0{,}10$ $\beta=0{,}10$	
Jel	Θ_1/Θ_0	Jel	Θ_1/Θ_0
B-1	0,022	*C*-1	0,046
B-2	0,091	*C*-2	0,137
B-3	0,154	*C*-3	0,207
B-4	0,205	*C*-4	0,261
B-5	0,246	*C*-5	0,304
B-6	0,282	*C*-6	0,340
B-7	0,312	*C*-7	0,370
B-8	0,338	*C*-8	0,396
B-9	0,361	*C*-9	0,418
B-10	0,382	*C*-10	0,438
B-11	0,459	*C*-11	0,512
B-12	0,512	*C*-12	0,561
B-13	0,550	*C*-13	0,597
B-14	0,581	*C*-14	0,624
B-15	0,625	*C*-15	0,666
B-16	0,658	*C*-16	0,695
B-17	0,711	*C*-17	0,743
B-18	0,745	*C*-18	0,774

Ha pedig $r \geqq r_0$ vagy $V(x_r) < r_0 s$, akkor a tételt visszautasítjuk. Így a vizsgálatot elegendő r_0 számú meghibásodásig folytatni a legkedvezőtlenebb esetben.

Példa:

Legyen $\Theta_0 = 50\,000$ óra, $\Theta_1 = 10\,000$ óra $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}1$.

Ekkor $\dfrac{\Theta_0}{\Theta_1} = \dfrac{1}{5}$; $\alpha = 0{,}05$ értékekre az 1. és 2. táblázatból kapjuk, hogy

$$r_0 = 12,\ \frac{h_0}{\Theta_0} = 0{,}58;\ \frac{h_1}{\Theta_0} = +0{,}75;\ \frac{s}{\Theta_0} = 0{,}41.$$

Így $h_0 = 29\,000$,
$h_1 = 37\,500$,
$s = 20\,500$.

Így az elfogadási egyenes egyenlete a következő:

$$V_E(x_r) = 29\,000 + 20\,500r,$$

a visszautasítási egyenesé pedig

$$V_V(x_r) = -37\,500 + 20\,500r.$$

Az $r_0 s$ szorzat értéke a következő:

$$r_0 s = 12 \times 20\,5000 = 246\,000$$

Elfogadási döntés feltétele:

$$V(x_r) \geqq \min/29\,000 + 20\,5000r,\ 246\,000)$$

Visszautasítási döntés feltétele:

$$V(x_r) \leqq -37\,500 + 20\,5000r \text{ vagy}$$

$$V(x_r) < 246\,000.$$

Ha például $r=2$ esetén, azaz a második meghibásodás után $V(x_2) = 80\,000$ óra, akkor

$$V_E(x_2) = 29\,000 + 41\,000 = 70\,000$$

adódik, így
$V(x_2) = 80\,000 > V_E(x_2) = 70\,000$, tehát a tételt elfogadjuk.

A 2. táblázatban szereplő értékek meghatározása:

$$h_0 = \frac{-\ln B}{\dfrac{1}{\Theta_1} - \dfrac{1}{\Theta_0}} = \frac{-\ln 0{,}105}{\dfrac{1}{10\,000} - \dfrac{1}{50\,000}} = 29\,000,$$

mivel

$$B = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{0{,}10}{0{,}95} = 0{,}105;$$

$$h_1 = \frac{\ln A}{\dfrac{1}{\Theta_1} - \dfrac{1}{\Theta_0}} = \frac{\ln 18}{\dfrac{1}{10\,000} - \dfrac{1}{50\,000}} = 37\,500,$$

mivel

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} = \frac{0{,}90}{0{,}05} = 18;$$

$$s = \frac{\ln \dfrac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\dfrac{1}{\Theta_1} - \dfrac{1}{\Theta_0}} = \frac{\ln 5}{\dfrac{1}{10\,000} - \dfrac{1}{50\,000}} = 20\,500.$$

$r_0 = 3r$, ahol r az a legkisebb egész szám, amelyre

$$\frac{\chi^2_{1-\alpha}(2r)}{\chi^2_{\beta}(2r)} \geqq \frac{\Theta_1}{\Theta_0} \text{ teljesül, ahol } \chi^2_{\gamma}(2r)$$

a $2r$ szabadságfokú χ^2-eloszlás γ kvantilise. Esetünkben $r=4$. Így $r_0 = 3{,}4 = 12$

2. táblázat

(2D-1) táblázat, szekvenciális vizsgálathoz

Jel	r_0	h_0/Θ_0	h_1/Θ_0	s/Θ_0
B-1	3	0,0506	−0,0650	0,0859
B-2	6	0,2254	−0,2894	0,2400
B-3	9	0,4098	−0,5261	0,3405
B-4	12	0,5805	−0,7453	0,4086
B-5	15	0,7345	−0,9430	0,4576
B-6	18	0,8842	−1,1352	0,4972
B-7	21	1,0209	−1,3107	0,5282
B-8	24	1,1495	−1,4757	0,5538
B-9	27	1,2719	−1,6329	0,5756
B-10	30	1,3916	−1,7866	0,5948
B-11	45	1,9101	−2,4523	0,6607
B-12	60	2,3620	−3,0325	0,7024
B-13	75	2,7516	−3,5327	0,7307
B-14	90	3,1217	−4,0079	0,7530
B-15	120	3,7522	−4,8173	0,7833
B-16	150	4,3314	−5,5610	0,8053
B-17	225	5,5386	−7,1109	0,8391
B-18	300	6,5773	−8,4444	0,8600

4. A meghibásodások várható száma

A meghibásodások várható száma a döntés meghozataláig — az elfogadásig vagy visszautasításig — előforduló meghibásodások számának, mint valószínűségi változónak várható értéke. Jelöljük a meghibásodások számát a döntés meghozataláig ξ-vel, ennek várható értékét pedig $E_\Theta(\xi)$-vel. Ez a várható érték szekvenciális vizsgálat esetében a következő:

$$E_\Theta(\xi)=\frac{P(\Theta)[\ln B-\ln A]+\ln A}{E_\Theta\left[\ln\frac{f(x;\,\Theta_1)}{f(x;\,\Theta_0)}\right]}, \tag{4.1}$$

ahol $P(\Theta)$ a Θ várható élettartamú tétel elfogadásának valószínűsége,

$$f(x;\,\Theta_i)=\frac{1}{\Theta_i}e^{\frac{-x}{\Theta_i}}; \qquad (i=0,1).$$

Számítsuk ki a (4.1) szereplő $E_\Theta\left[\ln\frac{f(x;\,\Theta_1)}{f(x;\,\Theta_0)}\right]$ várható értéket:

$$E_\Theta\left[\ln\frac{f(x;\,\Theta_1)}{f(x;\,\Theta_0)}\right]=\frac{1}{\Theta}\int_0^\infty \ln\frac{f(x;\,\Theta_1)}{f(x;\,\Theta_0)}f(x;\,\Theta)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\Theta}\int_0^\infty\left[\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}-x\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right)\right]e^{\frac{-x}{\Theta}}\,dx=$$

$$=\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}-\Theta\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right). \tag{4.2}$$

(2.6*a*), (2.6*b*) (2.8*a*) képletekből a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\ln B-\ln A=-(h_0+h_1)\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right), \tag{4.3}$$

$$\ln A=h_1\left(\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}\right), \tag{4.4}$$

$$s=\frac{\ln\frac{\Theta_0}{\Theta_1}}{\frac{1}{\Theta_1}-\frac{1}{\Theta_0}}. \tag{4.5}$$

(4.2)—(4.5) összefüggéseket felhasználva és a megfelelő értéket (4.1)-be behelyettesítve kapjuk, hogy a döntéshez szükséges meghibásodások várható száma:

$$E_\Theta(\xi)=\frac{-P(\Theta)(h_0+h_1)+h_1}{s-\Theta}. \tag{4.6}$$

Ha $h\to 0$, akkor $\lim\limits_{h\to 0}\Theta=s$ (ld. 2. fejezet), így (2.15)-t figyelembe véve kapjuk, hogy

$$E_\Theta(\xi)=\frac{-\ln A\ln B}{E_\Theta\left[\left(\ln\frac{f(x;\,\Theta_1)}{f(x;\,\Theta_0)}\right)^2\right]}=\frac{h_0h_1}{s^2}. \tag{4.7}$$

Példa

$\Theta_0=50\,000$ óra, $\Theta_1=10\,000$ óra, $\alpha=0{,}05$, $\beta=0{,}1$ esetén a 3. fejezetben kiszámított értékek a következők:

$$h_0=29\,000, \qquad h_1=37\,500, \qquad s=20\,500$$

Így $\Theta=0$ esetén (4.6) a következő alakú

$$E_0(\xi)=\frac{h_1}{s}=1{,}83$$

$\Theta=\Theta_1=10\,000$ óra esetén (4.6) a következő alakú:

$$E_{10\,000}(\xi)=2{,}94$$

$\Theta=s=20\,500$ órára kapjuk, hogy (ld. 4.7)

$$E_{20\,500}(\xi)=5{,}30$$

$\Theta=\Theta_0=50\,000$ órára $P(\Theta_0)=0{,}95$ és (4.6) a következő:

$$E_{50\,000}(\xi)=0{,}94$$

Megjegyzés

Szekvenciális vizsgálat esetén a maximális meghibásodási szám az előzőekben már ismertetett r_0 értékekkel egyenlő.

5. A vizsgálat várható időtartama

A vizsgálat várható időtartama a döntés meghozataláig eltelt időnek, τ-nak, mint valószínűségi változónak várható értéke. Jelölése: $E_\Theta(\tau)$.

Bebizonyítjuk, hogy szekvenciális vizsgálat esetén a vizsgálat várható időtartama, helyettesítéses esetben a következő:

$$E_\Theta(\tau)=\frac{\Theta}{n}E(\xi), \tag{5.1}$$

ahol

$$E_\Theta(\xi)=\begin{cases}\dfrac{-P(\Theta)(h_0+h_1)+h_1}{s-\Theta}; & \text{ha} \quad \Theta\neq s\\[2ex] \dfrac{h_0h_1}{s^2}; & \text{ha} \quad \Theta=s,\end{cases}$$

n a vizsgálati minta darabszáma.

Az (5.1) várható érték kiszámításánál vegyük figyelembe, hogy a vizsgálatot akkor fejezzük be, ha az i-edik meghibásodás bekövetkezése után ($i=1$, $2,\ldots$) döntést tudunk hozni. Ezért τ várható értékét úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk τ feltételes várható értékét mindenegyes i-értékre vonatkozóan. [($E(\tau/\xi=i)$ jelöli τ feltételes várható értékét az i-edik meghibásodás bekövetkezése esetén)], ezt megszorozzuk annak valószínűségével, hogy az i-edik meghibásodás bekövetkezésekor döntést hozunk. Ez a valószínűség: $P(\xi=i)$. Ezt összegezzük $i=1, 2,\ldots$ értékekre. Így kapjuk

$$E_\Theta(\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}E(\tau/\xi=i)P(\xi=i). \tag{5.2}$$

Az (5.2)-ben szereplő $E(\tau/\xi=i)$ feltételes várható érték az [1] dolgozatban közölt eredmény szerint a következő:

$$E(\tau/\xi=i)=i\frac{\Theta}{n}. \qquad (5.3)$$

(5.3)-at behelyettesítve (5.2)-be, kapjuk, hogy

$$E_\Theta(\tau)=\frac{\Theta}{n}\sum_{i=1}^{\infty} iP(\xi=i) \qquad (5.4)$$

$\sum_{i=1}^{\infty} iP(\xi=i)$ nem más, mint ξ várható értéke, azaz

$$E_\Theta(\tau)=\frac{\Theta}{n}E_\Theta(\xi).$$

Példa

$\Theta_0=50\,000$ óra
$\Theta_1=10\,000$ óra
$h_0=29\,000$ óra, $h_1=37\,500$ óra, $s=20\,500$ óra
$n=20$, $\alpha=0{,}05$, $\beta=0{,}1$ esetén
$\Theta=0$ értékre $E_0(\tau)=0$,
$\Theta=\Theta_1=10\,000$ értékre $E_{10\,000}(\tau)=1470$ óra
$\Theta=s=20\,5000$ értékre $E_{20\,500}(\tau)=5400$ óra
$\Theta=\Theta_0=50\,000$ értékre $E_{50\,000}(\tau)=2350$ óra
$E_\Theta(\xi)$ értékeit a 4. fejezetben számítottuk ki.

Helyettesítés nélküli vizsgálat esetében a vizsgálat várható időtartama közelítéssel:

$$E_\Theta(\tau)=\Theta\ln\frac{n}{n-E_\Theta(\xi)}. \qquad (5.5)$$

Példa

$\Theta_0=50\,000$ óra
$\Theta_1=10\,000$ óra
$h_0=29\,5000$ óra, $h_1=37\,500$ óra, $s=20\,5000$ óra
$\alpha=0{,}05$, $\beta=0{,}1$, $n=20$ esetén
$\Theta=0$ értékre $E_0(\tau)=0$
$\Theta=\Theta_1$ értékre $E_{10\,000}(\tau)=1600$ óra
$\Theta=\Theta_0$ értékre $E_{50\,000}(\tau)=2000$ óra.

A helyettesítéses és helyettesítés nélküli vizsgálat várható időtartamának összehasonlítása azt mutatja, hogy helyettesítés nélküli esetben a vizsgálat várható időtartama hosszabb.

Megjegyzés

A vizsgálat maximális időtartama helyettesítéses esetben:

$$\frac{r_0 s}{n},$$

helyettesítés nélküli esetben

$$\frac{h_0}{r}+\sum_{k=0}^{r_0-2}\frac{s}{n-k}+\frac{2s-h_0}{n-r_0+1}.$$

6. Következtetések

A dolgozatban ismertetett szekvenciális mintavételi eljárás és terv, valamint az ezzel kapcsolatos számítások lehetővé teszik a megbízhatóság-vizsgálatok gazdaságos lefolytatását, és átvételi-visszautasítási döntések meghozatalát sorozatvizsgálat esetén. A megbízhatóság- vizsgálatokkal kapcsolatos mintavételi tervek gyakorlati alkalmazása csak akkor válik lehetővé, ha olyan szabványok állnak rendelkezésre, amelyek részletesen előírják a mintavételi tervet, azaz a vizsgálat időtartamát, darabszámát és a vizsgálati követelményeket. Ezért nagyon szükségesnek mutatkozik a megbízhatóság- és élettartamvizsgálatok tervezésére vonatkozó szabvány elkészítése hazánkban.

IRODALOM

[1] *Balogh A.* & *Dukáti F.:* Élettartam- és megbízhatósági vizsgálatok mintavételi eljárásai és tervei. Megbízhatósági és Minőségellenőrzés, 1971. febr.
[2] MSZ 248—57: Termékek minősítése. Terminológia. 1957.
[3] MSZ 17100—69: Termékek megbízhatósága. Terminológia. 1969.
[4] H 108 MIL STD: Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Tests. Washington, 1961.
[5] *Vincze I.:* Matematikai statisztika. Egyetemi jegyzet. Bp. Tankönyvkiadó.