HÍRADÁSTECHNIKA
A HÍRADÁSTECHNIKAI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET LAPJA

HENNYEY ZOLTÁN
Távközlési Kutató Intézet

A hullámparaméteres és üzemi paraméteres szűrőtervezés kapcsolata

ETO 621.372.54.001.2

A szűrőtervezés jólismert módszerei: a félszázados múltra visszatekintő hullámparaméteres szintézis és a nála kereken húsz évvel fiatalabb üzemi paraméteres. E két szintézis egymástól nagyon különböző alapokra épült. A hullámparaméteres szintézis elméleti alapja alig több, mint a hullámcsillapítás kaszkádkapcsolásra érvényes additív sajátsága. Ez az egyszerűség magyarázza, hogy a tervezői gyakorlatban még ma is fontos szerepe van. Ezzel szemben az üzemi paraméteres szintézis alapja az elképzelhető legszélesebb; az összes lehetőség áttekinthetőségét biztosító PR-feltételek (a pozitív elemekkel való megvalósíthatóság feltételei) vizsgálatával indul. Ennek a „rangbeli" különbségnek a következménye, hogy a hullámparaméteres módszer háttérbe szorult, és így — legalábbis véleményünk szerint — egy sor figyelemre méltó sajátsága rejtve maradt.

A jelen cikk első tagja egy olyan sorozatnak, mely a fenti kérdések tisztázását tűzi ki célul. Alapgondolata az, hogy a hullámparaméteres szintézis szokásos megfogalmazása eléggé felületes, és sokkal világosabb képet kapunk erről a módszerről, ha az üzemi paraméteres szintézis eszközeivel újraépítjük elméleti alapjait. Így jutunk arra a felismerésre, hogy a hullámparaméteres szintézis egyszerűen és tömören fogalmazva: csupán egy nevezetes speciális esete az üzemi paraméteresnek.

Az általános hullámparaméteres szintézis logikailag két úton közelíthető meg. Ugyanis valahol középen helyezkedik el a klasszikus hullámszintézis és a modern üzemi szintézis között, és mindkét „végpontból" út vezet hozzá. Az első utat Tarlacz László* cikksorozata választotta, a másodikat pedig a jelen cikkel induló.

E lap egyik előző** számában jelent meg a kétkapuk egységes leírásával foglalkozó tanulmány, mely lényegében ennek a sorozatnak az előkészítése volt. Elméleti megfontolásainkat következetesen az ott bevezetett univerzális paraméterekre fogjuk építeni.

1. Hullámparaméterek

A hullámparaméterek definíciója és a diagonálparaméterekkel (azaz a **Z** és **Y** mátrixok fődiagonálisában elhelyezkedő paraméterekkel) való kapcsolata jól ismert. A diagonálparaméterek, azaz a rövidzárási és üresjárási impedanciák az univerzális paraméterekkel az alábbi összefüggésben vannak:

$$Z_{1\ddot{u}}=\frac{P}{G},\qquad Z_{2\ddot{u}}=\frac{S}{G};$$
$$Z_{r1}=\frac{R}{S},\qquad Z_{2r}=\frac{R}{P}. \tag{1}$$

A hullámimpedanciák és diagonálviszony definíciójába ezeket a kifejezéseket behelyettesítve, az alábbi összefüggésekre jutunk (a $\hat{=}$ jel jelentése: per-definitionem egyenlő):

$$Z_{10}\,\hat{=}\,\sqrt{Z_{1\ddot{u}}Z_{1r}}=\sqrt{\frac{PR}{SG}}$$
$$Z_{20}\,\hat{=}\,\sqrt{Z_{2\ddot{u}}Z_{2r}}=\sqrt{\frac{SR}{PG}} \tag{2}$$

$$Q\,\hat{=}\,\sqrt{\frac{Z_{1r}}{Z_{1\ddot{u}}}}=\sqrt{\frac{Z_{2r}}{Z_{2\ddot{u}}}}=\sqrt{\frac{RG}{PS}} \tag{3}$$

Reaktáns kétkapu esetén a diagonál impedanciák természetesen PR (pozitív reális) reaktáns függvények, tehát a képzetes tengelyen ($p=j\omega$) tiszta képzetesek. A (2) alatti hullámparaméterek mindegyike két reaktáns függvény mértani közepe. Így értékkészletük a reaktáns függvényéhez képest gazdagodik: ezek az ún. Q-függvények (az elnevezés Cauertől származik) a tiszta képzetesen kívül valós értéket is felvehetnek. Ezeket a mértani közepeket az alábbi előjelkonvencióval tesszük egyértékűvé:

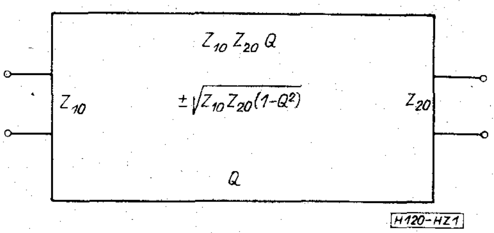
Beérkezett: 1971. VIII. 13.

* *TARLACZ LÁSZLÓ:* A hullámparaméteres szűrőtervezésről. Híradástechnika, 1971. 1. szám.
TARLACZ LÁSZLÓ: Kötetlen hullámparaméteres aluláteresztő. Híradástechnika, 1971. 2. szám.

** *HENNYEY ZOLTÁN:* Kétkapuk egységes leírása. Híradástechnika, 1971. 4. szám.

két képzetes szám mértani közepe pozitív, III. negatív képzetes, ha mindkét tényező egyformán pozitív, ill. negatív képzetes volt; ha viszont a tényezők ellenkező előjelű képzetes számok, akkor mértani középüket válasszuk pozitív valósnak.

A három hullámparaméter, Z_{10}, Z_{20} és Q — egy előjelhatározatlanságtól eltekintve — egyértelműen meghatározza a kétkaput. Ha ez igaz, akkor a kétkapu univerzális paramétereit ki kell tudnunk fejezni a hullámparaméterek segítségével. Valóban, a (2) és (3) egyenletek megoldásával könnyen kapjuk ezeket a kifejezéseket, melyek az 1. ábrán az univerzális paraméterek pozíciójelölésével a kétkapu szimbólumában találhatók.



1. ábra. A kétkapu univerzális paraméterei hullámparaméterekkel kifejezve

Az univerzális paraméterek helyén itt szemiracionális törtfüggvények állnak, ami annyit jelent, hogy ezek a függvények nem racionálisok ugyan, de négyzetük már az. Ezekkel a formulákkal kapcsolatban egy további érdekesség az, hogy megfelelően választott $c(p)$ szemiracionális faktorral végigszorozva ezeket a kifejezéseket, olyan relatív prím polinomokat kell kapnunk, melyek a PR feltételeket kielégítik. Ilyen $c(p)$ faktor létezését a hullámparaméterek alább ismertetett PR feltételei biztosítják.

A (2) és (3) alatt definiált hullámparaméterek mindegyike Q-függvény, azaz két reaktáns függvény mértani közepe. Ez a (3)-mal definiált diagonálviszonyra azért áll, mert egy reaktáns függvény reciproka is PR reaktáns függvény. A Q-függvény, hasonlóan az R-függvényhez, jellegdiagrammal ábrázolható. A jellegdiagram a függvény zérusait és pólusait ábrázolja a fizikai frekvenciákon, azaz a p-sík pozitív képzetes tengelyén; valamint azt, hogy a Q-függvény valós és képzetes tartományai hogyan helyezkednek el. Mint a PR feltételeknél látni fogjuk, a Q-függvény képzetes tartományában úgy viselkedik, mint az R-függvény, csak egyszeres zérusai és pólusai lehetnek és ezek váltakozva kell következzenek (Foster-feltétel). Valós tartományában pedig csak definit pozitív lehet, azaz itt sem nulla sem végtelen értéket nem vehet fel. A valós és képzetes tartományokat 1/2-es multiplicitású (gyöktényezőjük négyzetgyök alatt szerepel) határ-zérusok, ill. határpólusok választják szét. Jegyezzük meg, hogy egy szingularitáshoz tartozó gyöktényező fokszáma mindig a multiplicitás kétszerese, mert a szingularitások konjugált komplex párokban lépnek fel.

A Q-függvény jellegdiagramja alapján egyértelműen írható fel gyöktényezős algebrai formában. Ehhez csak az alábbi formális szabályokat kell szem előtt tartanunk:

— az $\omega=0$-hoz tartozó gyöktényező p, fokszáma 1;

— az ω_i-hez tartozó gyöktényező $1+\pi_i p^2$, ($\pi_i=\omega_i^{-2}$) fokszáma 2;

— az $\omega=\infty$-hez tartozó gyöktényező a szimbolikus (1)-faktor (tehát algebrailag elhagyható faktor), melynek fokszáma 1-nek tekintendő.

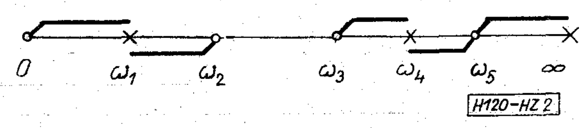
A Q-függvény algebrai kifejezését jellegdiagramja alapján úgy kapjuk, hogy a zérusaihoz tartozó gyöktényezőket a számlálóba, a pólusaihoz tartozókat pedig a nevezőbe írjuk. A határzérushoz és határpólushoz tartozó gyöktényezőket egyszerűen négyzetgyök alá kell írnunk, és 1-es fokszámmal kell számításba vennünk.

Írjuk fel például a 2. ábra szerinti jellegdiagrammal adott sávszűrő-hullámimpedanciát! A fenti szabályok szerint ennek a Q-függvénynek a formulájában a számláló a 0, ω_2, ω_3 és ω_5 frekvenciákhoz tartozó gyöktényezőket tartalmazza, a nevező pedig az ω_1, ω_{I} és ∞ frekvenciákhoz tartozókat

$$Z_0=k\,\frac{p\cdot\sqrt{1+\pi_2 p^2}\cdot\sqrt{1+\pi_3 p^2}\cdot(1+\pi_5 p^2)}{(1+\pi_1 p^2)\cdot(1+\pi_4 p^2)\cdot(1)} \tag{4}$$

A számláló fokszáma $1+1+1+2=5$; a nevező fokszáma pedig a végtelenhez tartozó szimbolikus faktor fokszámát is számítva $2+2+1=5$. A számláló és nevező közös fokszámát a Q-függvény fokszámának tekintjük.

A hullámparaméterek PR-feltételei két csoportba oszthatók. Az első csoportba a már említett feltételek tartoznak, melyeket minden hullámimpedanciának



2. ábra

és diagonálviszonynak külön-külön ki kell elégíteniük. A második csoportba a korrelációs feltételek sorolhatók, melyeket a hullámparaméterek együttesének kell kielégíteni.

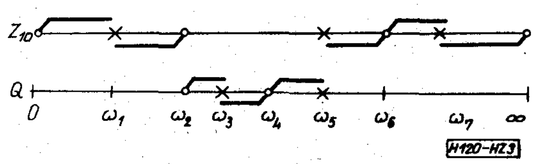
A PR-feltételek első csoportját még az alábbi megjegyzéssel kell kiegészítenünk. Megadtuk a „pozitív Q-függvény" feltételeit, melyeket minden PR hullámimpedancia kielégít, és ez — a hullámimpedanciát önmagában nézve — elegendő is. Nem így a diagonálviszonynál: nem minden pozitív Q-függvény lehet PR-diagonálviszony, csak az, mely még az alábbi kiegészítő feltételnek is eleget tesz; extrém frekvenciákon ($\omega=0$ és ∞) a diagonálviszony értéke csak véges lehet; ha itt képzetes tartomány fejeződik be, akkor a diagonálviszony csak zérus lehet, ha pedig valós tartomány, akkor értéke nem lehet nagyobb 1-nél.

A korrelációs feltételek megfogalmazásánál fontos szerepet játszanak a diagonálviszony 1-helyei, melyek a valós tartományt további szakaszokra bontják. A „szimmetrikus szakasz"-t a diagonálviszony 1-nél kisebb értéke jellemzi, az „antimetrikus szakaszon" pedig a diagonálviszony értéke 1-nél nagyobb.

A külön-külön PR hullámimpedanciák és diagonálviszony korrelációs feltételei az alábbi pontokba tömöríthetők:

1. a hullámimpedanciák legyenek hasonló Q-függvények, azaz valós tartományaik — és így a képzetesek is — essenek egybe;
2. a diagonálviszony és mindkét hullámimpedancia legyenek kiegészítő Q-függvények, azaz az egyik valós tartománya essék egybe a másik képzetes tartományával;
3. a hullámimpedanciák a diagonálviszony szimmetrikus szakaszán legyenek azonos jellegűek (induktív-induktív, vagy kapacitív-kapacitív), az antimetrikus szakaszon pedig legyenek ellenkező jellegűek (ahol az egyik induktív, ott a másik legyen kapacitív).

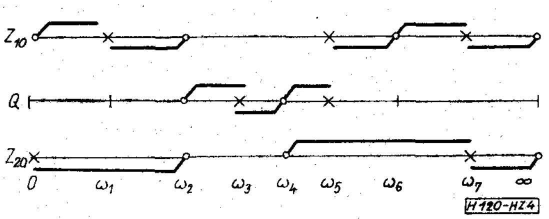
Végül a PR-feltételek egy érdekes, elméleti következményére szeretnénk rámutatni, melyre Cauer is utal idézett munkájában [1]. Ha egy reaktáns kétkapu primer hullámimpedanciáját és diagonálviszonyát a PR feltételeket kielégítően megválasztjuk, akkor a szekunder hullámimpedancia egyértelműen adódik. Ezt a tényt egy konkrét példán mutatjuk be. Válasszuk meg egy tervezendő sávszűrő primer hullámimpedanciáját és diagonálviszonyát a 3. ábrán látható jellegdiagrammok szerint:



3. ábra

Ötödfokú primer hullámimpedanciát, és harmadfokú diagonálviszonyt választottunk. A primer hullámimpedancia választása teljesen szabad volt: bármilyen pozitív Q-függvényt választhattunk volna, melynek két határfrekvenciája van, és középső tartománya valós. A diagonálviszony választásánál is csak egyetlen megkötésünk volt: rendelkezzék ugyanazokkal a határfrekvenciákkal, és középső tartománya legyen képzetes. Azt már önkényesen írtuk elő, hogy a diagonálviszony 1-helyei essenek egybe a primer hullámimpedancia szingularitásaival.

Szerkesszük meg ezután a szekunder hullámimpedancia jellegdiagramját! Könnyű belátni, hogy a PR-feltételek egyértelműen a 4. ábra szerinti jellegdiagramot követelik a szekunder hullámimpedanciától, mely harmadfokúnak adódik. Befejezésül még egy megjegyzés: a szűrő fokszáma a hullámparaméterek fokszámából az alábbi egyszerű összefüggéssel számítható:



4. ábra

$$\text{fokszám} = \text{fsz}\ (Z_{10}) + \text{fsz}\ (Z_{20}) + \text{fsz}\ (Q) - H, \quad (5)$$

ahol H a határfrekvenciák száma. Példákban tehát a sávszűrő fokszáma $5+3+3-2=9$, azaz megvalósításhoz minimálisan 9 reaktáns elemre van szükségünk.

3. A hullámszűrő fogalma

Egy reaktáns kétkaput hullámszűrőnek nevezünk, ha hullámparaméterei a PR-feltételeken kívül az alábbi „hullám-feltételnek" is eleget tesznek. A PR-feltételek megkövetelik, hogy valamennyi hullámparaméter ugyanannyi és ugyanott elhelyezkedő határfrekvenciával rendelkezzék. A határfrekvenciák tehát magára a kétkapura jellemzők.

Egy reaktáns kétkapura a „hullám-feltétel" egyszerűen azt írja elő, hogy a kétkapu határfrekvenciáinak száma legyen minimális. Tehát például egy aluláteresztő vagy felüláteresztő szűrőnek csak egyetlen határfrekvenciája legyen.

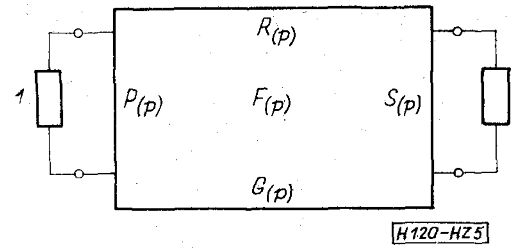
Könnyű belátni, hogy egy üzemi paraméteres aluláteresztőnek akárhány határfrekvenciája lehet. A határfrekvenciák számának 1-re való korlátozása első pillanatra igen súlyos megkötésnek tűnik. Hogy mégsem az, annak oka, hogy a szűrő praktikus áteresztő tartományába csak igen keskeny elméleti zárótartományok kerülhetnek bele, és így az üzemi paraméteres szűrőnél a párokban fellépő redundáns határfrekvenciák nagyon közel vannak egymáshoz. Ha ezeket a redundáns határfrekvenciákat a kétkapu paramétereinek kis változtatásával egybeejtjük, egy hullámfeltételeknek eleget tevő reaktáns kétkapura jutunk. Tehát: az üzemi paraméteres szűrőhöz nagyon közel — egy hullámszűrőnek kell lennie.

A szűrőtervezés feladata előírt üzemi csillapítással, vagy egyéb előírt üzemi tulajdonságokkal rendelkező kétkapu megkeresése. A mindkét oldalán ohmosan lezárt kétkapu üzemi viszonyait a záróellenállásokra vonatkoztatott szórásmátrix fejezi ki. Reaktáns esetben ez a szórásmátrix azzal a speciális sajátságával tűnik ki, hogy a mátrix két elemével egyértelműen meghatározhatóvá válik. Válasszuk e két meghatározó függvénynek a $\Gamma(p)$ átviteli, és a $\Phi(p)$ karakterisztikus függvényt, melyek az univerzális paraméterekkel egyszerű kapcsolatban vannak.

Jól tudjuk, hogy — amint az általában szokás is — az általánosság csorbítása nélkül szorítkozhatunk arra a speciális üzemi helyzetre, amikor a kétkapu mindkét oldalán egységnyi ohmos ellenállással van lezárva. Ebben az esetben (lásd 5. ábra) az üzemi paraméterek (vagyis a $\Gamma(p)$ és $\Phi(p)$ függvények) különlegesen egyszerű és áttekinthető alakot öltenek:

$$\Gamma(p) = \frac{P(p)+S(p)+R(p)+G(p)}{2F(p)}$$
$$\Phi(p) = \frac{P(p)-S(p)+R(p)-G(p)}{2F(p)} \quad (6)$$

A reaktáns kétkapuk elméletében ezeknek az üzemi paramétereknek igen nagy jelentőségük van. Egy-



5. ábra. Mindkét oldalán zárt kétkapu

értelműen meghatározzák a kétkapu szórásmátrixát, tehát magát a kétkaput is. Innen következik, hogy például a kétkapu univerzális paramétereit is fel kell tudnunk írni segítségükkel.

Írjuk fel a (6) egyenletek alapján az átviteli és karakterisztikus függvények páros és páratlan részeit. Tudnunk kell, hogy az itt szereplő reaktáns kétkapu polinomok tiszta páros vagy páratlan függvények, éspedig $P(p)$, $F(p)$ és $S(p)$ azonos párosságúak, $R(p)$ és $G(p)$ pedig ezekkel ellentétes párosságú. Így az üzemi paraméterek páros ill. páratlan részei:

$$Ps\Gamma(p) \triangleq \frac{1}{2}\,[\Gamma(p)+\Gamma(-p)] = \frac{P(p)+S(p)}{2F(p)};$$

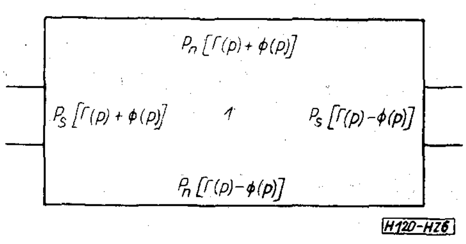
$$Pn\Gamma(p) \triangleq \frac{1}{2}\,[\Gamma(p)-\Gamma(-p)] = \frac{R(p)+G(p)}{2F(p)};$$

$$Ps\Phi(p) = \frac{P(p)-S(p)}{2F(p)}; \tag{7}$$

$$Pn\Phi(p) = \frac{R(p)-G(p)}{2F(p)}$$

Ennek a négy egyenletnek a segítségével könnyű kifejezni az univerzális paramétereket. Ezeket a kifejezéseket a szokásos módon, a kétkapu szimbólumába jegyezve, a 6. ábrán adtuk meg. E kifejezések ismeretében a kétkapu bármelyik paraméter-mátrixa explicit módon felírható az üzemi paraméterek segítségével. Az üzemi paraméterek *P*R-feltételei a fentebb adott definíciós egyenleteik alapján könnyen található: nevezőjük azonos tiszta páros, vagy, páratlan polinom; $F(p)$ számlálója Hurwitz polinom ezzel szemben $\Phi(p)$ számlálója majdnem teljesen kötetlen, csupán fokszámától kell megkövetelnünk, hogy legfeljebb 1-gyel legyen alacsonyabb, mint nevezőjének fokszáma. Végül az üzemi paramétereknek ki kell elégíteniök az alábbi kötést:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(-p) = 1 + \Phi(p)\cdot\Phi(-p) \tag{8}$$



6. ábra. A reaktáns kétkapu univerzális paraméterei üzemi paraméterekkel kifejezve

Az üzemi csillapítás kétféleképpen is kifejezhető az üzemi paraméterekkel:

$$a = \frac{1}{2}\ln[\Gamma(p)\cdot\Gamma(-p)] = \frac{1}{2}\ln[1+\Phi(p)\cdot\Phi(-p)] \tag{9}$$

A szűrőtervezés feladata rendszerint előírt csillapítás-karakterisztikával rendelkező kétkapu keresése. A tervezést célszerű az üzemi csillapítást megszabó karakterisztikus függvény meghatározásával kezdeni. Azért célszerű a $\Phi(p)$ függvényt választani, mert ennek *P*R feltételei lényegesen enyhébbek, mint az átviteli függvényé; az üzemi csillapítással való kapcsolata pedig meglepően szemléletes: *a csillapításfüggvény és a karakterisztikus függvény pólusai és zérusai egyaránt egybeesnek.*

Olyan megengedett Φ(p) függvényt kell tehát keresnünk, melynek abszolút értéke az áteresztő tartományban elegendően kicsiny, a zárótartományban pedig elegendően nagy. Az ideális követelményeket algebrailag így fejezhetjük ki:

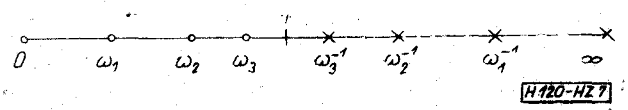
1. áteresztő tartományban: $\Phi(j\omega) \doteq 0$
2. zárótartományban: $\Phi(j\omega) \doteq \infty$

A $\Phi(p)$ racionális törtfüggvényt egyértelműen meghatározzák zérusai, pólusai és együtthatója. A fenti ideális követelmények természetesen teljesíthetetlenek, de könnyű belátni, hogy bármilyen jól megközelíthetők, ha az áteresztőrészben elegendő számú zérust, a zárórészben pedig elegendően sok pólust helyezünk el. Természetesen mindkét tartomány a képzetes tengelyen van.

Ha előírjuk, hogy egy polinom valamennyi zérusa a képzetes tengelyen legyen, akkor az csak tiszta páros vagy páratlan lehet. Az ideális követelmények a karakterisztikus függvény számlálóját és nevezőjét egyaránt tiszta páros vagy páratlan függvénynek írják elő. A nevező persze már a *P*R feltételek miatt ilyen volt: az ideális követelmények tehát csak a számlálóra nézve jelentenek újat. Az ideális karakterisztikus függvény — ez a fogalmazás a legtömörebb — azzal van jellemezve, *hogy reciproka is megengedett karakterisztikus függvény.*

A 6. ábrára vetett egyetlen pillantás meggyőz arról, hogy tiszta páros karakterisztikus függvényhez antimetrikus, tiszta páratlanhoz pedig szimmetrikus kétkapu tartozik. Ha a specifikációt kielégítő $\Phi(p)$ függvényt megtaláltuk, akkor az üzemi szintézis következő feladata az ehhez tartozó, és a (11) egyenletet kielégítő $\Gamma(p)$ függvény meghatározása. Ennek létezését a karakterisztikus függvény *P*R volta mindenesetre garantálja, meghatározása viszont eléggé fáradságos, hiszen magas fokszámú algebrai egyenletet kell megoldanunk. Ha mindkét üzemi paraméter megvan, akkor az ismertetett összefüggések alapján a kétkapu bármelyik paraméter csoportja meghatározható. A hátralevő feladat, a reaktáns kétkapu realizálása, már racionális algebrai feladat.

Végül egy nagyon speciális, de mégis jellemző példán szeretnénk egy approximációs módszert bemutatni. Válasszuk a karakterisztikus függvény zérusait és pólusait a logaritmikus frekvencia skálán szimmetrikusan, a 7. ábra jellegdiagramja szerint! Ezzel a választással a konkréten 7-ed fokúnakválasz-



7. ábra

tott karakterisztikus függvény az alábbi igen egyszerű formában írható:

$$\Phi(p)=H\frac{p(\omega_1^2+p^2)(\omega_2^2+p^2)(\omega_3^2+p^2)}{(1)\,(1+\omega_1^2p^2)(1+\omega_2^2p^2)(1+\omega_3^2p^2)} \qquad (10)$$

A függvény paraméterei a H együtthatón kívül a zérusok. Ezeket a zérusokat kell úgy megválasztanunk, hogy a csillapításkarakterisztika az előírásoknak megfeleljen. A karakterisztikus függvény abszolút értéke (pontosabban ennek logaritmusa) így írható:

$$\ln|\Phi|=\ln H+\ln\omega+\ln\left|\frac{\omega_1^2-\omega^2}{1-\omega_1^2\omega^2}\right|+\ln\left|\frac{\omega_2^2-\omega^2}{1-\omega_2^2\omega^2}\right|+$$
$$+\ln\left|\frac{\omega_3^2-\omega^2}{1-\omega_3^2\omega^2}\right| \qquad (11)$$

Ebben a formában azt már elértük, hogy egy-egy zérus megváltoztatása a fenti — az üzemi csillapításra egyértelműen jellemző — kifejezésnek csak egyetlen tagját változtatja. Most még vezessük be a hullámparaméteres frekvenciatranszformációhoz nagyon hasonló transzformációt:

$$\gamma=\frac{1}{2}\ln\frac{\omega^2+1}{\omega^2-1}, \quad \text{azaz} \quad \omega^2=\operatorname{cth}\gamma \qquad (12)$$

Így a (11)-ben szereplő, az ω_i zérushoz (és a vele együtt mozgó pólushoz) tartozó csillapításjárulék így fejezhető ki:

$$\ln\left|\frac{\omega_i^2-\omega^2}{1-\omega_i^2\omega^2}\right|=\ln\operatorname{cth}|\gamma-\gamma_i| \qquad (13)$$

Végül pedig az üzemi csillapítás alábbi hiperbolikus kifejezését kapjuk, mely már teljesen analóg a megfelelő hullámparaméteres összeg-előállítással, hiszen a csillapítás-járulékok csak a pólustól mért távolság függvényei:

$$a=\frac{1}{2}\ln\{1+\exp[2\ln H+\ln\operatorname{cth}\gamma+$$
$$+2\ln\operatorname{cth}|\gamma-\gamma_1|+\ldots]\} \qquad (14)$$

Megvan a karakterisztikus függvény. Az üzemi paraméteres szintézis következő lépése az ehhez tartozó átviteli függvény meghatározása. Mint tudjuk, ennek pólusai egybeesnek $\Phi(p)$ pólusaival, azaz nevezőjében ugyanaz a már ismertnek tekinthető $F(p)$ polinom áll. A számlálója a meghatározandó $H(p)$ Hurwitz polinom. A felvett karakterisztikus függvény számláló polinomját jelöljük $A(p)$-vel, azaz jelöljük:

$$\Phi(p)=\frac{A(p)}{F(p)}; \quad \Gamma(p)=\frac{H(p)}{F(p)} \qquad (15)$$

Ezeket a jelöléseket a (8) egyenletbe helyettesítve, az ismeretlen polinomra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$H(p)\cdot H(-p)=F(p)\cdot F(-p)+A(p)\cdot A(-p) \qquad (16)$$

A jobb oldal zérusainak a meghatározásával, és a bal félsíkra eső zérusok összegyűjtésével elvileg könnyen megkapjuk a keresett $H(p)$ polinomot.

Az üzemi paraméteres szintézis lényeges mozzanatainak áttekintése után térjünk át a hullámparaméteresre.

5. Hullámszhitézis

Az alapfeladat természetesen ugyanaz: ki kell választanunk egy megfelelő karakterisztikus függvényt, *közben betartva a hullám-feltételeket.* A hullámfeltételek teljesülését a karakterisztikus függvényen közvetlenül nem láthatjuk, a hullámparamétereken viszont igen. Tehát nem közvetlenül a karakterisztikus függvényt keressük, hanem a megfelelő hullámparamétereket, amelyek kielégítő karakterisztikus függvényt adnak.

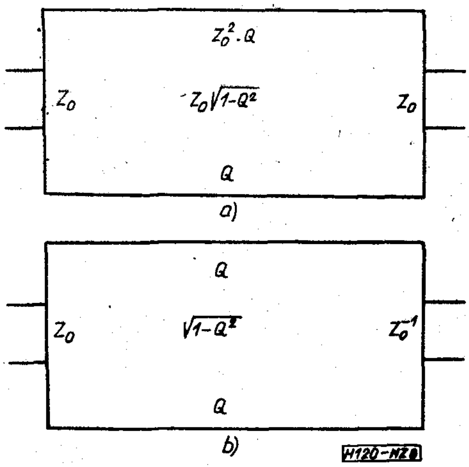
Azt találtuk, hogy az ideális követelmények szimmetrikus vagy antimetrikus kétkaput írnak elő. Ez hullámparaméterekben kifejezve azt jelenti, hogy a szekunder hullámimpedancia a primerrel, vagy annak reciprokával egyenlő. Ezzel egy alapvető felismeréshez jutottunk: minden ideális szűrő két hullámparaméterrel írható le: a $Z_{10}(p)$ primer hullámimpedanciával és a $Q(p)$ diagonálviszonnyal. E két speciális esetben a kétkapu univerzális paramétereinek 1. ábrán adott hullámparaméteres kifejezései a 8. ábrán látható módon egyszerűsödnek.

E két esetben az üzemi paraméterek a (10) egyenlet szerint a következőképpen fejezhetők ki hullámparaméterekkel:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_{\text{szimm}}&=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1-Q^2}}+\frac{Z_0^2+1}{2Z_0}\,\frac{Q}{\sqrt{1-Q^2}}\\
\Phi_{\text{szimm}}&=\frac{Z_0^2-1}{2Z_0}\,\frac{Q}{\sqrt{1-Q^2}}\\
\Gamma_{\text{anti}}&=\frac{Q}{\sqrt{\mathrm{i}-Q^2}}+\frac{Z_0^2+1}{2Z_0}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}-Q^2}}\\
\Phi_{\text{anti}}&=\frac{Z_0^2-\mathrm{i}}{2Z_0}\,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\mathrm{i}-Q^2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Még ezekben a speciális esetekben is alaposan nehezül az approximációs feladat, hiszen az egyetlen $\Phi(p)$ függvény helyett két függvényt kell szimultán approximálni. Ezzel a negatívummal szemben azonban máris van egy pozitívum: a kiválasztott $Z_0(p)$ és $Q(p)$ függvények nemcsak a karakterisztikus függvényt határozzák meg, hanem az átvitelit is, *tehát a (16) egyenlettel megadott magasfokú algebrai egyenlet megoldásának szükségessége elmarad.*

Az általános hullámparaméteres szűrőtervezésnek a klasszikushoz vajmi kevés köze van; ezt a fentiekből világosan láthatjuk. Ez az elnevezés mégis indokoltnak tekinthető, mert ez egész más irányból elindulva — speciális esetként — a klasszikus hullámszintézist



8. ábra. Ideális szűrő univerzális paraméterei hullámparaméterekkel kifejezve. *a)* szimmetrikus eset, *b)* antimetrikus eset

is magába foglalja. Egyébként azonban az általános hullámszintézis nem más, mint a hullámfeltételekkel megterhelt üzemi szintézis, és így eljárásaiban is lényegében követheti azt.

Vizsgáljuk meg közelebbről, hogy a hullámfeltételek milyen korlátozást jelentenek a karakterisztikus függvény megválasztásában.

A karakterisztikus függvény, mint ezt a (17) képletekből látjuk, mindkét ideális esetben két tényezőre esik szét, melyek egyike csak a hullámimpedanciától, a másik pedig csak a diagonálviszonytól függ. Vegyük szemügyre ezeket a tényezőket. Az első csak Z_0-tól függ és mindkét esetben ugyanaz:

$$\Phi_z(p)=\frac{1}{2}(Z_0-Z_0^{-1}) \qquad (18)$$

Innen látható, hogy Z_0 1-helyei (illesztési pontok) karakterisztikus zérusokat jelentenek, szingularitásai (zérusai és pólusai) pedig karakterisztikus pólusokat. A Q-fól függő tényező a szimmetrikus illetve antimetrikus esetben:

$$\Phi_Q=\frac{Q}{\sqrt{1-Q^2}} \quad \text{ill.} \quad \Phi_Q=\frac{1}{\sqrt{1-Q^2}} \qquad (19)$$

Innen pedig azt látjuk, hogy a diagonálviszony 1-helyei karakterisztikus pólusokat jelentenek; a karakterisztikus zérusokat pedig szimmetrikus esetben a diagonálviszony zérusai, antimetrikus esetben pólusai jelölik ki.

1. táblázat

	Φ-pólus = Q 1-hely + Z_0 zérus + Z_0 pólus
Szimm. eset	Φ – zérus = Q zérus + Z_0 1-hely
Antim. eset	Φ – zérus = Q pólus + Z_0 1-hely

A hullámszintézis a karakterisztikus zérusok és pólusok elhelyezését a hullámparaméterek szingularitásainak és 1-helyeinek megfelelő választásával éri el. Viszont a hullámparaméterek szingularitásai és 1-helyei nem választhatók függetlenül. Ebben rejlik a hullámszintézis korlátozása. Egy n-edfokú hullámparaméternek éppen n darab 1-helye van, és ezeknek az 1-helyeknek a megadása egyértelműen rögzíti a szingularitásokat is. Ha például a Q-1-helyek megfelelő elhelyezésével a karakterisztikus pólusokat (csillapításpólusokat) állítjuk be, akkor a Q-zérusok (illetve a Q-pólusok) „hívatlanul" karakterisztikus zérusokat (azaz csillapítás-zérusokat) hoznak. Ugyanez a helyzet a hullámimpedanciával kapcsolatban is: ha ennek 1-helyeivel karakterisztikus zérusokat helyezünk el, akkor adódó szingularitásai hívatlan karakterisztikus pólusokat jelentenek.

A hullámszintézis korlátozása összefoglalva így fogalmazható: a tervezendő karakterisztikus függvény zérusainak és pólusainak csak körülbelül fele vehető fel szabadon: a másik fele már adódik — ez a hullámfeltételek betartásának ára.

6. A szimultán approximáció módszere

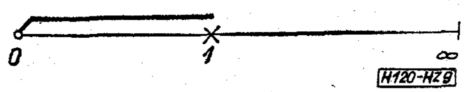
Az előző pontban leírt korlátozások ismeretében kézenfekvően kínálkozik a következő approximációs módszer. Szorítkozzunk a továbbiakban aluláteresztő és felüláteresztő szűrőkre. Kiindulásul vegyük fel a Z és Q 1-helyeit, ezzel első közelítésben elhelyezve a karakterisztikus zérusokat és pólusokat: pontosabban azoknak csak körülbelül a felét. Ezek után megnézzük, hogy hova esnek a „hívatlan" szingularitások. Ezeket is figyelembe véve, most az először elhelyezett 1-helyeket úgy rendezzük át, hogy a régi hívatlanokkal együtt gazdaságos póluszérus elrendezést adjanak. A következő lépésben kiszámítjuk a „hívatlanok" új helyét, és így tovább.

A szimultán approximáció módszerénél a hullámparamétereket célszerű 1-helyekkel megadni. A diagonálviszony 1-helyekkel való leírása a klasszikus hullámszintézisből is jólismert; nem más, mint a $Q(p)$ függvény modulusokkal (csillapítás-pólusokkal) való megadása. Hasonlóképpen modulusokkal fogjuk leírni a $Z_0(p)$ hullámimpedanciát is.

A Q-függvények 1-helyekkel való leírásának kérdése önmagában is érdekes algebrai probléma, melyről érdemes pár szót szólni. A megoldás azon a tételen alapszik, hogy a legáltalánosabb egy-határfrekvenciás (tehát aluláteresztő, vagy felüláteresztő) Q-függvény a hozzá hasonló — tehát azonos határfrekvenciájú — elsőfokú Q-függvénnyel racionálisan kifejezhető.

Szorítkozzunk a továbbiakban aluláteresztőre; az elmondottak értelemszerűen a felüláteresztőre is érvényesek. A PR-feltételeknek eleget tevő legegyszerűbb aluláteresztő diagonálviszony jellegdiagramját a 9. ábra mutatja.

Ha még kikötjük, hogy ennek a függvénynek az 1-helye a végtelenben legyen, akkor egyértelműen



9. ábra

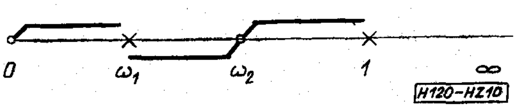
egyetlen primitív diagonálviszonyra jutunk. Jelöljük ezt φ-vel:

$$\varphi=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \qquad (20)$$

és tekintsük transzformált frekvenciának, mellyel az eredeti így fejezhető ki:

$$p^2=\frac{\varphi^2}{1-\varphi^2} \quad \text{illetve} \quad \omega=\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}} \qquad (21)$$

A fenti tétel általános igazolása helyett elegendő, ha konkréten egy harmadfokú diagonálviszonyt vizsgálunk, melyet a 10. ábra szerinti jellegdiagram ad meg.



10. ábra

Ezt a diagonálviszonyt p függvényében az alábbi képlettel adjuk meg:

$$Q(p)=\frac{p(1+\pi_2 p^2)}{(1+\pi_1 p^2)\sqrt{1+p^2}}; \quad \text{hol} \quad \pi_i=\omega_i^{-2} \qquad (22)$$

Ha (21) segítségével p-t transzformált frekvenciára cseréljük fel, akkor — kis számolás után — az alábbi eredményre jutunk:

$$Q(\varphi)=\frac{\varphi\cdot(1+[\pi_2-1]\varphi^2)}{(1+[\pi_1-1]\varphi^2)\ (1)} \qquad (23)$$

Valóban: a p-ben nem racionális $Q(p)$ függvény φ-ben racionálissá vált. Persze könnyű belátni, hogy ez általános esetben is igaz.

Algebrai problémánk áttekintését nagyon megkönnyíti az 1-tartó „és-művelet" bevezetése. Definíciója két tagra:

$$Q_1 * Q_2 \triangleq \frac{Q_1+Q_2}{1+Q_1 Q_2} \qquad (24)$$

Tulajdonsága, hogy a művelet eredménye 1 bármelyik tagjának 1-helyénél: innen az „1-tartó" jelző. Általános definíciója a tagok elemi szimmetrikus formáinak segítségével:

$$Q_1 * Q_2 * \ldots * Q_n \triangleq \frac{Q^{(1)}+Q^{(3)}+\ldots}{1+Q^{(2)}+Q^{(4)}+\ldots} \qquad (25)$$

ahol

$$Q^{(1)}=Q_1+Q_2+\ldots+Q_n,$$
$$Q^{(2)}=Q_1Q_2+Q_1Q_3+\ldots+Q_2Q_3+\ldots$$

és így tovább.

Nagyon tömör és áttekinthető az és-művelet implicit definíciója:

$$Q_e=Q_1 * Q_2 * \ldots * Q_n, \quad \text{ha}$$

$$\frac{1-Q_e}{1+Q_e}=\frac{1-Q_1}{1+Q_1}\cdot\frac{1-Q_2}{1+Q_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-Q_n}{1+Q_n} \qquad (26)$$

Közvetlenül látjuk, hogy az „és-összeg" 1, ha a tagok egyike 1; ha pedig a tagok egyike -1, akkor az és-összeg is -1. Az is világossá válik, hogy egyidejűleg egy $+1$ és egy -1 értékű tag esetén a művelet nem végezhető el.

A legáltalánosabb elsőfokú aluláteresztő diagonálviszony a fentebb választott primitívtől csak abban különbözik, hogy 1-helye nem a végtelenben van. Algebrailag írjuk az általános elsőfokú diagonálviszonyt az alábbi formába:

$$Q=\mathrm{m}\varphi=\frac{\mathrm{m}p}{\sqrt{1+p^2}} \qquad (27)$$

és az itt szereplő együtthatót nevezzük *modulusnak*. Ez valóban a függvény 1-helyére utal, ugyanis az 1-hely φ-ben $\varphi=1/\mathrm{m}$.

Legyenek a (25) egyenletben szereplő tagok elsőfokú diagonálviszonyok az $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots \mathrm{m}_n$ modulusokkal jellemezve. Ezek és-összege éppen az általános n-edfokú diagonálviszonyt adja:

$$Q(\varphi)=\mathrm{m}_1\varphi * \mathrm{m}_2\varphi * \ldots * m_n\varphi=\frac{\mathrm{m}^{(1)}\varphi+\mathrm{m}^{(3)}\varphi^3+\ldots}{1+\mathrm{m}^{(2)}\varphi^2+m^{(4)}\varphi^4+\ldots} \qquad (28)$$

Ezt a kifejezést, könnyű számolással, az alábbi alternatív formába írhatjuk:

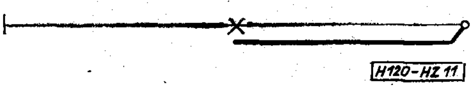
$$Q(\varphi)=\frac{P_n M(\varphi)}{P_S M(\varphi)}=\frac{M(\varphi)-M(-\varphi)}{M(\varphi)+M(-\varphi)} \qquad (29)$$

hol

$$M(\varphi)=(1+\mathrm{m}_1\varphi)(1+\mathrm{m}_2\varphi)\ldots(1+m_n\varphi) \qquad (30)$$

A modulusokkal adott diagonálviszony numerikus számolására a fenti formula látszik a legalkalmasabbnak.

Analóg módon járunk el a hullámimpedanciák 1-helyekkel, illetve modulusokkal való leírásánál. A primitív hullámimpedanciát (azaz a legegyszerűbb elsőfokú hullámimpedanciát) válasszuk analóg módon a 11. ábra szerinti jellegdiagram szerint:



11. ábra

Az analóg módon választott transzformált frekvencia és megfordítása tehát:

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}; \quad p^2=\frac{1-\psi^2}{\psi^2}, \quad \omega=\frac{\sqrt{\psi^2-1}}{\psi} \qquad (31)$$

A részletes számítások megismétlése nélkül elegendő csupán az analóg eredményeket közölni. A k_1, k_2, $\ldots k_m$ modulusokkal jellemzett aluláteresztő hullámimpedancia ψ függvényében racionálisan a következő formulákkal írható le:

$$Z_0(\psi)=\frac{K(\psi)-K(-\psi)}{K(\psi)+K(-\psi)}=\frac{P_n K(\psi)}{P_S K(\psi)} \qquad (32)$$

hol:

$$K(\psi)=(1+k_1\psi)(1+k_2\psi)\ldots(1+k_m\psi).$$

Térjünk vissza a modulusaival adott szűrő csillapításának vizsgálatára. A szűrő hullámparaméterei a

(32) formulákkal vannak adva. Tegyük fel, hogy $Q(\varphi)$ párosfokú, azaz a szűrő szimmetrikus. Ebben az esetben a karakterisztikus függvény Φ_Q tényezője a (19) formula szerint, behelyettesítve a (29) alatti kifejezését, az alábbi formát ölti:

$$\Phi_Q = \frac{Q(\varphi)}{\sqrt{1-Q^2(\varphi)}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{M(\varphi)}{M(-\varphi)}} - \sqrt{\frac{M(-\varphi)}{M(\varphi)}}\right] \quad (33)$$

Páratlanfokú $Q(\varphi)$ esetén az eredmény csak egy előjelben tér el:

$$\Phi_Q = \frac{1}{\sqrt{1-Q^2(\varphi)}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{M(p)}{M(-p)}} + \sqrt{\frac{M(-\varphi)}{M(\varphi)}}\right] \quad (34)$$

Analóg módon számolhatjuk a hullámimpedancia szimmetrikus és antimetrikus esetben közös hozzájárulását:

$$\Phi_z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_0} - z_0\right) - \frac{2K(\psi)K(-\psi)}{K^2(\psi) - K^2(-\psi)}$$

azaz (35)

$$\Phi_z^{-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{K(\psi)}{K(-\psi)} - \frac{K(-\psi)}{K(\psi)}\right]$$

A (33) és (35) formulák hasonlósága meglepő, és rávilágít arra, hogy az annyira különböző jelentésű hullámparaméterek a karakterisztikus függvény felépítésében mennyire rokon szerepet játszanak. Talán közelebb kerülünk ennek megértéséhez, ha meggondoljuk, hogy a karakterisztikus függvény és reciproka analóg szerepet játszanak: míg a karakterisztikus függvény az üzemi csillapításra jellemző:

$$a_{\text{üz}} = \frac{1}{2}\ln(1 + |\Phi|^2)$$

addig annak reciproka a reflexió csillapítást adja:

$$a_{\text{refl}} = \frac{1}{2}\ln(1 + |\Phi|^{-2})$$

Összefoglalás

Az üzemi és hullámparaméteres tervezés összefüggéseit vizsgáló cikksorozat első része, e két módszer számára egy közös elméleti alapot keres, és ezt az univerzális paraméterek, valamint a szórásmátrixból származó üzemi paraméterek segítségével világítja meg. A cikkben röviden vázolt approximációs módszer is annak bemutatására szerepel, hogy a kétféle módszer, annak ellenére, hogy az általános vélemény szerint távol esnek egymástól, mennyire egységesen, a kapcsolatokra élesen rávilágító módon kezelhető.

IRODALOM

[1] *Cauer, W.:* Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Akademische Verlag, Berlin, 1954.

[2] *Darlington, S.:* Synthesis of reactance 4-poles. J. Math. Phys. 1939.

[3] *Belevitch, V.:* Recent Developments in Filter Theory. IRE Trans. on Circuit Theory, 1958.

[4] *Fetzer, V.:* Vergleich von Filtern nach der Wellenparametertheorie mit den Filtern der Betriebsparametertheorie. Archiv der Elektrische Übertragung, 1956.